

# 12 Dynamisches Risikomanagement in der Energiewirtschaft

Eichhorn, A. ; Römisch, W.

**Kurzfassung:** Es wird eine Methodik zur Kombination von Risikomanagement und Portfolio-Optimierung eines Energieversorgungsunternehmens vorgeschlagen. Dazu müssen die Unsicherheiten (z.B. die elektrische Last, Spotpreise, Zuflüsse, Wind) mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Szenarien nebst deren Wahrscheinlichkeiten approximativ dargestellt werden. Für die Risikomessung sind geeignete Akzeptanz- bzw. Risikofunktionale zu wählen, deren (dynamische) Eigenschaften den zur Risikoabsicherung genutzten finanziellen Instrumenten (z.B. derivative Stromprodukte) angepasst sind. Überdies sollte das Akzeptanzfunktional polyedrisch sein, um die Linearität des Portfolio-Optimierungsmodells zu erhalten. In diesem Kapitel werden die Eigenschaften (polyedrischer) Akzeptanz-Funktionale nebst instruktiver Beispiele vorgestellt. Sämtliche Beispiele sind mehrperiodische Erweiterungen des Average Value-at-Risk. An einem konkreten energiewirtschaftlichen Modell werden numerische Ergebnisse für das in die Portfolio-Optimierung integrierte Risikomanagement diskutiert.

**Schlagworte:** *Stochastische Optimierung, mehrstufig, Risiko, mehrperiodisch, Average Value-at-Risk*

## 12.1 Einleitung

Die Deregulierung der europäischen Strommärkte stellte die Energieversorgungsunternehmen vor neue Herausforderungen. Einerseits eröffnete dieser Schritt neue Absatzchancen, andererseits aber erhöhten sich die unternehmerischen Risiken. Die Portfolios der Energieversorger enthalten nun neben der eigenen Stromerzeugung, deren Kosten sich am Marktpreis orientieren müssen, und bilateralen Verträgen auch Handelsentscheidungen an Spot- und Derivate-Märkten. Überdies werden Strombedarf und Strompreise zunehmend schwieriger vorhersagbar. Neben dem klassischen Optimierungsziel der Maximierung des erwarteten Gesamtertrags gewinnt die Begrenzung bzw. Minimierung von Risiken enorm an Bedeutung.

Aus mathematischer Sicht erfordert dies die Notwendigkeit der Quantisierung und Messung von Risiken energiewirtschaftlicher Entscheidungen. Überdies ist eine Einbindung der Risikomessung in Portfolio-Optimierungsmodelle, die die Stochastizität der unsicheren Parameter abbilden, erforderlich. Risikomanagement wird in Energieversorgungsunternehmen häufig nach erfolgter Stromerzeugungsplanung durchgeführt; es wird "nachgeschaltet" (vgl. [3, 4]). Nur mit Hilfe des Strom- und Derivate-Handels erfolgt eine Risikoabsicherung. In [3, 4] wird allerdings mit Recht darauf hingewiesen, dass eigene Stromerzeugungsentscheidungen in Kombination mit Handelsentscheidungen zur Risikoabsicherung beitragen können, dass man also das Risikomanagement in das Portfoliomanagement *integrieren* sollte. In diesem Kapitel betrachten wir deshalb ein (stochastisches) energiewirtschaftliches Optimierungsmodell, bei dem die Maximierung des erwarteten Gesamtertrags und die Minimierung des Risikos *gleichzeitig* angestrebt werden. Ist  $\xi = \{\xi_t\}_{t=0}^T$  ein stochastischer Prozess, der in ein energiewirtschaftliches Modell eingeht,  $x = \{x_t\}_{t=0}^T$  ein stochastischer Prozess von (Erzeugungs- und Handels-) Entscheidungen und beschreibt  $f_t(x_t, \xi_t)$  den im Zeitpunkt  $t$  erzielten Ertrag, so hat der von der Entscheidung  $x$  abhängige Ertrag  $G_x$  über dem gesamten Zeithorizont die Form

$G_x = \sum_{t=0}^T f_t(x_t, \xi_t)$ . Bei  $G_x$  handelt es sich um eine (reelle) Zufallsvariable, deren Verteilung wesentlich von der Entscheidung  $x$  abhängt. Insbesondere kann  $G_x$  eine große Streuung besitzen und die Wahrscheinlichkeit deutlich kleinerer Ertragswerte  $G_x$  als der Erwartungswert  $\mathbb{E}(G_x)$  groß sein. Da dies kaum akzeptabel ist, ist eine nur auf die Maximierung des erwarteten Gesamtertrags gerichtete Entscheidung *ungeeignet*. Deshalb wurde bereits in der klassischen Arbeit [19] die Varianz bzw. die lower semi-variance gleichzeitig minimiert, um die Streuung von  $G_x$  gering zu halten. In den 90ern wurde der *Value-at-Risk*  $\mathbb{V}@R$  zur Risikomessung sehr populär (vgl. [5, 17]) bis schließlich durch die Axiomatisierung von *kohärenten* bzw. *konvexen* Risikofunktionalen in [1, 11, 13] zumindest für reelle Zufallsvariable allgemein akzeptierte Eigenschaften vorlagen (vgl. auch [12, 20]).

Für zeitlich ablaufende stochastische Prozesse wurde schließlich nach einer *dynamischen* bzw. *mehrperiodischen* Erweiterung der konvexen Risikofunktionale gesucht. Mit [2, 14] und [20, Chapter 3] liegt eine Erweiterung der Axiomatisierung vor, die einen Einsatz beim dynamischen Risikomanagement in energiewirtschaftlichen Modellen möglich macht.

Im nächsten Abschnitt wird diese Axiomatisierung diskutiert und es werden erste Beispiele angegeben. In dem darauf folgenden Abschnitt werden aus Gründen der Erhaltung von Linearitätseigenschaften in Optimierungsmodellen polyedrische Risikofunktionale favorisiert, von denen einige im abschließenden Abschnitt zum Einsatz kommen. An einem Portfolio-Optimierungsmodell eines kleineren Energieversorgungsunternehmens wird demonstriert, wie mit Hilfe dieser Risikofunktionale ein integriertes Risikomanagement realisiert werden kann.

## 12.2 Akzeptanz- und Risikofunktionale

Wir betrachten ein energiewirtschaftliches Optimierungsmodell über einem (diskreten) Zeithorizont  $\{0, 1, \dots, T\}$ , in dem bei Vorliegen eines stochastischen Eingangsprozesses  $\xi = \{\xi_t\}_{t=0}^T$  mit deterministischem  $\xi_0$  die Akzeptanz (das Risiko) von Entscheidungen bewertet bzw. maximiert (minimiert) werden soll. Ein Akzeptanzfunktional  $\mathcal{A}$  bzw. Risikofunktional  $\rho$  ordnet jedem Zufallsvektor  $Y = (Y_1, \dots, Y_T)$  eine reelle Zahl zu. Dabei nehmen wir an, dass  $Y_t$  den Ertrag zum Zeitpunkt  $t$  repräsentiert und von  $(\xi_0, \dots, \xi_t)$  abhängt, z.B.  $Y_t = f_t(x_t, \xi_t)$ , vgl. Abschnitt 12.1. Wir beschränken uns im folgenden auf die Beschreibung eines Akzeptanzfunktionals, das auf einem linearen Raum  $\mathcal{Y}$  von Zufallsvektoren definiert ist. Als Beispiel für  $\mathcal{Y}$  sei die Menge  $L_r^T$  aller Zufallsvektoren  $Y = (Y_1, \dots, Y_T)$  genannt, so dass  $r$ -te absolute Momente  $\mathbb{E}(|Y_t|^r)$  für alle  $t = 1, \dots, T$  und ein  $r \geq 1$  existieren. Formal ist  $\mathcal{A}(Y)$  ein statistischer Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $Y$ . Größere Werte von  $\mathcal{A}$  sollen favorisiert werden und  $\mathcal{A}$  soll überdies weitere Eigenschaften besitzen.

**Definition 12.1.** Eine Abbildung  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{Y}$  in die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  heißt *mehrperiodisches Akzeptanz-Funktional*, falls es die folgenden Eigenschaften für alle Zufallsvektoren  $Y = (Y_1, \dots, Y_T)$  und  $Y' = (Y'_1, \dots, Y'_T)$  aus  $\mathcal{Y}$  besitzt:

(A1) **Konkavität.** Für jedes  $\lambda \in [0, 1]$  gilt

$$\mathcal{A}(\lambda Y + (1 - \lambda)Y') \geq \lambda \mathcal{A}(Y) + (1 - \lambda) \mathcal{A}(Y').$$

(A2) **Monotonie.** Aus  $Y_t \leq Y'_t$  für jedes  $t = 1, \dots, T$  folgt

$$\mathcal{A}(Y) \leq \mathcal{A}(Y').$$

(A3) **Translations-Äquivarianz bzgl.  $\mathcal{W}$ .** Für die abgeschlossene und konvexe Teilmenge  $\mathcal{W}$  von  $\mathcal{Y}$  gilt

$$\mathcal{A}(Y + W) = \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(W_t) + \mathcal{A}(Y)$$

für alle  $W = (W_1, \dots, W_T) \in \mathcal{W}$ .

Ein mehrperiodisches Akzeptanzfunktional  $\mathcal{A}$  heißt *positiv homogen* bzw. *strikt*, falls für alle  $Y \in \mathcal{Y}$  und  $\lambda > 0$  gilt:

$$\mathcal{A}(\lambda Y) = \lambda \mathcal{A}(Y) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A}(Y) \leq \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(Y_t).$$

Ist  $\mathcal{A}$  ein (mehrperiodisches) Akzeptanzfunktional, so heißt  $\rho := -\mathcal{A}$  (*mehrperiodisches*) *Risikofunktional*. Das durch  $\mathcal{D}(Y) := \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(Y_t) - \mathcal{A}(Y)$  definierte Funktional  $\mathcal{D}$  heißt (*mehrperiodisches*) *Deviation-Risikofunktional*.

Die Konkavität (A1) und Monotonie (A2) werden von allen Autoren übereinstimmend gefordert. Beide Eigenschaften sind auch sehr anschaulich: Die Akzeptanz steigt natürlich (und das Risiko verkleinert sich), wenn der Ertrag zu jedem Zeitpunkt  $t$  wächst; die Konkavität von  $-\mathcal{A} = \rho$  bedeutet, dass Diversifikation das Risiko verkleinert. Bei der Eigenschaft (A3) folgen wir hier dem allgemeinen Konzept in [14]. Allerdings wurde dort anstelle des Terms  $\sum_{t=1}^T \mathbb{E}(W_t)$  allgemeiner  $\pi(W)$  mit einer Abbildung  $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  vorgeschlagen, später aber oft die Linearität von  $\pi$  vorausgesetzt. Die Menge  $\mathcal{W}$  enthält die möglichen finanziellen Instrumente  $W$  und  $\pi(W)$  repräsentiert den Preis (die Kosten) von  $W$ . Die Menge  $\mathcal{W}$  ist also Teil der Modellierung. Unstrittig ist, dass im einperiodischen Fall  $T = 1$  gerade  $\mathcal{W} = \mathbb{R}$  gewählt werden sollte (vgl. [1]). Dies bedeutet, dass bei Einsatz eines deterministischen finanziellen Instruments, die Akzeptanz sich genau um dessen Betrag verändert. Abhängig von der Menge  $\mathcal{W}$  der vorhandenen finanziellen Instrumente und dem Gesamtmodell kann dies auch für jedes  $t \in \{1, \dots, T\}$  angebracht sein. In anderen Modellen soll dieser Akzeptanzeffekt jedoch nur eintreten, wenn das finanzielle Instrument für  $t = 1$  vorliegt. Dies führt zu den ersten beiden Situationen in den nachfolgenden Beispielen.

**Beispiel 12.2.** (für  $\mathcal{W}$  in (A3))

In allen Fällen sei  $\mathcal{Y} = L_r^T$ , wobei  $r \geq 1$  so gewählt wird, dass  $\mathcal{A}$  bzw.  $\rho$  definiert sind.

- (a)  $\mathcal{W} = \{(x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^T : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}^{T-1}$ .
- (b)  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^T$ .
- (c)  $\mathcal{W} = \{(x_1, \dots, x_T) \in \mathbb{R}^T : x_t \geq 0, t = 1, \dots, T\} = \mathbb{R}_+^T$ .
- (d)  $\mathcal{W} = \{W = (W_1, \dots, W_T) \in L_r^T : \sum_{t=1}^T W_t \text{ ist deterministisch}\}$ .
- (e)  $\mathcal{W} = \{W = (W_1, \dots, W_T) \in L_r^T : W_t \text{ hängt von } (\xi_0, \dots, \xi_{t-1}) \text{ ab}, t = 1, \dots, T\}$ .
- (f)  $\mathcal{W} = \{W = (W_1, \dots, W_T) \in L_r^T : W_t \text{ hängt von } (\xi_0, \dots, \xi_{t_0}) \text{ ab}, t = t_0, \dots, T\}$   
( $0 \leq t_0 < T$ ).

Die Wahl (a) wurde in [2] verwendet. Beispiele (c) bzw. (d) für  $\mathcal{W}$  wurden in [22, 25] bzw. [14, Definition 4.7] vorgeschlagen. Beispiel (e) entstammt [20, Definition 3.14] und bedeutet, dass ein finanzielles Instrumente  $W$  zu  $\mathcal{W}$  gehört, falls  $W_t$  bereits zum Zeitpunkt  $W_{t-1}$  geplant war. Analog bedeutet Beispiel (f), dass sämtliche finanziellen Instrumente in  $\mathcal{W}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  geplant sein müssen. Für  $t_0 = 0$  entspricht dies dem Fall (b).

Ein positiv homogenes mehrperiodisches Akzeptanzfunktional  $\mathcal{A}$  auf  $L_r^T$  mit  $r \geq 1$  und  $T \geq 1$  erlaubt die folgende *duale Darstellung* [21, Theorem 4]:

$$\mathcal{A}(Y) = \inf_{Z \in L_{r'}^T} \left\{ \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(Y_t Z_t) \mid \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(W_t) = \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(W_t Z_t) \text{ für jedes } W \in \mathcal{W} \right\},$$

wobei  $r' := \frac{r}{r-1}$ . Je nach Wahl von  $\mathcal{W}$  (siehe Beispiel 12.2) beschreibt die Bedingung

$$\sum_{t=1}^T \mathbb{E}(W_t) = \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(W_t Z_t) \text{ für jedes } W \in \mathcal{W},$$

eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von  $L_{r'}^T$ . Für die in Beispiel 12.2 enthaltenen Fälle (a), (b) und (e) erhält man z.B. (a)  $\mathbb{E}(Z_1) = 1$ , (b)  $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ ,  $t = 1, \dots, T$ , (e)  $\mathbb{E}(Z_t | \xi_0, \dots, \xi_{t-1}) = 1$ ,  $t = 1, \dots, T$ .

Nachfolgend geben wir einige Beispiele für ein- und mehrperiodische Akzeptanzfunktionale an.

**Beispiel 12.3.** (einperiodisch)

(i) *Average Value-at-Risk* zu Niveau  $\alpha \in (0, 1]$ : Für  $Y \in L_1^1$  ist

$$\mathbb{AV} @ \mathbb{R}_\alpha(Y) := \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha G_Y^{-1}(u) du = \sup \left\{ x - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}([Y - x]^-) : x \in \mathbb{R} \right\} \quad (12.1)$$

$$= \sup \left\{ v_0 - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(v_{12}) : v_0 \in \mathbb{R}, v_1 \in \mathbb{R}_+^2, v_{11} - v_{12} = Y - v_0 \right\} \quad (12.2)$$

$$= \inf \left\{ \mathbb{E}(YZ) : \mathbb{E}(Z) = 1, 0 \leq Z \leq \frac{1}{\alpha} \right\}, \quad (12.3)$$

wobei  $G_Y$  die Verteilungsfunktion von  $Y$  ist,  $\mathbb{V} @ \mathbb{R}_\alpha(Y) := G_Y^{-1}(\alpha) := \inf \{ y \in \mathbb{R} : G_Y(y) \geq \alpha \}$  und  $[a]^- := -\min\{0, a\}$ . Das Supremum in (12.1) wird in  $\mathbb{V} @ \mathbb{R}_\alpha(Y) = G_Y^{-1}(\alpha)$  angenommen und es gilt  $\mathbb{V} @ \mathbb{R}_\alpha(Y) \geq \mathbb{AV} @ \mathbb{R}_\alpha(Y)$  (vgl. [23], [20, Chapter 2.2.3]). Die Darstellung (12.2) zeigt, dass  $\mathbb{AV} @ \mathbb{R}_\alpha$  Optimalwert eines zweistufigen linearen stochastischen Programms ist und (12.3) ist seine duale Darstellung. Von der Darstellung (12.3) erschließen sich leicht die Eigenschaften (A1)–(A3). Jedoch ist  $\mathbb{V} @ \mathbb{R}_\alpha$  i.a. nicht konkav und  $\mathbb{AV} @ \mathbb{R}_\alpha$  ist die konkave Minorante von  $\mathbb{V} @ \mathbb{R}_\alpha$ .

(ii) *Lower  $r$ -th partial moment corrected expectation* ( $r \geq 1$ ): Für  $Y \in L_r^1$  ist

$$\mathcal{A}(Y) := \mathbb{E}(Y) - \left( \mathbb{E}([Y - \mathbb{E}(Y)]^-)^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (12.4)$$

$$= \inf \left\{ \mathbb{E}(YZ) : Z = 1 + V - \mathbb{E}(V), V \geq 0, \mathbb{E}(|V|^{r'}) \leq 1 \right\} \quad (12.5)$$

ein Akzeptanzfunktional mit dualer Darstellung (12.5), wobei  $r' = \frac{r}{r-1}$  (vgl. [20, Kapitel 2.5.3]). Spezialfälle der lower  $r$ -th partial moments sind für  $r = 1$  die lower mean absolute deviation und für  $r = 2$  die standard lower semi-deviation.

Im mehrperiodischen Fall beschränken wir uns auf Akzeptanzfunktionale, die mittels des (einperiodischen)  $\mathbb{AV}@R_\alpha$  (vgl. Beispiel 12.3(i)) konstruiert sind. Die verwendete Numerierung ist dieselbe wie in [7, 8].

**Beispiel 12.4.** (mehrperiodisch)

Es sei  $\mathcal{T}$  eine Teilmenge von  $\{1, \dots, T\}$  mit  $T \in \mathcal{T}$  und Kardinalität  $|\mathcal{T}|$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  und  $\mathcal{Y} = L_1^T$ .

(i) Für  $Y = (Y_1, \dots, Y_T) \in \mathcal{Y}$  sei

$$\mathcal{A}_1(Y) := \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbb{AV}@R_\alpha \left( \sum_{\tau=1}^t Y_\tau \right).$$

(ii) Für  $Y = (Y_1, \dots, Y_T) \in \mathcal{Y}$  sei

$$\mathcal{A}_4(Y) := \mathbb{AV}@R_\alpha \left( \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{\tau=1}^t Y_\tau \right).$$

(iii) Für  $Y = (Y_1, \dots, Y_T) \in \mathcal{Y}$  definieren wir

$$\mathcal{A}_6(Y) := \mathbb{AV}@R_\alpha \left( \min_{t \in \mathcal{T}} \sum_{\tau=1}^t Y_\tau \right).$$

Alle drei Akzeptanzfunktionale sind  $\mathbb{R} \times \{0\}^{T-1}$ -translations-äquivariant. Im Fall  $\mathcal{T} = \{T\}$  ist  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_6$   $\mathbb{R}^T$ -translations-äquivariant.

Für Beispiele von mehrperiodischen Akzeptanzfunctionalen, die mit Hilfe von bedingten Akzeptanz-Abbildungen konstruiert werden, sei auf [20, 21, 24] verwiesen.

### 12.3 Polyedrische Risikofunktionale

Motiviert durch die Darstellung (12.1) des Average Value-at-Risk als Optimalwert eines zweistufigen linearen stochastischen Optimierungsproblems (vgl. (12.2)), erscheint es als natürliche Idee (mehrperiodische) Akzeptanzfunktionale als Optimalwerte linearer (mehrperiodischer) stochastischer Programme einzuführen [7]. Wir folgen hier der Darstellung in [6, 8] und nennen ein Funktional  $\mathcal{A}$  definiert auf  $\mathcal{Y} = L_r^T$  ( $r \geq 1$ ) *polyedrisch*, falls es die Gestalt

$$\mathcal{A}(Y) = \sup \left\{ \mathbb{E} \left[ \sum_{t \in \{0\} \cup \mathcal{T}} c_t^\top v_t \right] \left| \begin{array}{l} v_t = v_t(\xi_0, \dots, \xi_t), v_t \in V_t \quad (t \in \{0\} \cup \mathcal{T}) \\ \sum_{\tau \in \mathcal{T}, \tau \leq t} B_{t,\tau} v_\tau = r_t \quad (t \in \{0\} \cup \mathcal{T}) \\ \sum_{\tau \in \{0\} \cup \mathcal{T}, \tau \leq t} a_{t,\tau}^\top v_\tau = \sum_{\tau=1}^t Y_\tau \quad (t \in \mathcal{T}) \end{array} \right. \right\} \quad (12.6)$$

für jedes  $Y = (Y_1, \dots, Y_T) \in \mathcal{Y}$  besitzt. Hierbei ist  $\xi = \{\xi_t\}_{t=0}^T$  ein stochastischer Eingangsprozess und  $\mathcal{T}$  eine Teilmenge von  $\{1, \dots, T\}$  mit  $T \in \mathcal{T}$ , wobei  $\mathcal{T}$  eine Selektion von Zeitschritten darstellt, die man bei der Risikomessung berücksichtigen möchte. Überdies bezeichnet  $V_t$  einen polyedrischen Kegel in  $\mathbb{R}^{k_t}$  (z.B.  $I_1 \times \dots \times I_{k_t}$  mit  $I_k$  aus der Menge  $\{\mathbb{R}, [0, +\infty), (-\infty, 0], \{0\}\}$  für jedes  $k = 1, \dots, k_t$ ),  $c_t$  ein Element in

$\mathbb{R}^{k_t}$ ,  $r_t \in \mathbb{R}^{d_t}$ ,  $a_{t,\tau} \in \mathbb{R}^{k_\tau}$ , und  $B_{t,\tau}$  eine  $d_t \times k_\tau$  Matrix für alle  $\tau \in \{0\} \cup \mathcal{T}$ ,  $\tau \leq t$ ,  $t \in \{0\} \cup \mathcal{T}$ . Die Bezeichnung *polyedrisch* spiegelt den Sachverhalt wider, dass im Fall einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $Y$  das Funktional  $\mathcal{A}$  eine stückweise lineare Funktion der endlich vielen Werte von  $Y$  ist.

Ein polyedrisches Funktional  $\mathcal{A}$  erfüllt immer die Bedingung (A2) der Konkavität in Definition 12.1. Damit auch (A1) und (A3) (mit einer geeigneten Menge  $\mathcal{W}$ ) erfüllt werden, müssen die Koeffizienten in (12.6) entsprechend gewählt werden. Beispiele für polyedrische mehrperiodische Akzeptanz- bzw. Risikofunktionale findet man in Beispiel 12.5 und in den Arbeiten [6, 7, 8].

Polyedrische mehrperiodische (Risiko- bzw.) Akzeptanzfunktionale sind in (12.6) eigentlich als Funktionale in Abhängigkeit vom akkumulierten Ertrag  $z_t = \sum_{\tau=1}^t Y_\tau$ ,  $t = 1, \dots, T$ , definiert worden. Dies erweist sich wegen des Vorhandenseins der Menge  $\mathcal{T}$  als geeigneter.

Eine wichtige Eigenschaft polyedrischer Funktionale ist, dass Linearkombinationen von polyedrischen Funktionalen wieder polyedrisch sind (vgl. [6, Proposition 3.2.8]) und dass sich das Funktional

$$\hat{\mathcal{A}}(Y) := \gamma \mathcal{A}(Y) + \sum_{t \in \mathcal{T}} \mu_t \mathbb{E} \left( \sum_{\tau=1}^t Y_\tau \right)$$

mit einem polyedrischen Funktional  $\mathcal{A}$  (mit den Parametern  $c_t, r_t, a_{t,\tau}, B_{t,\tau}$ ,  $t \in \{0\} \cup \mathcal{T}$ ) sowie reellen Zahlen  $\gamma$  und  $\mu_t$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , von  $\mathcal{A}$  nur dadurch unterscheidet, dass die Koeffizienten

$$\hat{c}_0 = \gamma c_0 \quad \text{and} \quad \hat{c}_t := \gamma c_t + \sum_{\tau \in \mathcal{T}, \tau \geq t} \mu_\tau a_{\tau, \tau-t} \quad (t \in \mathcal{T})$$

die  $c_t$ ,  $t \in \{0\} \cup \mathcal{T}$ , in der Zielfunktion von (12.6) ersetzen.

Wir verifizieren nun mit Hilfe der primalen Darstellung (12.2) von  $\mathbb{AV}@\mathbb{R}_\alpha$ , dass die in Beispiel 12.4 enthaltenen Beispiele für mehrperiodische Akzeptanzfunktionale sämtlich polyedrisch sind.

**Beispiel 12.5.** Es sei  $\mathcal{T}$  eine Teilmenge von  $\{1, \dots, T\}$  mit  $T \in \mathcal{T}$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  und  $Y \in L_1^T$ .

(i) Für  $\mathcal{A}_1$  gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(Y) &= \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sup \left\{ v_{0t} - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(v_{t2}) \mid \begin{array}{l} v_{0t} \in \mathbb{R}, v_t \in \mathbb{R}_+^2, t \in \mathcal{T} \\ v_{t1} - v_{t2} = \sum_{\tau=1}^t Y_\tau - v_{0t}, t \in \mathcal{T} \end{array} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{t \in \mathcal{T}} \left( v_{0t} - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(v_{t2}) \right) \mid \begin{array}{l} v_{0t} \in \mathbb{R}, v_t \in \mathbb{R}_+^2, t \in \mathcal{T} \\ v_{t1} - v_{t2} = \sum_{\tau=1}^t Y_\tau - v_{0t}, t \in \mathcal{T} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

(ii) Für  $\mathcal{A}_4$  gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4(Y) &= \sup \left\{ v_0 - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(v_{12}) : v_0 \in \mathbb{R}, v_1 \in \mathbb{R}_+^2, v_{11} - v_{12} = \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{\tau=1}^t Y_\tau - v_0 \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{v_0}{|\mathcal{T}|} - \frac{1}{\alpha |\mathcal{T}|} \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbb{E}(v_{t2}) \mid \begin{array}{l} v_0 \in \mathbb{R}, v_t \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, t < T, v_T \in \mathbb{R}_+^2 \\ v_{t1} - v_{t2} = \sum_{\tau=1}^t Y_\tau - v_{t-1}, t \in \mathcal{T} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

wobei  $t- \in \{0\} \cup \mathcal{T}$  der Vorgänger von  $t \in \mathcal{T}$  ist.

(iii) Für  $\mathcal{A}_6$  gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_6(Y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left( \left[ \min_{t \in \mathcal{T}} \sum_{\tau=1}^t Y_\tau - x \right]^- \right) \right\} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left( \max_{t \in \mathcal{T}} \left\{ 0, x - \sum_{\tau=1}^t Y_\tau \right\} \right) \right\} \\ &= \sup_{v_0 \in \mathbb{R}} \left\{ v_0 - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(\hat{v}_T) : \hat{v}_0 = 0, \hat{v}_t = \max \left\{ \hat{v}_{t-}, v_0 - \sum_{\tau=1}^t Y_\tau \right\}, t \in \mathcal{T} \right\} \\ &= \sup \left\{ v_0 - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(v_{T2}) \left| \begin{array}{l} v_0 \in \mathbb{R}, v_t \in \mathbb{R}_+^3, v_{t2} - v_{t3} - v_{t-,2} = 0, t \in \mathcal{T} \\ v_{12} - v_{13} = 0, v_{t1} - v_{t2} = \sum_{\tau=1}^t Y_\tau - v_0, t \in \mathcal{T} \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Hierbei ist wieder  $t- \in \{0\} \cup \mathcal{T}$  der Vorgänger von  $t \in \mathcal{T}$ .

Die bedeutendste Eigenschaft polyedrischer mehrperiodischer Akzeptanzfunktionale  $\mathcal{A}$  ist, dass sie bei Verwendung in der Zielfunktion eines (gemischt-ganzzahligen) linearen stochastischen Optimierungsproblems die Linearität erhalten. Dies ist im Allgemeinen nicht zu erwarten, da jedes Akzeptanzfunktional notwendigerweise *nichtlinear* ist. Verwendet man z.B. das Akzeptanzfunktional in Beispiel 12.3(ii) mit  $r > 1$ , so entsteht ein nichtlineares stochastisches Programm, das nicht linearisierbar ist. Wir zeigen nun, daß dies für polyedrische  $\mathcal{A}$  anders ist.

Dazu betrachten wir ein mehrstufiges stochastisches Programm der Form

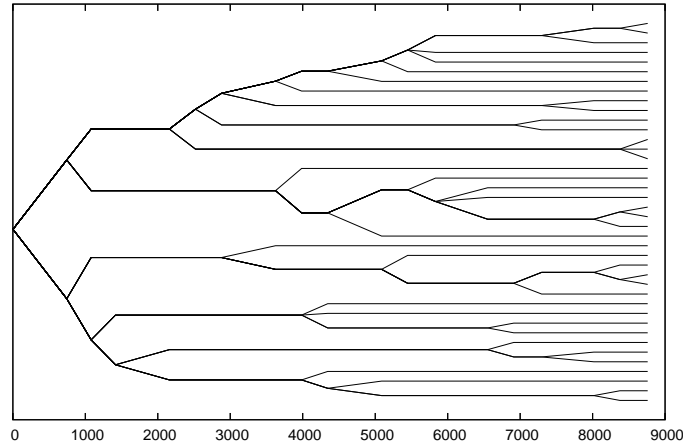
$$\max \left\{ b_0(\xi_0)^\top x_0 + \mathcal{A}(Y) \left| \begin{array}{l} x_t = x_t(\xi_0, \dots, \xi_t), x_t \in X_t, t = 0, \dots, T \\ Y_t = b_t(\xi_t)^\top x_t, \sum_{\tau=0}^t A_{t\tau}(\xi_t) x_{t-\tau} = h_t(\xi_t) \\ t = 1, \dots, T \end{array} \right. \right\}, \quad (12.7)$$

wobei die Teilmengen  $X_t$  von  $\mathbb{R}^{m_t}$  polyedrisch sind (mit Ausnahme von möglichen Ganzzahligkeitsbedingungen),  $Y = (Y_1, \dots, Y_T)$  den Ertragsprozess bezeichnet und die  $b_t(\xi_t)$ ,  $h_t(\xi_t)$  sowie die Matrizen  $A_{t\tau}(\xi_t)$  affine Funktionen von  $\xi_t$  sind, und  $\{\xi_t\}_{t=0}^T$  der stochastische Eingangsprozess ist.

Hat nun  $\mathcal{A}$  die Form (12.6), so ist das Optimierungsproblem (12.7) durch Einführung der zusätzlichen Entscheidungsvariablen  $v_t$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , und zusätzlicher linearer Restriktionen äquivalent zum erweiterten Problem

$$\max \left\{ \mathbb{E} \left( b_0(\xi_0)^\top x_0 + \sum_{t \in \{0\} \cup \mathcal{T}} c_t^\top v_t \right) \left| \begin{array}{l} x_t = x_t(\xi_0, \dots, \xi_t), x_t \in X_t, t = 0, \dots, T \\ v_t = v_t(\xi_1, \dots, \xi_t), v_t \in V_t, t \in \{0\} \cup \mathcal{T} \\ \sum_{\tau \in \{0\} \cup \mathcal{T}, \tau \leq t} B_{t,\tau} v_\tau = r_t, t \in \{0\} \cup \mathcal{T} \\ \sum_{\tau \in \mathcal{T}, \tau \leq t} a_{t,\tau}^\top v_\tau = b_t(\xi_t)^\top x_t, t \in \mathcal{T} \\ \sum_{\tau=0}^t A_{t\tau}(\xi_t) x_{t-\tau} = h_t(\xi_t), t = 1, \dots, T \end{array} \right. \right\}.$$

Äquivalenz bedeutet dabei, dass für jede Lösung  $(x^*, v^*)$  von des letzteren Optimierungsproblems,  $x^*$  Lösung von (12.7) ist und  $\mathcal{A}(Y^*) = c_0^\top v_0^* + \mathbb{E}(\sum_{t \in \mathcal{T}} c_t^\top v_t^*)$  den



**Abbildung 12.1:** Illustration des Szenariobaums mit 40 Szenarien,  $T = 8760$  Zeitintervallen, und etwa 150,000 Knoten (jedes Szenario besitzt einen Knoten in jedem Zeitpunkt)

Akzeptanzwert des optimalen Ertragsprozesses  $Y^* = (b_1(\xi_1)^\top x_1^*, \dots, b_T(\xi_T)^\top x_T^*)$  darstellt.

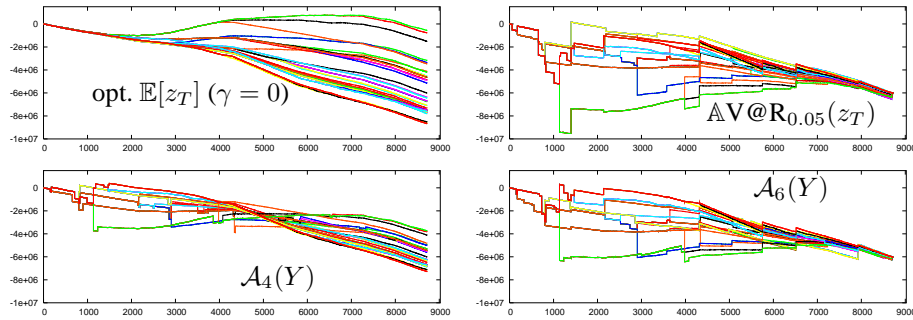
## 12.4 Integriertes Risikomanagement am Beispiel eines kleineren Energieversorgungsunternehmens

Wir betrachten ein kleineres Energieversorgungsunternehmen (z.B. ein Stadtwerk), das auf der Basis einer eigenen Kraft-Wärme-Kopplungsanlage seine Kunden mit Wärme und Elektrizität versorgt. Dabei erfolgt die Wärmeversorgung vollständig aus eigener Produktion, während die Deckung der elektrischen Last nur teilweise aus eigener Erzeugung möglich ist. Überdies erfolgt diese Deckung mittels eines längerfristig vereinbarten Stromlieferungs-Vertrages durch ein größeres Energieversorgungsunternehmen bzw. mittels eigenem Stromhandel am (Day-Ahead) Spotmarkt der European Energy Exchange EEX (in Leipzig). Da ein solcher Handel am Spotmarkt wegen der hochvolatilen Spotpreise risikoreich sein kann, ist zur Absicherung gegen solche Risiken ein Handel mit (an der EEX verfügbaren) derivativen Energieprodukten möglich. Im Folgenden beschränken wir uns bei den Stromderivaten auf Futures, die rein finanzieller Natur sind. Die Aufgabe besteht nun darin, für einen jährlichen Zeithorizont mit stündlicher Diskretisierung, d.h.  $T = 365 \cdot 24 = 8760$ , ein im statistischen Mittel ertragsmaximales Portfolio für das Unternehmen zu bestimmen, das auch das Risiko niedriger Erträge gering hält. Das Portfolio besteht aus der eigenen Stromerzeugung, dem gelieferten Strom, dem (Day-Ahead) Stromhandel an der EEX, und dem Futurehandel. Da das Optimierungsziel bikriteriell ist, wird die Zielfunktion

$$\mathbb{F}(Y_1, \dots, Y_T) := \gamma \mathcal{A}(Y_1, \dots, Y_T) + (1 - \gamma) \mathbb{E} \left( \sum_{t=1}^T Y_t \right) \quad (12.8)$$

maximiert, wobei  $\gamma \in [0, 1]$  ein Risikoaversionsparameter ist und  $Y = \{Y_t\}_{t=1}^T$  der sto-



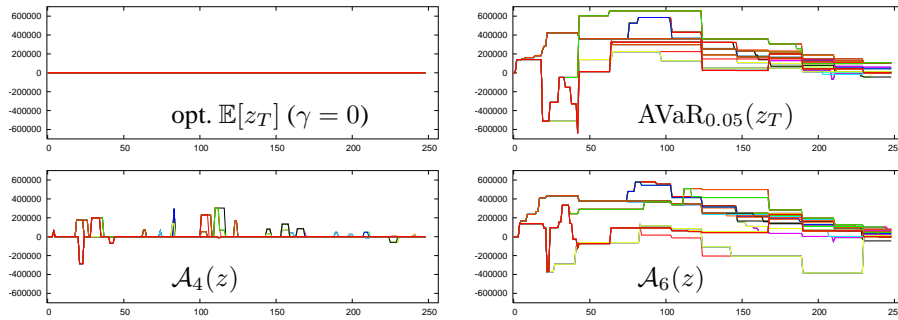


**Abbildung 12.2:** Optimaler akkumulierter Ertrag  $z_t = \sum_{\tau=1}^t Y_\tau$ ,  $t = 1, \dots, T$ , für verschiedene Akzeptanzfunktionale. Jede Kurve repräsentiert eines der 40 Szenarien.

chastische Ertragsprozess. Diese sog. *mean-risk* Zielfunktion erlaubt für  $\gamma \in (0, 1)$  die gleichzeitige Maximierung des erwarteten Gesamtertrags und der Akzeptanz des zugehörigen Portfolios (d.h. der Minimierung des Risikos des Portfolios).

Das Optimierungsmodell wird detailliert in [9, 10] beschrieben. Hinsichtlich des Spot Handels enthält das Modell alle wesentlichen Handelsregeln der EEX für das preisunabhängige Bieten im geschlossenen Auktionshandel. Dies betrifft insbesondere die genaue Abbildung der zeitlichen Fristen für die Gebotsabgabe mit Day-Ahead-Charakter sowie die Erfassung der Transaktionskosten. Beim Futurehandel beschränkt sich das Modell auf Monats-Futures der Lasttypen Base und Peak. Es wird vereinfachend angenommen, dass diese Produkte bis zu einem Jahr im voraus gehandelt werden können. Eine Änderung des Futurebestandes wird einmal pro Handelstag (d.h. etwa 250 Handelstage im Jahr) ermöglicht. Beim Futurehandel werden die verschiedenen finanziellen Transaktionen berücksichtigt: Hinterlegung von Sicherheiten bei Eröffnung, täglicher Gewinn- und Verlustausgleich, Transaktionskosten.

Die unsicheren Parameter des Optimierungsmodells werden als trivariater stochastischer Prozess bestehend aus stündlichen Werten für die elektrische Last, die thermische Last und die Spotpreise angesehen. Die Futurepreise zu einem Zeitpunkt  $t$  werden auf Basis der Spotpreise als *faire Preise*, d.h. als bedingte Erwartung der Spotpreise in der Lieferperiode bzgl. der bei  $t$  verfügbaren Information, festgelegt. Die Anpassung statistischer Modelle zur Beschreibung des trivariaten Prozesses erfolgte auf der Grundlage verfügbarer historischer Daten. Hierbei wurde die Modellierung der Tagesmittelwerte vom innertäglichen Verhalten entkoppelt. Ähnlich wie in [18] wird für die tagesmittleren Daten eine deterministische Komponente zur Abbildung des langfristigen Trends sowie der periodischen Anteile und eine stochastische Komponente bestimmt. Für letztere wurde ein trivariates ARMA-Modell angepasst, vgl. [9] für eine detailliertere Darstellung. Von diesem ARMA-Modell wurden eine geeignete Anzahl von dreidimensionalen Szenarien simuliert, zu denen anschließend die deterministische Komponente und die durch Cluster-Analyse angepassten Innertages-Profile aufaddiert wurden. Ausgehend von solchen Szenarien wurden mit der in [16] (vgl. auch [15]) entwickelten Methodik dreidimensionale Szenariobäume generiert, die zur approximativen Darstellung des Eingangsprozesses  $\xi$  verwendet werden. Bei der Baumgenerierung wird gleichzeitig eine Anzahl von Szenarien reduziert, um die Dimension des entstehenden linearen Optimierungsproblems zu begrenzen und damit die Rechenzeiten zu dessen Lösung in einer vernünftigen



**Abbildung 12.3:** Optimaler Bestand an Futures im Zeithorizont  $\{1, \dots, T\}$  für verschiedene Akzeptanzfunktionale.

Größenordnung zu halten.

Für die konkreten numerischen Simulationen wurde ein trivariater Szenariobaum mit 40 Szenarien zur approximativen Darstellung von  $\xi$  erzeugt, bei dem nur monatliche Verzweigungen zugelassen wurden. Dieser wird in Abbildung 12.1 illustriert. Für die mean-risk Zielfunktion (12.8) wurde der Risikoaversionsparameter  $\gamma = 0,9$  gewählt und nacheinander die Akzeptanzfunktionale aus Beispiel 12.5 mit  $\alpha = 0.05$  verwendet, wobei für  $\mathcal{A}_1$  als Menge  $\mathcal{T} = \{T\}$  und für  $\mathcal{A}_4$  bzw.  $\mathcal{A}_6$  als Menge  $\mathcal{T} = \{t_j : j = 1, \dots, 52\}$  genutzt wird, wobei die  $t_j$  der Zeit 23 Uhr am letzten Handelstag jeder Woche des Jahres entsprechen.

Da die Modellierung der Kraft-Wärme-Kopplungsanlage ohne Verwendung von 0-1 Variablen erfolgte, erweist sich das resultierende Optimierungsproblem als lineares Programm (LP) mit etwa  $10^6$  Zeilen und Spalten. Es wurde mit ILOG CPLEX 9.1 in etwa einer Stunde Rechenzeit auf einem 2 GHz Linux PC mit 1 GB RAM gelöst.

Abbildung 12.2 illustriert den optimalen akkumulierten Ertrag  $z_t := \sum_{\tau=1}^t Y_\tau$  in jedem Zeitpunkt  $t = 1, \dots, T$  und für jedes Szenario bzw. jedes verwendete Akzeptanzfunktional. Die Bilder zeigen recht unterschiedlich geformte Szenarioebenen für den akkumulierten Ertrag. Die Unterschiede beruhen auf verschiedenen Strategien für den Future-Handel, d.h. auf verschiedenen Risikoabsicherungsstrategien, die von den Akzeptanz-Funktionalen induziert werden. Im Fall  $\gamma = 0$ , d.h. ohne Risikoabsicherung, wird eine große Streuung von  $z_T$ , und damit eine relativ große Wahrscheinlichkeit für niedrige Erträge deutlich. Für das Akzeptanzfunktional  $\mathcal{A}_1$  mit  $\mathcal{T} = \{T\}$ , d.h.  $\mathcal{A}_1(Y) = \mathbb{AV}@R_{0.05}(z_T)$ , ist die Streuung von  $z_T$  klein, aber sehr kleine Werte von  $z_t$  nebst großer Streuung für kleines  $t$  sind möglich. Dies deutet darauf hin, dass einperiodische Akzeptanz- bzw. Risikofunktionale für die Risikoabsicherung in solchen Modellen nur eingeschränkt geeignet sind. Bei den mehrperiodischen Akzeptanzfunktionalen  $\mathcal{A}_4$  bzw.  $\mathcal{A}_6$  führen die Absicherungsstrategien dazu, dass die Streuung von  $z_t$  über dem gesamten Zeithorizont relativ klein bleibt. Interessanterweise gelingt dies im Fall von  $\mathcal{A}_4$  mit einem Future-Handel moderaten Umfangs, im Vergleich zum exzessiven Future-Handel bei  $\mathbb{AV}@R_{0.05}$  und  $\mathcal{A}_6$  (vgl. Abbildung 12.3). Beide Akzeptanzfunktionale  $\mathcal{A}_4$  und  $\mathcal{A}_6$  sind auf die Futures als finanzielle Instrumente zugeschnitten, da beide  $\mathcal{W} = \mathbb{R} \times \{0\}^{T-1}$ -translations-äquivalent sind, und die Futures in der Tat zum ersten Zeitpunkt in  $\mathcal{T}$  handelbar sind. Das Funktional  $\mathbb{AV}@R_{0.05}$  ist jedoch  $\mathbb{R}^T$ -translations-äquivalent und folglich wird es als gleichwertig betrachtet ganz am Anfang

oder zu einem späteren Zeitpunkt ein finanzielles Instrument einzusetzen. Für  $\gamma = 0$  wird wegen der erhobenen Transaktionskosten kein Future-Handel realisiert.

Für das Funktional  $\mathcal{A}_6$  wurde noch die Abhängigkeit der Ergebnisse vom Parameter  $\gamma \in [0, 1]$  untersucht (vgl. nachfolgende Tabelle). Dabei zeigt sich, dass die Resultate für  $\gamma \in [0.15, 0.95]$  identisch sind.

| $\gamma$           | $\rho_6(Y^*) = -\mathcal{A}_6(Y^*)$ | $\mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^T Y_t^*\right)$ |
|--------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------|
| 5.000000000000e-04 | 4.702811848065e+06                  | -2.877230530260e+06                         |
| 1.000000000000e-03 | 4.374541317978e+06                  | -2.877465216029e+06                         |
| 2.000000000000e-03 | 4.351171030788e+06                  | -2.877491632750e+06                         |
| 3.000000000000e-03 | 4.344098951661e+06                  | -2.877507683071e+06                         |
| 4.000000000000e-03 | 4.344098951661e+06                  | -2.877507683071e+06                         |
| 5.000000000000e-03 | 4.323657436401e+06                  | -2.877601246036e+06                         |
| 6.000000000000e-03 | 4.268097050724e+06                  | -2.877925822310e+06                         |
| 7.000000000000e-03 | 4.160262308909e+06                  | -2.878617331737e+06                         |
| 8.000000000000e-03 | 3.947240133128e+06                  | -2.880298275881e+06                         |
| 9.000000000000e-03 | 3.780867553726e+06                  | -2.881767795158e+06                         |
| 1.000000000000e-02 | 3.567995960437e+06                  | -2.883774406315e+06                         |
| 2.000000000000e-02 | 3.172449940047e+06                  | -2.889472010420e+06                         |
| 3.000000000000e-02 | 3.038501183774e+06                  | -2.892650974281e+06                         |
| 4.000000000000e-02 | 3.020970182403e+06                  | -2.893311061998e+06                         |
| 5.000000000000e-02 | 3.001973006480e+06                  | -2.894160037393e+06                         |
| 6.000000000000e-02 | 2.996151299394e+06                  | -2.894502042746e+06                         |
| 7.000000000000e-02 | 2.992169811757e+06                  | -2.894783498866e+06                         |
| 1.000000000000e-01 | 2.990833381773e+06                  | -2.894890967278e+06                         |
| 1.500000000000e-01 | 2.990664257637e+06                  | -2.894919429755e+06                         |
| 2.000000000000e-01 | 2.990664257637e+06                  | -2.894919429755e+06                         |
| ⋮                  | ⋮                                   | ⋮                                           |
| 9.000000000000e-01 | 2.990664257637e+06                  | -2.894919429755e+06                         |
| 9.500000000000e-01 | 2.990664257637e+06                  | -2.894919429755e+06                         |
| 9.900000000000e-01 | 2.990664257637e+06                  | -2.894919431317e+06                         |
| 9.990000000000e-01 | 2.990664257637e+06                  | -2.895039700908e+06                         |
| 9.999000000000e-01 | 2.990664257637e+06                  | -2.895212797595e+06                         |

Abbildung 12.4 illustriert für  $\mathcal{A}_6$  die *efficient frontier*, d.h. die Funktion

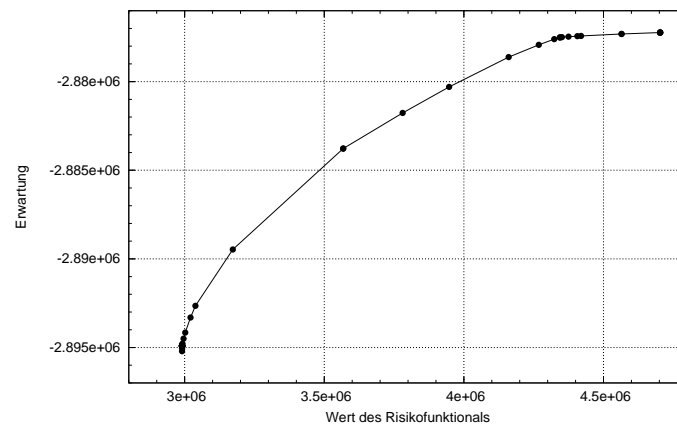
$$\gamma \mapsto \left( -\mathcal{A}_6(Y^*), \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^T Y_t^*\right) \right),$$

wobei  $Y^* = Y_\gamma^*$  die optimale Lösung des Modells für Risikoaversionsparameter  $\gamma \in [0, 1]$  ist.

Die Reduzierung des Risikos im Sinne der Akzeptanzfunktionale  $\mathcal{A}_4$  und  $\mathcal{A}_6$  führt zu einer Verringerung des zu erwartenden Gesamtertrages. Bemerkenswert ist, dass diese Reduzierung weniger als 1% des erwarteten Ertrages  $\mathbb{E}(\sum_{t=1}^T Y_t)$  für  $\gamma = 0$  beträgt.

## Literatur

- [1] ARTZNER, P. ; DELBAEN, F. ; EBER, J.-M. ; HEATH, D.: Coherent measures of risk. In: *Mathematical Finance* 9 (1999), S. 203–228



**Abbildung 12.4:** Illustration der efficient frontier für variierendes  $\gamma \in [0, 1]$

- [2] ARTZNER, P ; DELBAEN, F ; EBER, J.-M. ; HEATH, D. ; KU, H.: Coherent multiperiod risk adjusted values and Bellman's principle. In: *Annals of Operations Research* 152 (2007), S. 5–22
- [3] BLAESIG, B.: *Aachener Beiträge zur Energieversorgung*. Bd. 113: *Risikomanagement in der Stromerzeugungs- und Handelsplanung*. Aachen, Germany : Klinkenberg, 2007. – PhD Thesis
- [4] BLAESIG, B. ; HAUBRICH, H.-J.: Methods of risk management in the generation and trading planning. In: *IEEE St. Petersburg PowerTech Proceedings*, 2005
- [5] BURGER, M. ; GRAEBER, B. ; SCHINDLMAYR, G.: *Managing energy risk*. Chichester : Wiley, 2007
- [6] EICHHORN, A.: *Stochastic Programming Recourse Models: Approximation, Risk Aversion, Applications in Energy*, Department of Mathematics, Humboldt-University Berlin, Diss., 2007
- [7] EICHHORN, A. ; RÖMISCH, W.: Polyhedral risk measures in stochastic programming. In: *SIAM Journal on Optimization* 16 (2005), S. 69–95
- [8] EICHHORN, A. ; RÖMISCH, W.: Dynamic risk management in electricity portfolio optimization via polyhedral risk functionals. In: *Proceedings of 2008 IEEE PES General Meeting, Pittsburgh (USA)*, 2008
- [9] EICHHORN, A. ; RÖMISCH, W. ; WEGNER, I.: Mean-risk optimization of electricity portfolios using multiperiod polyhedral risk measures. In: *IEEE St. Petersburg PowerTech Proceedings*, 2005
- [10] EICHHORN, A. ; RÖMISCH, W. ; WEGNER-SPECHT, I.: Simultane Optimierung von Risiko und Ertrag am Beispiel eines Strombeschaffungsportfolios eines kleineren Marktteilnehmers. In: *Optimierung in der Energiewirtschaft* Bd. 1908. Düsseldorf : VDI, 2005, S. 41–52

- [11] FÖLLMER, H. ; SCHIED, A.: Convex measures of risk and trading constraints. In: *Finance and Stochastics* 6 (2002), S. 429–447
- [12] FÖLLMER, H. ; SCHIED, A.: *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*. 2nd. Berlin : Walter de Gruyter, 2004
- [13] FRITTELLI, M. ; ROSAZZA GIANIN, E.: Putting order in risk measures. In: *Journal of Banking & Finance* 26 (2002), S. 1473–1486
- [14] FRITTELLI, M. ; SCANDOLO, G.: Risk measures and capital requirements for processes. In: *Mathematical Finance* 16 (2006), S. 589–612
- [15] HEITSCH, H. ; HENRION, R. ; KÜCHLER, C. ; RÖMISCH, W.: Generierung von Szenariobäumen und Szenarioreduktion für stochastische Optimierungsprobleme in der Energiewirtschaft. In: SCHULTZ, R. (Hrsg.) ; WAGNER, H.-J. (Hrsg.): *Innovative Modellierung und Optimierung*. LIT Verlag, 2008. – Kapitel 11
- [16] HEITSCH, H. ; RÖMISCH, W.: Scenario tree modeling for multistage stochastic programs. In: *Mathematical Programming*, to appear (2008)
- [17] JORION, P.: *VaR: the new benchmark for managing financial risk*. New York : McGraw Hill, 2000
- [18] LUCIA, J. J. ; SCHWARTZ, E. S.: Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange. In: *Review of Derivatives Research* 5 (2002), S. 5–50
- [19] MARKOWITZ, H.: Portfolio Selection. In: *Journal of Finance* 7 (1952), S. 77–91
- [20] PFLUG, G. C. ; RÖMISCH, W.: *Modeling, Measuring, and Managing Risk*. Singapore : World Scientific, 2007
- [21] PFLUG, G. C. ; RÖMISCH, W.: Multi-period risk functionals. In: *DFG Forschungszentrum MATHEON Berlin, Preprint* 511 (2008)
- [22] RIEDEL, F.: Dynamic Coherent Risk Measures. In: *Stochastic Processes and their Applications* 112 (2004), S. 185–200
- [23] ROCKAFELLAR, R. T. ; URYASEV, S.: Conditional value-at-risk for general loss distributions. In: *Journal of Banking & Finance* 26 (2002), S. 1443–1471
- [24] RUSZCZYŃSKI, A. ; SHAPIRO, A.: Conditional risk mappings. In: *Mathematics of Operations Research* 31 (2006), S. 544–561
- [25] WEBER, S.: Distribution-invariant risk measures, information, and dynamic consistency. In: *Mathematical Finance* 16 (2006), S. 419–442