

Risikomodelle als Basis für ein effizientes Markt-Risikomanagement

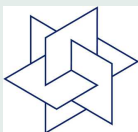
W. Römisch

Humboldt-Universität Berlin

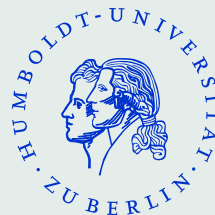
Institut für Mathematik

<http://www.math.hu-berlin.de/~romisch>

A. Eichhorn (Verbund, Wien), G. Ch. Pflug (Univ. Wien)



DFG Research Center MATHEON
Mathematics for key technologies



Workshop *Risikomodellierung und -management in der Energiebranche*,
Leipzig, 27. September 2013

Einleitung

- Energiewirtschaftliche Modelle enthalten oft **unsichere Parameter (Marktpreise, Zuflüsse, Wind, Last)**, für die (statistische) Daten und Modelle existieren.
- Wir betrachten hier **kleinere Marktteilnehmer**, da ihre Entscheidungen die Preise am Strommarkt nicht bzw. kaum beeinflussen.
- Für das Risikomanagement müssen die **unsicheren Parameter und ihr Einfluss auf das eigene System modelliert** werden.
- Die unsicheren Parameter werden durch eine **endliche Anzahl von Szenarien mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten (in Form eines Szenariobaumes)** dargestellt.
- Nach geeigneter Spezifizierung der Messung des (Gewinn-) Risikos kann eine **gleichzeitige Maximierung des erwarteten Gewinns und Minimierung des Risikos** erfolgen.

Ziel: Risiko-Modellierung und -Minimierung

Zeithorizont: $t = 0, 1, \dots, T$.

Zufälliger Prozess: $\xi_t, t = 0, 1, \dots, T$.

Energiewirtschaftliche Entscheidungen: $x_t, t = 0, 1, \dots, T$.

Gewinn bis zum Zeitpunkt t : $G_t(x_0, \dots, x_t)$.

Gesamtgewinn: $G = G_T(x)$ ist eine Zufallsvariable, die wesentlich von x abhängt.

Insbesondere kann G eine **große Streuung** besitzen und die Wahrscheinlichkeit, dass G kleiner als 80% seines Erwartungswertes ist, d.h.

$$\mathbb{P}(G < \frac{4}{5}\mathbb{E}(G)),$$

kann **groß** sein.

Deshalb ist eine nur auf die Maximierung des erwarteten Gesamtgewinns orientierte Entscheidung **ungeeignet**.

In frühen Portfoliomodellen wurde deshalb die (untere Semi-) Varianz **gleichzeitig minimiert** (Markowitz 1952).

Risikomaße

Ein Risikomaß bzw. Risikofunktional ρ ordnet jeder Zufallsgröße Y aus einem linearen Raum \mathcal{Y} eine reelle Zahl zu.

Risikomaße ρ sollten folgende Axiome erfüllen (Y, \tilde{Y} in \mathcal{Y} , r reelle Zahl, $0 \leq \lambda \leq 1$):

(A1) $\rho(Y) \geq \rho(\tilde{Y})$ falls $Y \leq \tilde{Y}$ (Monotonie),

(A2) $\rho(\lambda Y + (1 - \lambda)\tilde{Y}) \leq \lambda\rho(Y) + (1 - \lambda)\rho(\tilde{Y})$ (Konvexität),

(A3) $\rho(Y + r) = \rho(Y) - r$ (Translations-Antivarianz),

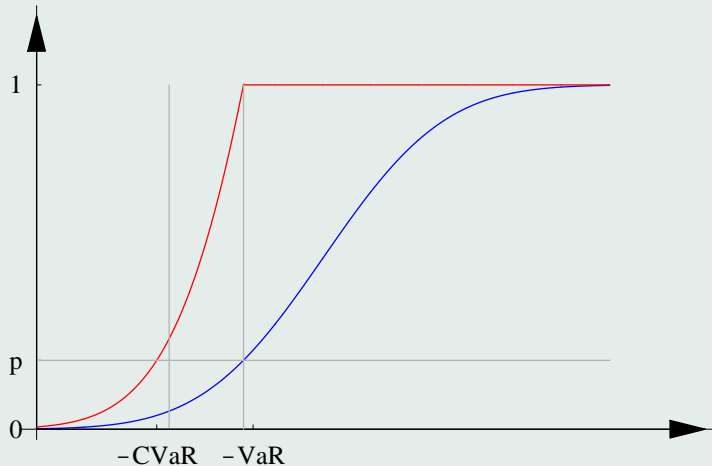
Ein Risikofunktional ρ heißt kohärent, falls zusätzlich $\rho(\lambda Y) = \lambda\rho(Y)$ für alle $\lambda \geq 0$ und alle $Y \in \mathcal{Y}$ gilt.

Beispiele:

(a) (Conditional oder) Average Value-at-Risk $\Delta\text{V@R}_p$:

$$\begin{aligned}\Delta\text{V@R}_p(Y) &:= \frac{1}{p} \int_0^p \text{V@R}_u(Y)(u) du \\ &= \inf \left\{ x + \frac{1}{p} \mathbb{E}([Y + x]^-) : x \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

wobei $p \in (0, 1]$, $[a]^- := -\min\{0, a\}$ und $\text{V@R}_p := -\inf\{y \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y \leq y) > p\}$ ist der Value-at-Risk.



(b) untere Standardabweichung:

$$\rho(Y) := -\mathbb{E}(Y) + (\mathbb{E}([Y - \mathbb{E}(Y)]^-)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Literatur: Markowitz 52

(c) Untere erwartete Abweichung der Ordnung k :

$$\rho(Y) := -\mathbb{E}(Y) + \gamma(\mathbb{E}([Y - \mathbb{E}(Y)]^-)^k)^{\frac{1}{k}} \quad (k \in \mathbb{N}, \gamma \in [0, 1])$$

Literatur: Ogryczak-Ruszczynski 01

(d) Entropisches Risikomaß:

$$\rho(Y) := \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}(\exp(-\gamma Y)) \quad (\gamma > 0)$$

Literatur: Föllmer-Schied 02

Bedingte Risikomaße:

Ersetze die Erwartung \mathbb{E} in den obigen Darstellungen durch die **bedingte Erwartung** (bzgl. einer anderen Zufallsgröße).

Mehrperiodische Risikomaße

Wir betrachten nun einen Zufallsvektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_T)$ mit zugehöriger Filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t=1}^T$, wobei \mathcal{F}_t die erreichbare Information zum Zeitpunkt t modelliert und $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_t) \subseteq \mathcal{F}_t$ gilt, und einen linearen Raum \mathcal{Y} von Zufallsvektoren mit T Komponenten.

Ein **mehrperiodisches Risikomaß** ρ ordnet nun $Y \in \mathcal{Y}$ und der Filtration \mathcal{F} eine reelle Zahl zu, die die Eigenschaften erfüllt:

(A1) $\rho(Y_1, \dots, Y_T; \mathcal{F}) \geq \rho(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_T; \mathcal{F})$ falls $Y_t \leq \tilde{Y}_t$, für alle t (**Monotonie**),

(A2) $\rho(\cdot; \mathcal{F})$ ist konvex auf \mathcal{Y} (**Konvexität**),

(A3) $\rho(Y_1+W_1, \dots, Y_T+W_T; \mathcal{F}) = -\sum_{t=1}^T \mathbb{E}(W_t) + \rho(Y_1, \dots, Y_T; \mathcal{F})$ für alle W , die zu einer geeigneten konvexen Teilmenge $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{F})$ von \mathcal{Y} gehören (**\mathcal{W} -Translations-Antivarianz**).

Die Menge \mathcal{W} hängt dabei von den verfügbaren Instrumenten zur Risikoabsicherung ab.

References: Artzner-Delbaen-Eber-Heath-Ku 07, Frittelli-Scandolo 06, Pflug-Römisch 07

Beispiele: (für die Menge \mathcal{W})

(a) $\mathcal{W} = \{(r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^T : r \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}^{T-1}$

(Artzner-Delbaen-Eber-Heath-Ku 07).

(b) $\mathcal{W} = \{W = (W_1, \dots, W_T) : \sum_{t=1}^T W_t \text{ ist determiniert}\}.$

(Frittelli-Scandolo 06).

(c) $\mathcal{W} = \{W = (W_1, \dots, W_T) : W_t \text{ ist messbar bzgl. } \mathcal{F}_{t-1}\}$

(Pflug-Ruszczynski 04).

Mögliche weitere **Eigenschaften**:

- $\rho(Y; \mathcal{F}) \geq \rho(Y; \mathcal{F}')$ falls $Y \in \mathcal{Y}$ und $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}'_t$, $t = 1, \dots, T$
(**Informations-Monotonie**).
- **Zeitkonsistenz** dynamischer Risiko-Maße.

Polyedrische Risikomaße:

Mehrperiodische Risikomaße heißen **polyedrisch** falls sie als **Optimalwert eines linearen stochastischen Optimierungsproblems** dargestellt werden können. folglich erhalten sie **lineare Strukturen** obwohl Risikomaße naturgemäß **nichtlinear** sein sollten.

(Eichhorn-Römisch 05, Guigues-Römisch 12)

Beispiele:

(a) Erwartung des **akkumulierten Einkommens** $\sum_{\tau=1}^t Y_\tau$ an den Zeitpunkten $t_j, j = 1, \dots, J$, with $t_J = T$ der Risikomessung:

$$\rho(Y; \mathcal{F}) := - \sum_{j=1}^J \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^{t_j} Y_t \right)$$

(b) Gemittelte Summe von Average Value-at-Risk's des akkumulierten Einkommens:

$$\rho_s(Y; \mathcal{F}) := \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbb{AV@R}_\alpha \left(\sum_{t=1}^{t_j} Y_t \right)$$

(c) Kompositionen von bedingten Average Value-at-Risk's des Gewinns:

$$\rho(Y; \mathcal{F}) := \mathbb{AV@R}_\alpha(\cdot | \mathcal{F}_0) \circ \dots \circ \mathbb{AV@R}_\alpha(\cdot | \mathcal{F}_{t_{J-1}}) \left(\sum_{t=1}^T Y_t \right)$$

wobei $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Ist nicht informationsmonoton und nicht polyedrisch, aber zeitkonsistent.

(d) Summe von bedingten Average Value-at-Risk's des akkumulierten Einkommens:

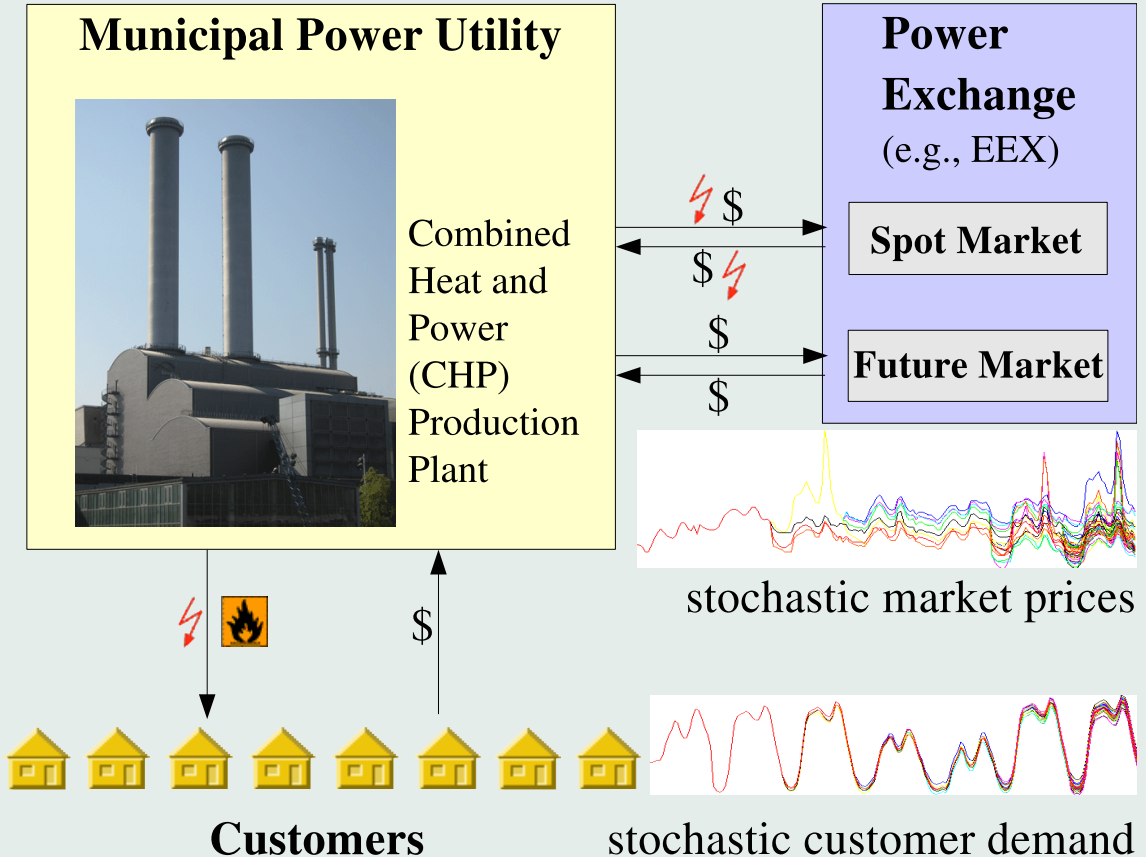
$$\rho(Y; \mathcal{F}) := \sum_{j=1}^J \mathbb{E} \left(\mathbb{AV@R}_\alpha \left(\sum_{t=1}^{t_j} Y_t | \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right)$$

(e) Average Value-at-Risk des minimalen akkumulierten Einkommens:

$$\rho_m(Y; \mathcal{F}) := \mathbb{AV@R}_\alpha \left(\min_{j=1, \dots, J} \sum_{t=1}^{t_j} Y_t \right)$$

Beispiele (a), (b), (e) sind **mehrperiodische polyedrische Risikomaße** und erfüllen (A3) mit $\mathcal{W} = \mathbb{R} \times \{0\}^{J-1}$ und (d) ist ebenfalls polyedrisch.

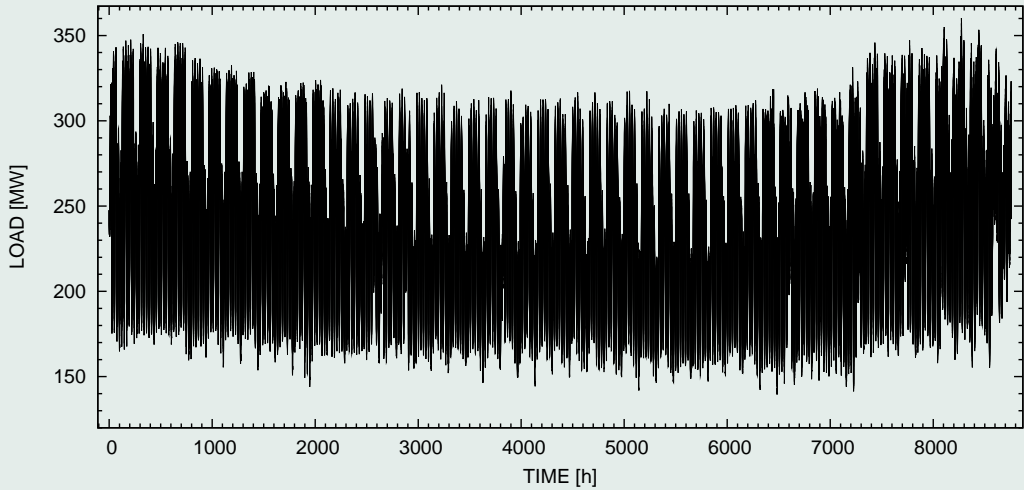
Mean-Risk Strom Portfolio Management



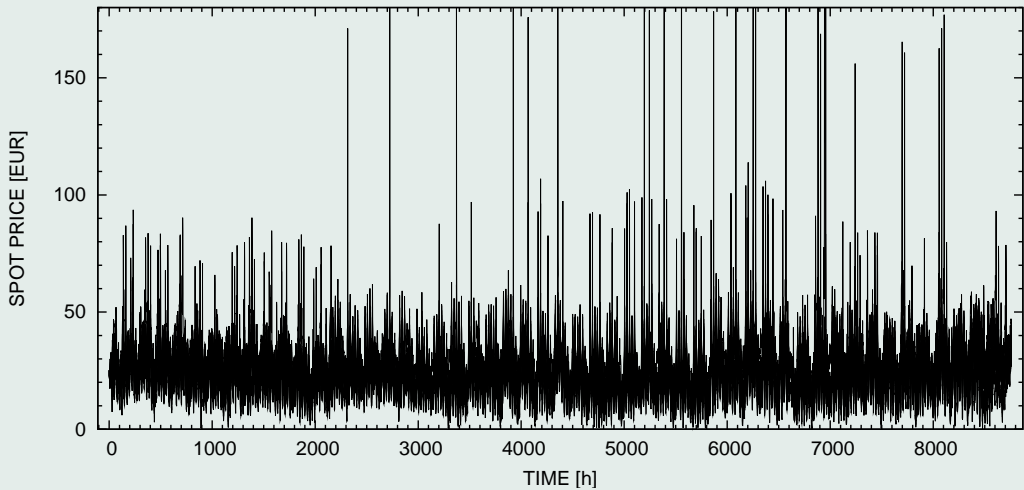
Wir betrachten das **Strom Portfolio Management** eines **Stadtwerkes**, dessen Portfolio sich aus folgenden Bestandteilen zusammensetzt:

- **Stromproduktion** (mit Hilfe von eigenen thermischen Anlagen),
- **bilaterale Verträgen**,
- (physisch) **(day-ahead) Spotmarkt-Handel**,
- (monetär) **Handel mit Strom-Futures**.

Der **Zeithorizont** von einem Jahr wird in **stündliche Intervalle** unterteilt. Der stochastische Prozess besteht aus den Komponenten **Strom-Last**, **Wärme-Last**, **Spotpreise** und **Future-Preise** und ist **multivariat**, d.h., es existieren vielfältige statistische Abhängigkeiten. Der stochastische Prozess wird approximativ durch eine endliche Anzahl von Szenarien dargestellt. Das Ziel besteht in der **Maximierung des erwarteten Gewinns** und der **gleichzeitigen Minimierung des Risikos**. Dabei werden der Einfachheit halber An-Aus Entscheidungen der thermischen Einheiten vernachlässigt. Dann stellt das **Strom Portfolio Management Modell** ein sehr großes lineares Optimierungsproblem dar.



Stromlast-Profil für 1 Jahr

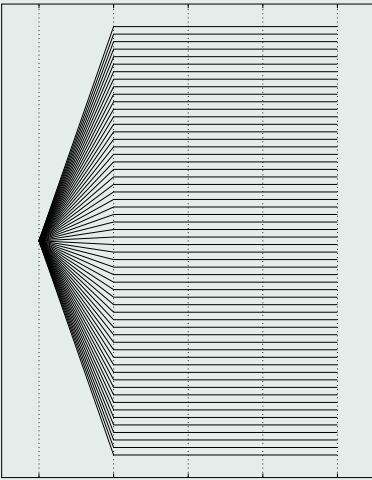


Spotpreis-Profil für 1 Jahr

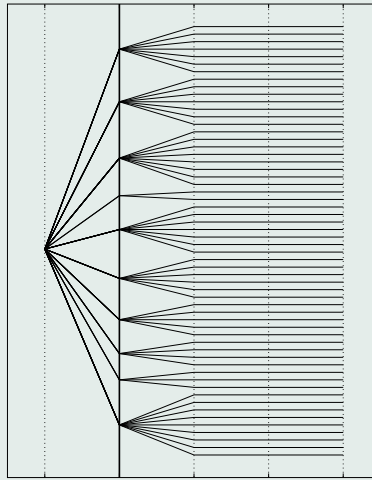
Portfolio Management: Statistische Modelle und Szenarien

Für den **stochastischen Eingangsprozess** ξ wird ein statistisches Modell angepasst und mit historischen Daten kalibriert. Es besteht aus:

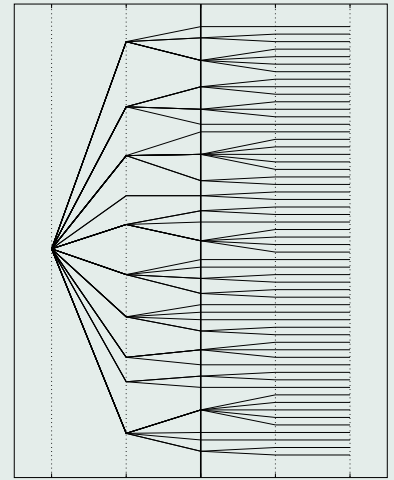
- **Cluster Klassifikation** für den Innertages-Bereich von Last und Preisen,
- einem **3-dimensionalen Zeitreihenmodell** für die Tagesmittelwerte (determinierte Trendfunktion, trivariates ARMA Modell für die stationären Residuen,
- **Erzeugung einer größeren Zahl von 3-dimensionalen Realisierungen (Szenarien)** zunächst vom ARMA-Modell (mit 365 Zeitkomponenten) (mittels Monte Carlo oder (vorzugsweise) Quasi-Monte Carlo Methoden), dann durch addieren der Trendfunktion und der passenden Innertagsprofile (zu Szenarien mit 8760 Zeitkomponenten),
- **Erzeugung von Szenariobäumen** mit der Methodik von (Heitsch-Römisch 09).



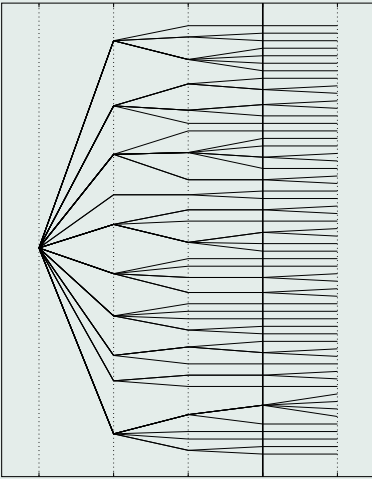
$t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=4$ $t=5$



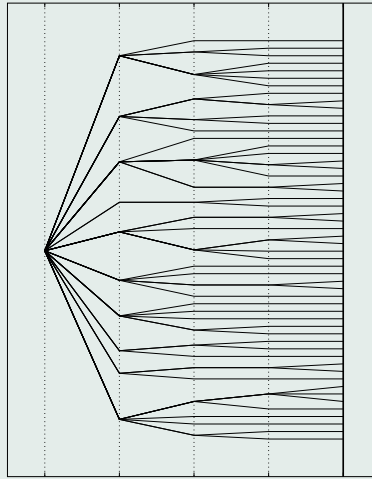
$t=1$ **$t=2$** $t=3$ $t=4$ $t=5$



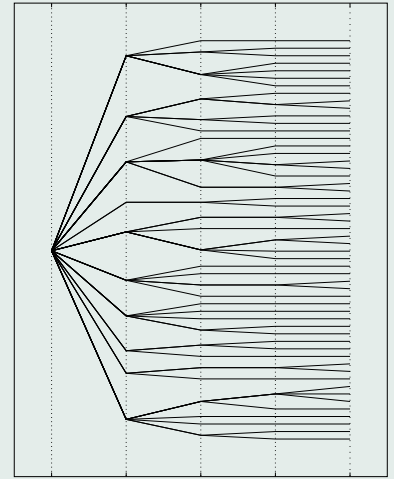
$t=1$ $t=2$ **$t=3$** $t=4$ $t=5$



$t=1$ $t=2$ $t=3$ **$t=4$** $t=5$



$t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=4$ **$t=5$**



$t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=4$ $t=5$

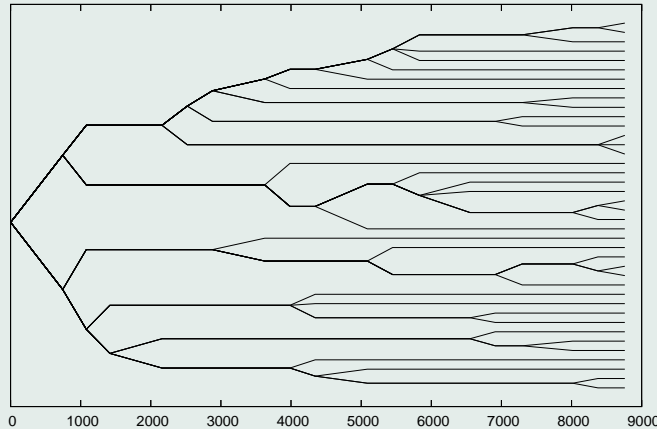
Illustration der schrittweisen Erzeugung der Szenariobäume

Strom Portfolio Management: Ergebnisse

Numerische Ergebnisse wurden durch Lösung des linearen Optimierungsproblems mit $T = 365 \cdot 24 = 8760$ Zeitschritte, einem Szenariobaum mit 40 Last-Preis Szenarien, monatlichen Verzweigungen und etwa 150.000 Knoten (siehe unten). Die Zielfunktion besitzt die Form

$$\text{Minimize } \gamma \rho(Y) - (1 - \gamma) \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T Y_t \right)$$

mit dem Einkommensprozeß $(Y_t)_{t=1}^T$, einem mehrperiodischen Risikomaß ρ mit (Risiko-Aversions-) Parameter $\gamma \in [0, 1]$ ($\gamma = 0$ entspricht dem risiko-neutralen Fall).



Ein- und mehrperiodische Risikomaße werden für das **akkumulierte Einkommen** in $t = T$ bzw. in den **Zeitpunkten** $t_j, j = 1, \dots, J = 52$, der Risiko-Messung ausgewertet. Der exakte Zeitpunkt ist 23 Uhr am letzten Handelstag einer Woche.

Es zeigt sich, dass die Ergebnisse für **den mittleren maximalen Gewinn und das minimale Risiko**

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^T Y_t^{*\gamma}\right) \quad \text{und} \quad \rho(Y_{t_1}^{*\gamma}, \dots, Y_{t_J}^{*\gamma})$$

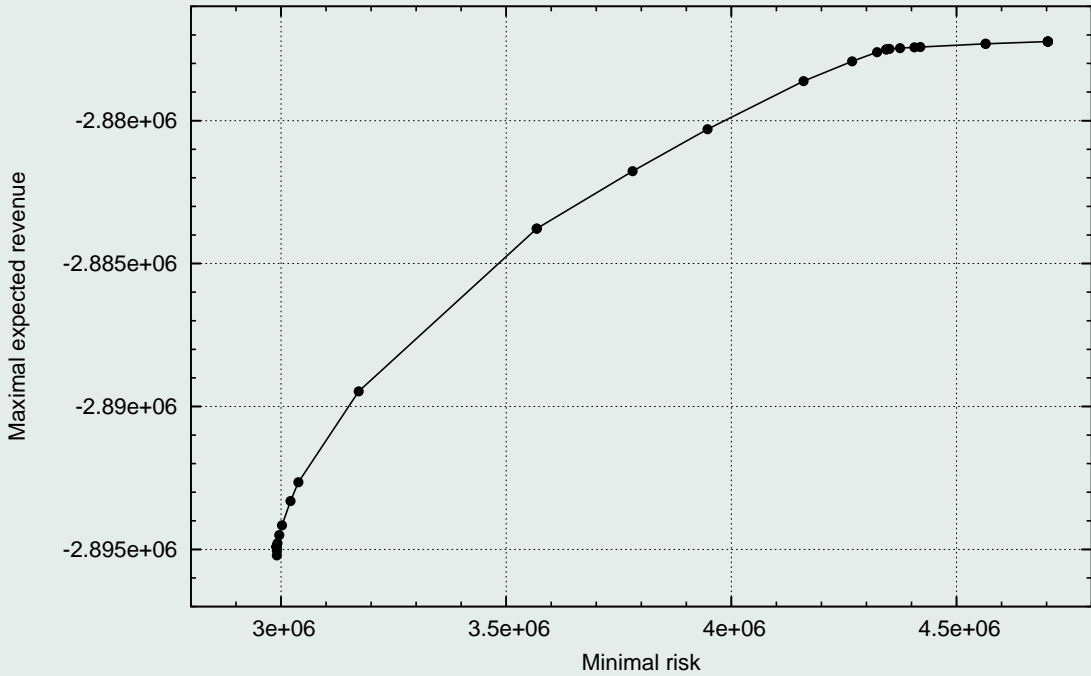
mit dem maximalen Einkommensprozess $Y^{*\gamma}$ **identisch** sind für $\gamma \in [0.15, 0.95]$ und die in den Tests benutzten Risikomaße.

Die **effiziente Frontier**

$$\gamma \mapsto \left(\rho(Y_{t_1}^{*\gamma}, \dots, Y_{t_J}^{*\gamma}), \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^T Y_t^{*\gamma}\right) \right)$$

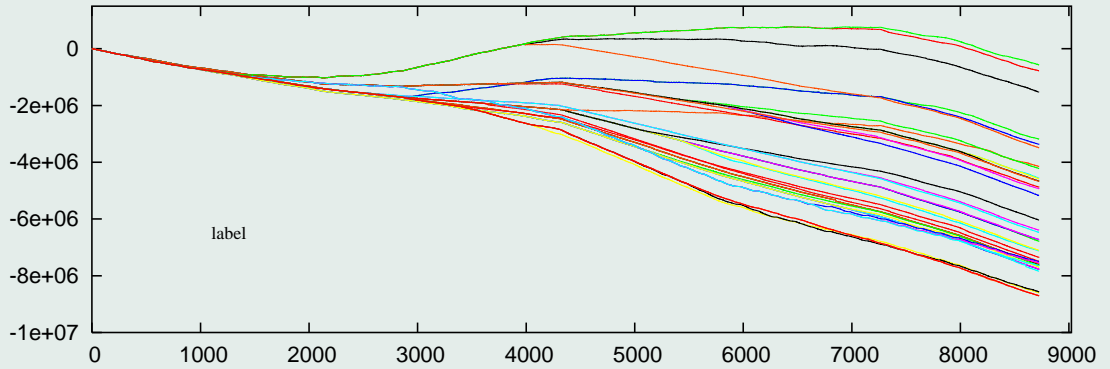
ist eine **konkave Funktion** für $\gamma \in [0, 1]$.

Risiko-Aversion kostet weniger als 1% des mittleren Gewinns.

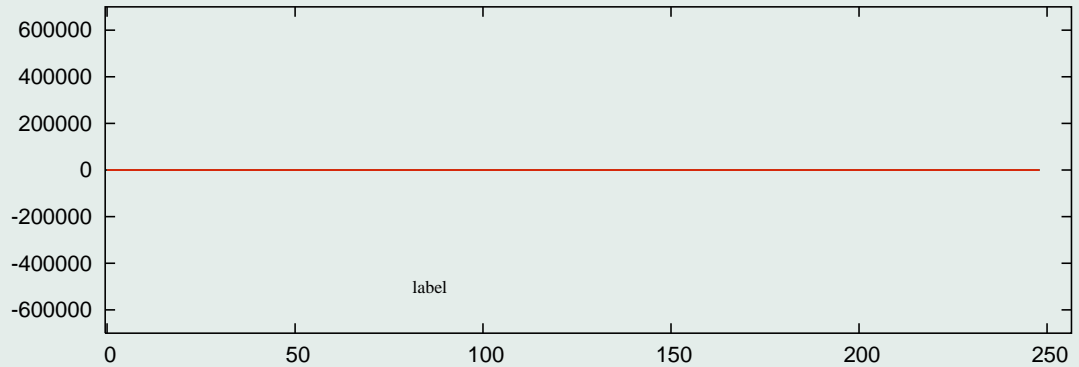


Effiziente Frontier

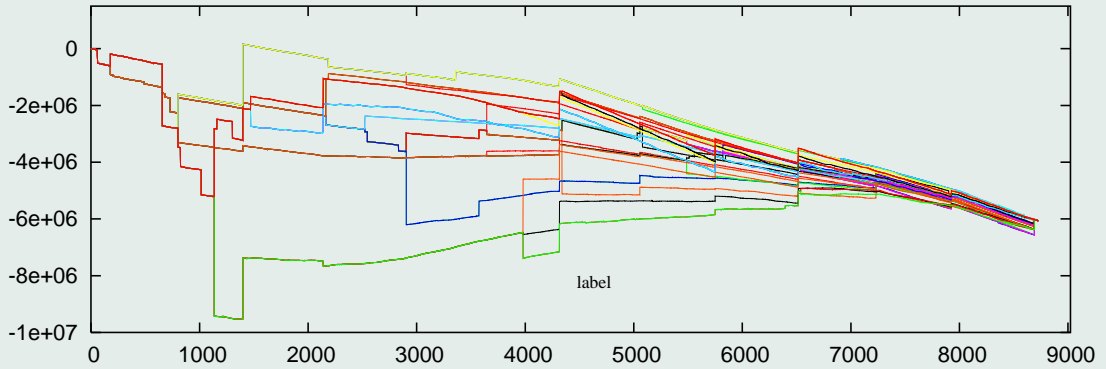
Rechenzeit zur Lösung des LP mit CPLEX 9.1: etwa 1 h auf 2 GHz Linux PC mit 1 GB RAM.



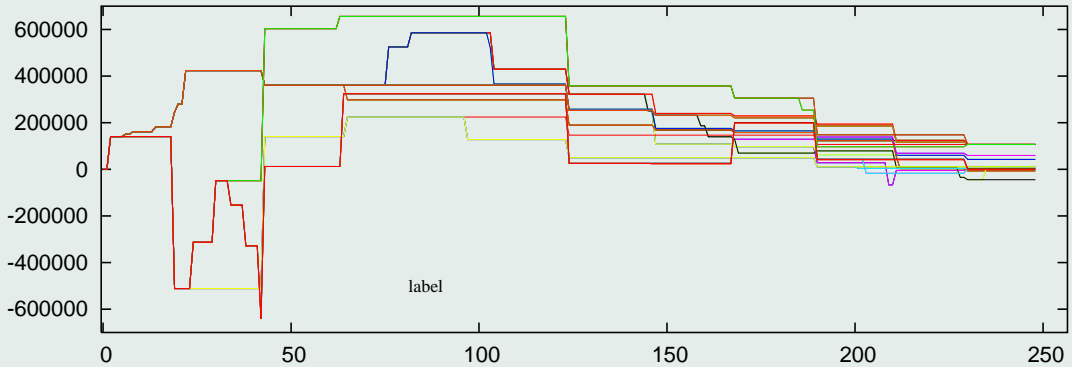
Gewinn-Szenarien für $\gamma = 0$



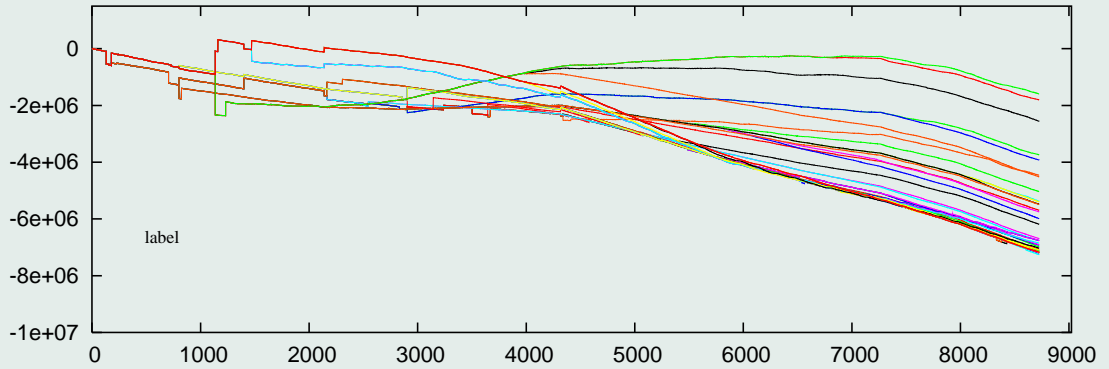
Future-Handel für $\gamma = 0$



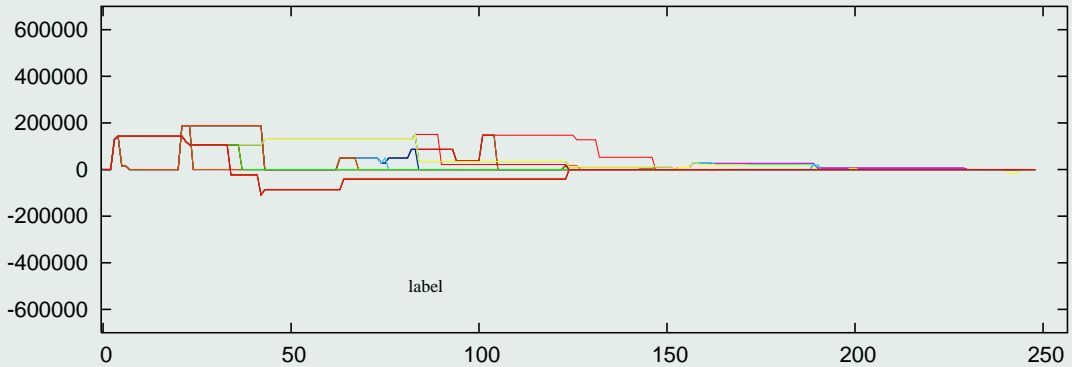
Gewinn Szenarien für $\rho(Y) = \text{AV@R}_{0.05}(Y_T)$ und $\gamma = 0.9$



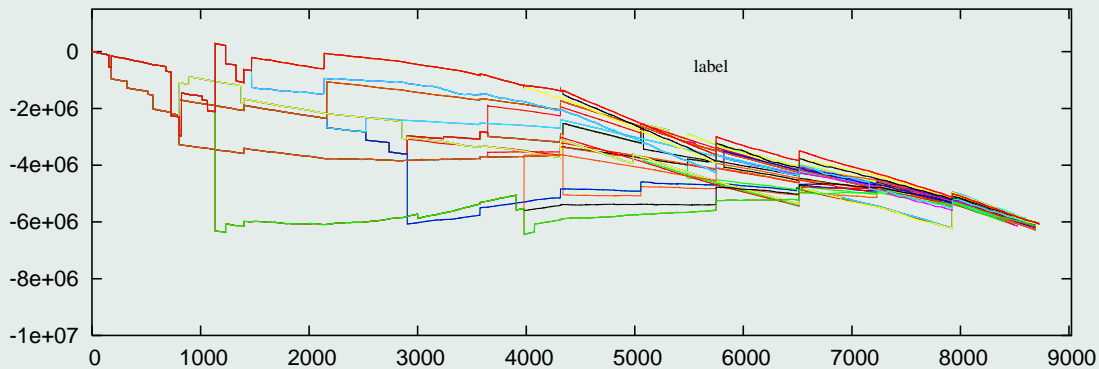
Future-Handel für $\rho(Y) = \text{AV@R}_{0.05}(Y_T)$ und $\gamma = 0.9$



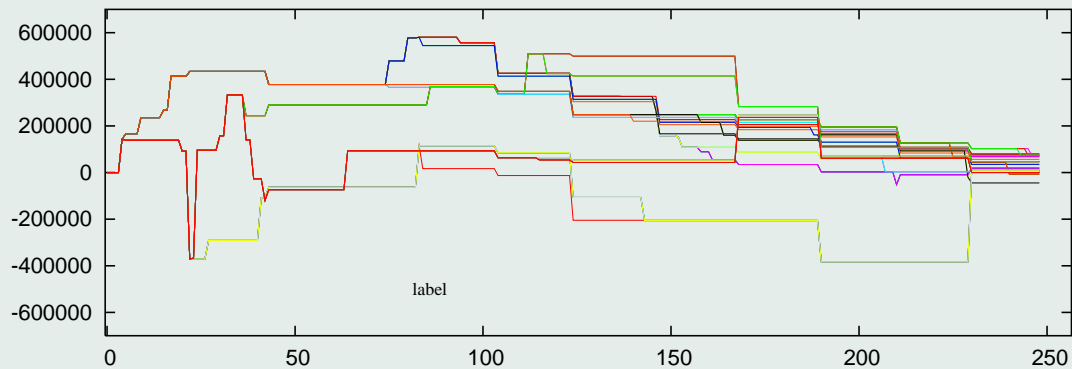
Gewinn-Szenarien für ρ_s und $\gamma = 0.9$



Future-Handel für ρ_s und $\gamma = 0.9$



Gewinn-Szenarien für ρ_m und $\gamma = 0.9$



Future-Handel für ρ_m und $\gamma = 0.9$

Zusammenfassung

- Stochastische Optimierungsmodelle besitzen **Vorteile**, da die Entscheidungen **robust** gegenüber möglichen Unsicherheiten sind und das **Risiko von Entscheidungen** modelliert und **minimiert** werden kann.
- Ein **integriertes Risikomanagement**, d.h., die gleichzeitige Maximierung des mittleren Gewinns und Minimierung des Risikos **ist einem nachgeschalteten Risikomanagement vorzuziehen**, bei dem erst die Produktion optimiert wird und in einer zweiten Phase das Risiko beim Handel minimiert wird. Der Grund ist, dass Risiken auch durch Produktionsentscheidungen gesteuert werden können, selbst dann wenn nur die Marktpreis-Stochastik einbezogen wird.
- Den **größten Einfluss auf die Risiko-Minimierung** bei vorliegender Marktpreis-Stochastik haben allerdings Handelsentscheidungen insbesondere die von (Strom-) Derivaten.

Vielen Dank !

Literatur:

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D.: Coherent measures of risk, *Math. Finance* 9 (1999), 203–228.
- Blaesig, B.: *Risikomanagement in der Stromerzeugungs- und Handelsplanung*, Aachener Beiträge zur Energieversorgung, Band 113, 2007.
- Conejo, A. J., Carrión, M, and Morales, J. M.: *Decision Making under Uncertainty in Electricity Markets*, Springer, 2010.
- Eichhorn, A., Heitsch, H., and Römisch, W.: Stochastic optimization of electricity portfolios: Scenario tree modeling and risk management, in *Handbook of Power Systems* (S. Rebennack, P.M. Pardalos, M. V. F. Pereira, N. A. Iliadis Eds.), Springer, 2010 405–432.
- Eichhorn, A., and Römisch, W.: Polyhedral risk measures in stochastic programming, *SIAM Journal on Optimization* 16 (2005), 69–95.
- Eichhorn, A., und Römisch, W.: Dynamisches Risikomanagement in der Energiewirtschaft, *Innovative Modellierung und Optimierung von Energiesystemen* (R. Schultz, H.-J. Wagner Hg.), LIT Verlag, 2009, 255–271.
- Eichhorn, A., Römisch, W., and Wegner, I.: Mean-risk optimization of electricity portfolios using multiperiod polyhedral risk measures. IEEE St. Petersburg PowerTech Proceedings (2005).
- Föllmer, H., Schied, A.: *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter, Berlin, 2002 (Second Edition 2004, Third Edition 2011).
- Heitsch, H., and Römisch, W.: Scenario tree modeling for multistage stochastic programs, *Mathematical Programming* 118 (2009), 371–406.
- Pflug, G. Ch., and Römisch, W.: *Modeling, Measuring and Managing Risk*, World Scientific, Singapore, 2007.
- Rockafellar, R. T., and Uryasev, S.: Conditional value-at-risk for general loss distributions, *Journal of Banking & Finance* 26 (2002), 1443–1471.