Vorlesung
Analysis und Numerische Mathematik
(für Informatiker)

gehalten von
Werner Römisch
Winter-Semester 1992/93 bis
Sommer-Semester 1994

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Gegenstand des Gebietes *"Analysis und Numerische Mathematik"* :

- klassische Grundlagen wie Mengen, Zahlen, Strukturen;
- klassische Differential- und Integralrechnung;
- einige Kapitel der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und der sog. Funktionalanalysis;
- ausgewählte Aspekte der Funktionentheorie;
- Anfangsgründe partieller Differentialgleichungen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung;
- Grundkurs "Numerische Analysis" (Interpolation, Numerik nichtlinearer Gleichungssysteme, numerische Integration, Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen)

Zielstellung:

- Vermittlung von Methoden und wesentlichen Ergebnissen der Analysis und Numerik;
- Wechselwirkung Theorie-Praxis bzw. Modell-Theorie-numerische Lösung;
- Funktionsweise numerischer Methoden und (möglicher) Einsatz von Numerik-Software, Erarbeitung und Erprobung eigener Programme.

"Faszination" Analysis:

- axiomatische Methode, d.h. "der ganze Bestand analytischer Aussagen muß streng deduktiv aus einigen Grundeigenschaften reeller Zahlen entfaltet werden" (Heuser);
- "reines Denken versteht und ordnet die Wirklichkeit"
- "abstrakte Methoden sind gerade ihrer Abstraktheit wegen universell anwendbar".

Historie der Analysis und Numerik:

- antike "Blüte" der Mathematik: Pythagoras, Euklid, Archimedes
- erst etwa im 15. Jh. entstand durch Probleme der Anwendung wieder das Bedürfnis nach Mathematik (Navigation, Kriegswesen, Astronomie, Optik)
- Kepler (1571–1630), Newton (1642–1727), Leibniz (1646–1716) (noch kein exakter Grenzwertbegriff)

- "Explosion" der Analysis im 18. Jh.: Euler (1707–1783) führte den Begriff "Analysis" ein, Lagrange (1736–1813)

- exakte Begründung der Analysis erst im 19. Jh.: Bolzano (1781–1848), Cauchy (1789–1857), Weierstraß (1815–1897), Cantor (1845–1918), Dedekind (1831–1916), von letzterem exakte Begründung der reellen Zahlen (1871), damit stand das Gebäude der Analysis und es gab eine rasante Weiterentwicklung.

- Numerische Analysis wurde in der Vergangenheit stets gemeinsam mit der Analysis betrieben und durch Anwendungen befruchtet; selbständige Disziplin seit 1940–60, danach stürmische Entwicklung in enger Wechselwirkung mit Computer-Entwicklung.

Einige <u>interessante Anwendungen</u> der Analysis bzw. <u>Effekte</u> der Numerik auf die wir im Verlaufe der Vorlesung zurückkommen:

(a) Populationsdynamik:
$p(t)$-Population einer gegebenen biologischen Art zum Zeitpunkt t (ohne Berücksichtigung von Zu- oder Abwanderung).
Malthus (1766–1834):
Populationsgeschwindigkeit ist proportional zur Population!

$$\rightsquigarrow \frac{dp}{dt} = ap(t) \quad (a = \text{const})$$
$$a = 0.02 \qquad (\text{"Menschen"})$$

Lösung: $p(t) = p(t_o)e^{0.02(t-t_o)}, \quad t_o = 1961$
$p(t_o) = 3.06 \cdot 10^9$

$\rightsquigarrow$ es zeigt sich, daß die Populationsentwicklung der Periode 1700–1961 überraschend genau widergespiegelt wird!
Jedoch gilt nach dieser Formel: Verdopplung der Menschheit alle 34.6 Jahre!
2670: $3.6 \cdot 10^{18}$ Menschen bei einer Gesamterdoberfläche der Erde (einschließlich der Ozeane) von nur $5 \cdot 10^{14} m^2$!

$\rightsquigarrow$ Einführung eines Konkurrenz-Terms $-bp(t)^2$ (b = const.) durch Begrenzung des verfügbaren Lebensraums und der erreichbaren Ressourcen.

$\rightsquigarrow \frac{dp}{dt} = ap(t) - bp(t)^2$
Menschliche Population:
$a = 0.029, b = 2.941 \cdot 10^{-12}$
$p(2000) = 5.74 \cdot 10^9$
$p(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b} = 9.86 \cdot 10^9$

(b) Sukzessives Verfahren zur Wurzelberechnung:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &:= \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (a \geq 1 \text{ fest}) \\ x_o &:= a \end{aligned}$$

Konvergenz: $x_n \to \sqrt{a}$ (i.a. schnell)
Was ist der Hintergrund für die Konvergenz und ihre Geschwindigkeit?
($\leadsto$ Newton-Verfahren: allg. $x_{n+1} := x_n - (f'(x_n))^{-1} \cdot f(x_n)$
mit $x_o \in \mathbb{R}^m$ und $f(x) = 0$)

(c) Klassische Aufgabe der Polynom-Interpolation mit äquidistanten Stützpunkten. Warum versagt dieses Vorgehen z.B. bei Anwendung auf die Funktion $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$? (Hier konvergieren die Polynome nur in $x = -1; 0; 1$) oder auf $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$(Hier oszillieren die Polynome mit wachsendem Grad immer mehr, während sich die Funktion der x-Achse annähert)? Für welche Funktionen funktioniert es?

(d) "Tacoma Bridge disaster":

- Eröffnung der Brücke 1.7.1940 (Tacoma, Washington)
- von Beginn an vertikale Schwingungen ("Galopping Gertie")
- Verkehr nahm wegen dieser Attraktion zu
- am 7.11.40 7 –10 Uhr wellenförmige Bewegung, danach wilde Oszillation, 10.30 Uhr beginnt die Brücke zu krachen und 11.10 stürzt sie zusammen.
- Ursache: Aerodynamisches Phänomen
  - $\rightsquigarrow$ Luftstrom – Hindernis – Wirbel hinter dem Hindernis in einer fixen Periodizität, die von der Struktur des Hindernisses und der Geschwindigkeit des Luftstromes abhängt, alternierend auf beiden Seiten
  - $\rightsquigarrow$ periodische Kraft senkrecht zum Luftstrom und von der Größe $F_o \cos wt$ (w – Frequenz).
  - $\rightsquigarrow$ Resonanz-Effekt mit der Frequenz der Struktur, d.h. Schwingung mit wachsender Amplitude!

siehe auch Martin Braun, Differentialgleichungen und ihre Anwendungen, Springer, Berlin, 1991 (2. Auflage)

Literatur:

H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1 und 2, Teubner, Stuttgart 1990 (7. Auflage)

M. Barner, F. Flohr, Analysis I und II, Walter de Gruyter, Berlin 1987 (3. Auflage) und 1989 (2. Auflage)

G. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung, Bde I/III, Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975 – 1977

J. Dieudonné, Grundzüge der modernen Analysis, Bd. 1, Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1985 (3. Auflage)

J. Stoer, R. Bulirsch, Einführung in die Numerische Mathematik I,II, Springer, Berlin, 1979, 83, 89

G. Maeß, Vorlesungen über numerische Mathematik I,II, Akademie- Verlag, Berlin, 1984 und 88

(Beeinflußt wurde die Vorlesung auch durch Vorlesungen zum gleichen Gegenstand, die Frau Prof. R. März an der Humboldt-Universität und Herr Prof. H.W. Engl an der Kepler Universität Linz vor einigen Jahren gehalten haben.)

1 Mengen, Abbildungen, Zahlen

1.1 Mengen und Strukturen

Menge: Zusammenfassung von Objekten der Anschauung bzw. des Denkens.

Beschreibungsmöglichkeiten einer Menge M:

$$\begin{aligned} M &= \{x : x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}, \\ M &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \\ M &= \{x_1, x_2, \ldots\}. \end{aligned}$$

Die Objekte, die in einer Menge M zusammengefaßt sind, heißen Elemente von M.

Beispiele:
$I\!N := \{1, 2, 3, \ldots\}$ – Menge der natürlichen Zahlen (vgl. auch Def. 1.4)
$Z := \{x : x = 0 \text{ oder } x \in I\!N \text{ oder } -x \in I\!N\}$ – Menge der ganzen Zahlen
$Q := \{$ es existieren $p \in Z$, $q \in Z$, $q \neq 0$, so daß $x = \frac{p}{q}\}$ – Menge der rationalen Zahlen.

Bezeichnungen und Definitionen: (M und N seien Mengen)

a) "$x \in M$" bedeutet "x ist Element von M", "$x \notin M$" anderenfalls;

b) $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge, d.h. die Menge, die keine Elemente enthält;

c) $N \subseteq M$ bedeutet: $x \in N$ impliziert $x \in M$("Inklusion")
$N \subset M$ bedeutet $N \subseteq M$ und $N \neq M$.
Man sagt, N ist (echte) Teilmenge von M.
$N \not\subseteq M$ bedeutet: N ist keine Teilmenge von M usw.
$M = N$, wenn M und N aus denselben Elementen bestehen.

d) $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$ (Vereinigung)

e) $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$ (Durchschnitt)

f) $M \backslash N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$ (Differenz)

g) $C_M(N) := M \backslash N$ (Komplement von $N \subseteq M$ bez. M)

Eigenschaften:
Es seien M, N und P Mengen.

1) $M \subseteq M$,
$M \subseteq N$ und $N \subseteq P$ impliziert $M \subseteq P$,
$M \subseteq N$ und $N \subseteq M \Longrightarrow M = N$;

2) $M \cap N \subseteq M \subseteq M \cup N$;

3) $\emptyset \subseteq M$, $M \backslash M = \emptyset$, $M \backslash N \subseteq M$;

4) $M \cup N = N \cup M$, $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$ und analoges Kommutativ – bzw. Assoziativgesetz für $\cap$,
$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$ und
$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$ (Distributivgesetze);

5) $M \cap N = M \backslash (M \backslash N)$;

6) Es seien $N \subseteq M$ und $P \subseteq M$. Dann gilt:

(i) $C_M(N \cup P) = C_M(N) \cap C_M(P)$

(ii) $C_M(N \cap P) = C_M(N) \cup C_M(P)$ (Morgan'sche Regeln)

Beweis:
1) – 3) sind klar, 4) ist Übung;

5) Sei $x \in M \cap N \rightsquigarrow x \in M$ und $x \in N \rightsquigarrow x \notin M \backslash N$
$\rightsquigarrow x \in M \backslash (M \backslash N)$
$\rightsquigarrow M \cap N \subseteq M \backslash (M \backslash N)$.
Umgekehrt: Sei $x \in M \backslash (M \backslash N) \rightsquigarrow x \in M$ und $x \notin M \backslash N$
$\rightsquigarrow x \in M$ und $x \in N \rightsquigarrow x \in M \cap N$
$\rightsquigarrow M \backslash (M \backslash N) \subseteq M \cap N$
$\rightsquigarrow$ Anwendung von 1).

6)(i) Sei $x \in C_M(N \cup N) = M \backslash (N \cup P) \rightsquigarrow x \in M$ und $x \notin N \cup P$
$\rightsquigarrow x \notin N$ und $x \notin P \rightsquigarrow x \in M \backslash N = C_M(N)$ und
$x \in M \backslash P = C_M(P) \rightsquigarrow x \in C_M(N) \cap C_M(P)$
$\rightsquigarrow C_M(N \cup P) \subseteq C_M(N) \cap C_M(P)$.
Sei andererseits $x \in C_M(N) \cap C_M(P)$
$\rightsquigarrow x \in M$ und $x \notin N$ und $x \notin P \rightsquigarrow x \in M \backslash (N \cup P) = C_M(N \cup P)$
$\rightsquigarrow$ insgesamt folgt mit 1) die Aussage.

6)(ii) (Übung) $\square$

Bezeichnungen:
Sei $\mathcal{M}$ ein (endliches oder unendliches) System von Mengen.

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M := \{x : \text{ es existiert ein} M \in \mathcal{M} \text{ mit } x \in M\}$$
$$\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M := \{x : \text{ für alle } M \in \mathcal{M} \text{ gilt } x \in M\}$$

Wir verwenden auch die folgende Schreibweise:

$\bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ usw., wenn $M_1, M_2, \ldots,$ Mengen sind.

Beispiel:

$$M_i := \{1, 2, \ldots, i\}, i \in I\!N \leadsto \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = I\!N, \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = \{1\}$$

Übung: (erweiterte Morgan'sche Regel)
Es gelte $N \subseteq M$ für alle $N \in \mathcal{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} C_M(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N) &= \bigcap_{N \in \mathcal{N}} C_M(N) \\ C_M(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N) &= \bigcup_{N \in \mathcal{N}} C_M(N). \end{aligned}$$

Eine Menge mit $2, 3, \ldots, n (n \in I\!N)$ Elementen, bei der ein erstes, ein zweites usw. ein n-tes Element (d.h. eine Reihenfolge) festgelegt ist, heißt (geordnetes) <u>Paar</u>, <u>Tripel</u>,...,<u>n-Tupel</u>.
Bez.: $(x, y), (x_1, \ldots, x_n)$

Für beliebige Mengen M und N heißt die Menge $M \times N := \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$ <u>Produkt</u> von M und N.
Allgemeiner: $\bigtimes_{i=1}^{n} M_i := M_1 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in M_i, i = 1, \ldots, n\}$

<u>**Algebraische Strukturen**</u> sind nichtleere Mengen, auf denen (eine oder mehrere) Verknüpfungen mit "Rechenregeln" definiert sind.
Eine <u>Verknüpfung</u> $\circ$ (auf M) ordnet dabei jedem Paar $(x, y) \in M \times M$ ein Element $x \circ y \in M$ zu.
Bez.: $(M, \circ)$, $(M, \circ, *)$ usw.

$(M, \circ)$ heißt <u>Gruppe</u>, falls $M \neq \emptyset$ und $\circ$ eine Verknüpfung auf M ist mit folgenden Eigenschaften:

(i) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, für alle $x, y, z \in M$ (Assoziativgesetz),

(ii) es existiert ein $e \in M$ ("neutrales Element"), so daß $x \circ e = e \circ x = x$, für alle $x \in M$,

(iii) zu jedem $x \in M$ existiert ein $x^* \in M$ ("zu x inverses Element"), so daß $x \circ x^* = x^* \circ x = e$.

Eine Gruppe $(M, \circ)$ heißt <u>Abelsch</u> oder <u>kommutativ</u>, falls $x \circ y = y \circ x$ für alle $x, y \in M$ gilt.

Beispiele: $(Z, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ sind Abelsche Gruppen.

Übung: Man zeige, daß das neutrale und die inversen Elemente sämtlich eindeutig bestimmt sind. Man nehme für den Beweis an, daß es jeweils zwei solcher Elemente gäbe und führe die Annahme dann zum Widerspruch.
Für die inversen Elemente betrachte man $(x_1^* \circ x \circ x_2^*)$, wobei x_1^* und x_2^* die inversen Elemente bezüglich x seien.

$(M, \circ, *)$ heißt <u>Körper</u>, falls $M \neq \emptyset$ und $\circ$ bzw. $*$ Verknüpfungen auf M sind, so daß

(i) $(M, \circ)$ eine Abelsche Gruppe ist (neutrales Element $= 0$),

(ii) $x * (y * z) = (x * y) * z \quad , \forall x, y, z \in M$,
es existiert ein Element $1 \in M, 1 \neq 0$ ("Einselement"), so daß $x * 1 = 1 * x = x$,
zu jedem $x \in M$, $x \neq 0$, existiert ein $\bar{x} \in M$ mit $\bar{x} * x = x * \bar{x} = 1$,

(iii) $\left.\begin{aligned} x * (y \circ z) &= (x * y) \circ (x * z) \\ (x \circ y) * z &= (x * z) \circ (y * z) \end{aligned}\right\}$ Distributivgesetze
(für alle $x, y, z \in M$).

Ein Körper $(M, \circ, *)$ heißt <u>Abelsch</u> oder <u>kommutativ</u>, falls zusätzlich $x * y = y * x$ für alle $x, y \in M$ gilt.

Beispiel: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Abelscher Körper.

Eigenschaften: (Beispiele für weitere Rechenregeln in einem Körper)
Es sei $(M, \circ, *)$ ein Körper.

1) $x * 0 = 0 * x = 0$, für alle $x \in M$;

2) $x * y = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$;

3) für alle $a, b \in M$, $a \neq 0$, existiert genau ein $x \in M$ mit $a * x = b$ (Lösbarkeit von Gleichungen).

<u>**Beweis:**</u>

1) Sei $x \in M$ bel.
$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow x * 0 &&= x * (0 \circ 0) = (x * 0) \circ (x * 0) \\ &\rightsquigarrow (x * 0) \circ (x * 0)^* &&= (x * 0) \circ (x * 0) \circ (x * 0)^* \\ &\rightsquigarrow 0 &&= x * 0 \end{aligned}$$
Analog zeigt man: $0 * x = 0$

2) Zu zeigen ist: $x * y = 0$ und $x \neq 0 \Longrightarrow y = 0$
Sei $\bar{x}$ das an x inverse Element bez. $*$.
$\leadsto 0 = \bar{x} * 0 = \bar{x} * (x * y) = (\bar{x} * x) * y = 1 * y = y$

3) Eine Lösung der Gleichung $a * x = b$ ist $x = \bar{a} * b$ $(a \neq 0)$ z.z. ist noch die Eindeutigkeit.
Seien $x_1, x_2 \in M$ mit $a * x_1 = b = a * x_2$
$\leadsto \bar{a} * (a * x_1) = \bar{a} * (a * x_2) \leadsto x_1 = x_2$. □

Relation: Beziehung zwischen Objekten (d.h. z.B. zwischen Elementen einer Menge)
(Beispiele: "$=$", "$\subseteq$")

Eine Relation "$\leq$" auf einer Menge $M \neq \emptyset$ heißt "Ordnungsrelation", falls sie den folgenden Axiomen genügt:

(i) $x \leq x$, für alle $x \in M$ (Reflexivität),

(ii) $x \leq y$ und $y \leq z$ impliziert $x \leq z$ $(x, y, z \in M)$
(Transitivität)

(iii) $x \leq y$ und $y \leq x$ impliziert $x = y$ $(x, y \in M)$
(Antisymmetrie)

$(M, \leq)$ heißt geordnete Menge, falls $\leq$ Ordnungsrelation auf M.

Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und $A \subseteq M$.
A heißt "nach oben beschränkt", falls ein $c \in M$ existiert, so daß $x \leq c$ für alle $x \in A$; c heißt obere Schranke von A. Es sei A nach oben beschränkt und $S := \{c : c \in M, x \leq c$, für alle $x \in A)$. Falls ein $s \in S$ existiert mit $s \leq c$ für alle $c \in S$, so heißt s "kleinste obere Schranke von A" oder "Supremum von A". Bez.: $\sup A := s$.
(Analog: "nach unten beschränkt", "größte untere Schranke von A" = "Infimum von A", kurz: $\inf A$)

Bezeichnungen zum Formulieren von bzw. Arbeiten mit Aussagen:
Seien A_1, A_2 Aussagen.

$A_1 \Longrightarrow A_2$	bedeutet "A_1 impliziert A_2" oder "aus A_1 folgt A_2".
$A_1 \Longleftrightarrow A_2$	bedeutet $A_1 \Longrightarrow A_2$ und $A_2 \Longrightarrow A_1$ (andere Schreibweise: A_1 gdw. A_2) d.h. A_1 und A_2 sind gleichwertig oder äquivalent

$\forall$ bedeutet "für alle"
$\exists$ bedeutet "es existiert"
$\exists!$ bedeutet "es existiert genau ein"
o.B.d.A. bedeutet "ohne Beschränkung der Allgemeinheit"

1.2 Die reellen Zahlen, Zahlbereiche

Im folgenden werden die reellen Zahlen axiomatisch ("per Postulat") eingeführt und aus diesen relativ wenigen Axiomen werden die Eigenschaften der reellen Zahlen hergeleitet.

Definition 1.1
Eine Menge $I\!R$ heißt "Menge der reellen Zahlen", falls zwei Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" (Addition und Multiplikation) und eine Ordnungsrelation "$\leq$" auf $I\!R$ definiert sind, so daß:

(I) $(I\!R, +, \cdot)$ *ist ein kommutativer Körper,*

(II) $(I\!R, \leq)$ *hat die Eigenschaften;*
(II_1) $\forall x, y \in I\!R$ *gilt* $x \leq y$ *oder* $y \leq x$,
(II_2) $\forall x, y, z \in I\!R$ *mit* $x \leq y$ *gilt* $x + z \leq y + z$,
(II_3) $0 \leq x$ *und* $0 \leq y$ *für* $x, y \in I\!R \Longrightarrow 0 \leq x \cdot y$,

(III) *Für alle* $A \subseteq I\!R$ *mit* $A \neq \emptyset$ *und* A *nach oben beschränkt, existiert* $\sup A \in I\!R$.

Bemerkung 1.2
Die Existenz einer nichtleeren Menge $I\!R$ mit den in Def. 1.1 angeführten Eigenschaften wird als Grundlage für den gesamten weiteren Aufbau postuliert! $I\!R$ ist durch Def. 1.1 nicht eindeutig bestimmt, jedoch unterscheiden sich die verschiedenen Modelle von $I\!R$ nur in Eigenschaften, die für die Analysis uninteressant sind. All dies ist kaum problematisch, da die Axiome der anschaulichen Vorstellung der reellen Zahlen entsprechen.
Tatsächlich könnten die Axiome aus Def. 1.1 aber auch aus einer geringeren Anzahl von Axiomen der Mengenlehre und der natürlichen Zahlen hergeleitet werden. Dieser von Cantor *und* Dedekind *begründete Weg war zwar wesentlich für die historische Entwicklung der Analysis, ist aber aufwendig und im Grunde recht unerheblich für die Analysis (wir kommen aber auf die sog. "Dedekindschen Schnitte" noch kurz zurück).*
Axiom (III) (die sog. "Ordnungsvollständigkeit") sichert dabei die Vorstellung vom "Kontinuum", von der "Lückenlosigkeit" von $I\!R$!

Einige Bezeichnungen:
Für den Sachverhalt $x \leq y$, $x \neq y$, $x, y \in I\!R$ schreiben wir $x < y$.
Für $a, b \in I\!R$ mit $a < b$ bezeichne
$[a, b] := \{x \in I\!R : a \leq x \leq b\}$ ("abgeschlossenes Intervall")
$]a, b[:= \{x \in I\!R : a < x < b\}$ ("offenes Intervall")
$[a, b[:= \{x \in I\!R : a \leq x < b\}$ ("halboffenes Intervall")
analog: $]a, b]$,
0 bzw. 1 sind die neutralen Elemente bez. $+$ bzw. $\cdot$;

für $x \in I\!R$ bezeichnet $-x$ das inverse Element bez. $+$
für $x \in I\!R \backslash \{0\}$ bezeichnet x^{-1} oder $\frac{1}{x}$ das inverse Element bez. $\cdot$,
für $x \in I\!R$ heißt $|x| := \begin{cases} x, & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$ der absolute Betrag von x.
$\rightsquigarrow$ es gilt: $-x \leq |x| \leq x \quad \forall x \geq 0$.

Satz 1.3

1. *Für alle $a, b \in I\!R$ gilt:*

   (i) *$ab > 0 \Longleftrightarrow$ ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$)*
   $aa > 0$ falls $a \neq 0$
   (insbesondere: $1 > 0$ und $a > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{a} > 0$),

   (ii) *$a < b \Longrightarrow a < \frac{1}{2}(a+b) < b$,*

   (iii) *$|ab| = |a||b|, |a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung), $||a| - |b|| \leq |a - b|$.*

2. *Sind A und B nichtleere Teilmengen von $I\!R$ mit $a \leq b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, so existiert ein $c \in I\!R$ mit $a \leq c \leq b$, $\forall a \in A \forall b \in B$. Gilt darüber hinaus $A \cup B = I\!R$ und $a < b$, $\forall a \in A \forall b \in B$, so ist dieses $c \in I\!R$ eindeutig bestimmt.*
   (in diesem Fall heißt $(A|B)$ Dedekindscher Schnitt)

Beweis:

1.(i) Es gelte $ab > 0$. Annahme: $a > 0$ und $b < 0$.

$\rightsquigarrow -b > 0 \quad \rightsquigarrow a(-b) = -ab > 0$ aus (II_3) und Körperaxiomen)
$\rightsquigarrow ab < 0$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch!
Die Umkehrung folgt direkt aus (II_3).
$aa > 0$, falls $a \neq 0$, ist nun eine direkte Schlußfolgerung.
$\rightsquigarrow$ speziell: $1 = 1 \cdot 1 > 0$, da $1 \neq 0$ und
$1 = a \cdot \frac{1}{a} > 0 \rightsquigarrow$ Rest folgt aus erstem Teil.

(ii) Es gelte $a < b$.
$\rightsquigarrow a + a = (1+1)a = 2a < a + b < b + b = 2b$ (nach (II_2))
$\rightsquigarrow 0 < (a+b) + (-2a)$
$\rightsquigarrow 0 < \frac{1}{2}((a+b) + (-2a)) = \frac{1}{2}(a+b) + (-a)$ $((II_3))$
$\rightsquigarrow a < \frac{1}{2}(a+b) \quad ((II_2))$
Analog folgt die rechte Seite der Ungleichung.

(iii) Wir beweisen nur die Dreiecksungleichung (Rest: Übung).
Es gilt nach Definition des absoluten Betrages:

$$\left.\begin{array}{ll} a \leq |a|, & -a \leq |a| \\ b \leq |b| & -b \leq |b| \end{array}\right\} \underset{(II_3)}{\leadsto} \begin{array}{rcl} a+b & \leq & |a|+|b| \\ -a+(-b) & \leq & |a|+|b| \end{array}$$

$\leadsto -(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$ (Körperaxiome)
$\leadsto \quad |a+b| \leq |a|+|b|$ (nach Definition von $|\cdot|$).

2. Wir beweisen zunächst den ersten Teil der Aussage. Nach Vor. ist A nach oben beschränkt. Wegen (III) existiert $c := \sup A \in I\!R$. Deshalb gilt nach Definition: $a \leq c$, $\forall a \in A$.
Jedes Element $b \in B$ ist aber obere Schranke für A und $c \in I\!R$ ist die kleinste obere Schranke $\leadsto c \leq b, \forall b \in B$.
Es gelte nun zusätzlich $A \cup B = I\!R$ und $a < b, \forall a \in A \forall b \in B$.
<u>Annahme:</u> $\exists c_1, c_2 \in I\!R$ mit $a \leq c_i \leq b$, $\forall a \in A \forall b \in B, i = 1, 2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) gelte $c_1 < c_2$.
$\leadsto \sup A \leq c_1 < c_2 \leq b, \forall b \in B$
$\leadsto c_1 \notin B$ und $c_2 \notin A \leadsto c_1 \in A$ und $c_2 \in B$
$\leadsto c_1 = \sup A < \frac{1}{2}(c_1 + c_2) < c_2 \leq b, \forall b \in B$ (siehe 1.(ii)).
$\leadsto \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \notin A \cup B = I\!R \leadsto$ Widerspruch! $\square$

Ähnlich wie im ersten Teil des Satzes können nun alle bekannten Rechenregeln mit reellen Zahlen aus den Axiomen in Def. 1.1 hergeleitet werden. Wir verzichten im folgenden darauf und arbeiten damit wie bisher gewohnt.
Der zweite Teil der Aussage 2. in Satz 1.3 kann wie folgt veranschaulicht werden.

Zu zwei solchen Mengen A, B mit $A \cup B = I\!R$ und $a < b, \forall a \in A \forall b \in B$ gehört genau ein Punkt $c \in I\!R$, der sog. "Schnitt" (nach Dedekind). Folglich sind die reellen Zahlen $I\!R$ wirklich "lückenlos" in dieser Vorstellung. Dedekind hat mit solchen Schnitten $(A|B)$, $A, B \subset \mathbb{Q}$ und $A \cup B = \mathbb{Q}$ die reellen Zahlen eingeführt (auf der Basis der axiomatischen Einführung von $I\!N$ und damit $\mathbb{Q}$).
Unser Weg ist umgekehrt: Wir definieren jetzt $I\!N$ als Teilmenge von $I\!R$ mit gewissen Eigenschaften.

Definition 1.4

a) *Eine Menge $M \subseteq I\!R$ heißt <u>"induktiv"</u>, falls*

(i) $1 \in M$

(ii) $x + 1 \in M \quad \forall x \in M$.

$\mathcal{M}_i := \{M : M \subseteq I\!R, M \text{ ist induktiv}\}$

b) $I\!N := \bigcap_{M \in M_i} M$ *heißt* <u>*"Menge der natürlichen Zahlen"*</u>,
$I\!N_o := I\!N \cup \{0\}$.

c) $Z := \{x : x \in I\!N_o \text{ oder } -x \in I\!N\}$ *heißt* <u>*" Menge der ganzen Zahlen"*</u>.

d) $\mathbb{Q} := \{x : \exists p \in Z \exists q \in Z \backslash \{0\} \text{ so daß } x = \frac{p}{q}\}$ *heißt* <u>*"Menge der rationalen Zahlen"*</u>.

Bemerkung 1.5
Offenbar gibt es viele induktive Mengen, z.B. $I\!R$, $\{x \in I\!R : x \geq 1\}$, $\{x \in I\!R : x = 1 \text{ oder } x \geq 2\}$ *usw. Nach Definition ist* $I\!N$ *die kleinste aller induktiven Mengen und* Z *bzw.* $\mathbb{Q}$ *sind mit* $I\!N$ *ebenfalls Teilmengen von* $I\!R$*!*
Diese Eigenschaft von $I\!N$ *begündet das sog. "Induktionsprinzip": Ist* $M \subseteq I\!N$ *und zeigt man, daß* M *induktiv ist, so gilt* $M = I\!N$*! Dies ist von großer Bedeutung für die Beweistechnik ("vollständige Induktion") bzw. zur Definition von Größen!*

(i) *Prinzip der vollständigen Induktion:*
Um zu zeigen, daß eine Aussage $A(n)$ *für alle* $n \in I\!N$ *richtig ist, genügt es zu zeigen:* $\{n \in I\!N : A(n) \text{ ist wahr}\}$ *ist induktiv.*
D.h. man geht wie folgt vor:
1. $A(1)$ *ist wahr,*
2. $n \in I\!N : A(n)$ *ist wahr* $\Longrightarrow A(n+1)$ *ist wahr.*

(ii) *Induktives Definieren einer Größe* $G(n), \forall n \in I\!N$*:*
1. $G(1)$ *definieren (oft trivial)*
2. $n \in I\!N : G(n+1)$ *in Abhängigkeit von* $G(n)$ *definieren.*
Beispiele:

$$\begin{aligned} n! &:= n \cdot ((n-1)!), \quad \sum_{i=1}^{n} a_i := \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n, \\ a^n &:= a^{n-1} \cdot a (a \in I\!R), \prod_{i=1}^{n} a_i := \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) \cdot a_n \\ & \quad (a_i \in I\!R, i = 1, \ldots, n, n \in I\!N) \end{aligned}$$

Wir befassen uns nun mit Eigenschaften von $I\!N$ und der "Lage" von $I\!N$ bzw. $\mathbb{Q}$ in der Menge der reellen Zahlen.

Satz 1.6

1. $\forall m, n \in I\!N$ *gilt:* $m + n \in I\!N$ *und* $mn \in I\!N$.

2. $\forall n \in I\!N$ *gilt:* $]n, n+1[\cap I\!N = \emptyset$.

Beweis:

1. *Wir beweisen als Beispiel:* $m + n \in I\!N, \forall m, n \in I\!N$. *Sei* $m \in I\!N$ *bel. gewählt und* $A(n)$ *ist die Aussage "*$m + n \in I\!N$*".* $A(1)$ *ist wahr, da* $I\!N$ *induktiv ist.*
   Es sei nun $A(n)$ *wahr, d.h.* $m + n \in I\!N$.
   $\rightsquigarrow m + (n + 1) = (m + n) + 1 \in I\!N \rightsquigarrow A(n + 1)$ *ist wahr.*
   $\rightsquigarrow m + n \in I\!N$ *für alle* $n \in I\!N$.

2. *Wir zeigen:* $M := \{n \in I\!N :]n, n + 1[\cap I\!N = \emptyset\}$ *ist induktiv*
   (deshalb: $M = I\!N$*)*
   Es gilt $1 \in M$*, da* $]1, 2[\cap I\!N \subseteq]1, 2[\cap (\{1\} \cup \{x \in I\!R : x \geq 2\}) = \emptyset$
   (vgl. auch Bem. 1.5).
   Es sei nun $n \in M$*, d.h.* $]n, n + 1[\cap I\!N = \emptyset$*, und wir zeigen:* $n + 1 \in M$.
   <u>Annahme:</u> $\exists m \in]n + 1, n + 2[\cap I\!N$.
   $\rightsquigarrow n + 1 < m < n + 2$ *mit* $m \in I\!N$
   $\rightsquigarrow n < m - 1 < n + 1$ *und* $m \in I\!N$
   $\rightsquigarrow m \in I\!N \cap \{x \in I\!R : x \geq 2\}$ *und* $m - 1 \in]n, n + 1[$*. Wenn wir zeigen, daß* $m - 1 \in I\!N$*, ist dies ein Widerspruch zu* $n \in M$*. Nun ist aber* $\tilde{M} := \{m \in I\!N : m - 1 \in I\!N_o\}$ *induktiv, d.h.* $\tilde{M} = I\!N$
   $\rightsquigarrow m - 1 \in I\!N_o$ *und* $m \geq 2$*, was* $m - 1 \in I\!N$ *impliziert.* $\square$

Bemerkung 1.7
Def. 1.4 und Satz 1.6 rechtfertigen die in Kap. 1.1 gegebene "intuitive" Definition für $I\!N := \{1, 2, 3, \ldots\}$*. Für den weiteren Aufbau ist aber die axiomatische Einführung von* $I\!N$ *wichtig.*

Satz 1.8

1. $I\!N$ *ist <u>nicht</u> nach oben beschränkt (in* $I\!R$*). (Archimedes)*

2. $\forall x, y \in I\!R$ *mit* $x > 0$ *und* $y \geq 0$ *existiert ein* $n \in I\!N$ *mit* $y \leq nx$*. ("Archimedisches Axiom")*

3. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in I\!N$ *mit* $\frac{1}{n} < \varepsilon$*. (Eudoxos)*

Beweis:

1. <u>Annahme:</u> $I\!N$ ist nach oben beschränkt.
   Aus Axiom (III) folgt dann: $s := \sup I\!N \in I\!R$.
   $\rightsquigarrow s - 1$ ist keine obere Schranke für $I\!N$
   $\rightsquigarrow \exists n \in I\!N$ mit $s - 1 < n \rightsquigarrow s < n + 1 \in I\!N$
   $\rightsquigarrow$ Widerspruch zur Definition von s.
   $\rightsquigarrow$ die Annahme ist falsch.

2. Nach 1. existiert für bel. $x, y \in I\!R$ mit $x > 0, y \geq 0$ ein $n \in I\!N$ mit $\frac{y}{x} \leq n \rightsquigarrow y \leq nx$.

3. <u>Annahme:</u> $\exists \varepsilon_o > 0 : \frac{1}{n} \geq \varepsilon_o, \forall n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow n \leq \frac{1}{\varepsilon_o}, \forall n \in \mathbb{N}$
$\rightsquigarrow \mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt $\rightsquigarrow$ Widerspruch! $\square$

Satz 1.9 *(Wohlordnungssatz)*
Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

<u>**Beweis:**</u>
<u>Annahme:</u> M besitzt kein kleinstes Element.
Es sei $\tilde{M} := \{m \in \mathbb{N} : m < n, \forall n \in M\}$.
Wir zeigen: $\tilde{M}$ ist induktiv.

(i) $1 \in \tilde{M}$, anderenfalls wäre $1 \in M$ kleinstes Element von M;

(ii) Sei $m \in \tilde{M}$ und wir zeigen $m + 1 \in \tilde{M}$

<u>Annahme:</u> $m + 1 \notin \tilde{M} \rightsquigarrow \exists n_1 \in M : n_1 \leq m + 1$
$\rightsquigarrow \exists n_2 \in M$ mit $n_2 < n_1 \leq m + 1$, da anderenfalls n_1 kleinstes Element von M wäre.
$\rightsquigarrow n_2 \leq m$, da anderenfalls $m < n_2 < m + 1$, was nach Satz 1.8 unmöglich ist.
$\rightsquigarrow m \notin \tilde{M}$, d.h. Widerspruch!
$\rightsquigarrow m + 1 \in \tilde{M}$ und insgesamt ist $\tilde{M}$ induktiv.
$\rightsquigarrow \tilde{M} = \mathbb{N} \rightsquigarrow M = \emptyset \rightsquigarrow$ Widerspruch! $\square$
55

Satz 1.10
$\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \, \exists r \in \mathbb{Q}$ *mit* $r \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. *("$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$")*

<u>**Beweis:**</u>
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit (zunächst) $x \geq 0$ und sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt. Nach Satz 1.8 existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Sei $M := \{m \in \mathbb{N} : m > nx\}$. Nach Satz 1.8 gilt $M \neq \emptyset$.
Nach Satz 1.9 existiert ein minimales Element $m \in M$ von M.
$\rightsquigarrow m - 1 \leq nx < m$
Wir definieren nun $r := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Damit gilt:

$$r - \varepsilon < r - \frac{1}{n} = \frac{m-1}{n} \leq x < r$$

$\rightsquigarrow x - \varepsilon < x < r < x + \varepsilon$, d.h. $r \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.
Es sei nun $x < 0$. Nach eben existiert dann ein $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$-x - \varepsilon < r < -x + \varepsilon \rightsquigarrow x - \varepsilon < -r < x + \varepsilon$$

und alles ist gezeigt. $\square$

Schließlich bleibt noch die Frage offen, ob $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ wirklich verschieden sind. Für eine Antwort benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Satz 1.11

a) *Für alle $a, b \in I\!R$ und $n \in I\!N$ gilt:*

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-1} b^i + b^n \quad (\text{"Binomischer Lehrsatz"})$$

$$\text{wobei } \binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!} \ (i = 1, \ldots, n-1) \quad (\text{"Binomialkoeffizient"}).$$

b) *Für alle $a \in I\!R$, $a > -1$ und für alle $n \in I\!N$ gilt:*

$$(1+a)^n \geq 1 + na \qquad (\text{"Bernoullische Ungleichung"})$$

c) *Für alle $a \in [0,1]$ und alle $n \in I\!N$ gilt:*

$$(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a$$

<u>Beweis:</u>

a) Übung (mit Induktionsprinzip)

b) Sei $a \in I\!R$, $a > -1$ und sei $M := \{n \in I\!N : (1+a)^n \geq 1 + na\}$.
Wir zeigen: M ist induktiv.
$1 \in M$ ist trivial. Sei $n \in M$ und wir zeigen: $n+1 \in M$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) (\text{wegen}(II_3)) \\ &\geq 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a \end{aligned}$$

c) Sei $a \in [0,1]$ und wir wenden wieder das Induktionsprinzip an. Die Aussage ist offensichtlich für $n = 1$ richtig. Sie gelte nun für $n \in I\!N$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \leq (1 + (2^n - 1)a)(1+a) \\ &\leq 1 + 2^n a + (2^n - 1)a^2 \leq 1 + (2 \cdot 2^n - 1)a, \text{ da } a^2 \leq a. \end{aligned}$$

$\square$

Satz 1.12
Es seien $a > 0$ und $n \in I\!N$.
Dann existiert genau ein $x \in I\!R$, $x > 0$ mit $x^n = a$.

Beweis:
Wir definieren $A := \{y \in I\!R : y \geq 0 \text{ und } y^n \leq a\}$.
Es gilt: $\left.\begin{array}{ll} 1 \in A, & \text{falls} \quad a \geq 1 \\ a \in A, & \text{falls} \quad a < 1 \end{array}\right\} \rightsquigarrow A \neq \emptyset$
Ferner gilt für alle $y \in A : y^n \leq a \leq (1+a)^n \rightsquigarrow y \leq 1+a$
$\rightsquigarrow$ A ist nichtleer und nach oben beschränkt.
$\rightsquigarrow \exists x := \sup A \in I\!R$ (wegen Axiom (III))$\rightsquigarrow x > 0$, da $\min\{1, a\} \in A$.
Wir zeigen: $x^n = a$.

(i) _Annahme:_ $x^n < a$.
Sei $\eta := a - x^n > 0$ und $\varepsilon := \min\{x, \eta/[(2^n-1)x^{n-1}]\} > 0$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} (x+\varepsilon)^n &= x^n(1+\frac{\varepsilon}{x})^n \leq x^n(1+(2^n-1)\frac{\varepsilon}{x}) \text{ (Satz 1.11c))} \\ &= x^n + (2^n-1)x^{n-1}\varepsilon \leq x^n + \eta = a \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow x + \varepsilon \in A \rightsquigarrow$ Widerspruch zu $x = \sup A$. $\rightsquigarrow x^n \geq a$.

(ii) _Annahme:_ $x^n > a$
Satz 1.8 $\rightsquigarrow \exists m \in I\!N : m > \frac{1}{x}$.
$\rightsquigarrow (x - \frac{1}{m})^n = x^n(1 - \frac{1}{mx})^n \geq x^n(1 - \frac{n}{mx})$, nach Satz 1.11 da $-\frac{1}{mx} > -1$.
Wir wählen nun $m \in I\!N$ sogar so groß, daß

$$m > \max\left\{\frac{1}{x}, \frac{nx^{n-1}}{x^n - a}\right\} > 0.$$

$$\rightsquigarrow (x - \frac{1}{m})^n \geq x^n(1 - \frac{n}{mx}) \geq x^n(1 - \frac{x^n - a}{x^n}) = a.$$

Deshalb gilt für alle $y \in A : y^n \leq a \leq (x - \frac{1}{m})^n \rightsquigarrow y \leq x - \frac{1}{m}$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch zur Definition von x!

Also gilt insgesamt: $x^n = a$.
Annahme: $\exists x_1, x_2 \in I\!R$ mit $x_1 < x_2$, so daß $x_1^n = a = x_2^n$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch zu (II_3). $\square$

Bemerkung 1.13
$x \in I\!R$ mit der Eigenschaft wie in Satz 1.12 heißt "n-te Wurzel aus a".
Bez.: $\sqrt[n]{a} := x$, $a^{\frac{1}{n}} := x$
Nun lassen sich beliebige Potenzen positiver reeller Zahlen a mit rationalen Exponenten definieren:

$a^n, n \in I\!N$ (sieheBem.1.5), $a^o := 1$

$$
\begin{aligned}
a^{-n} &:= \frac{1}{a^n}, n \in I\!N \\
a^r &:= \sqrt[q]{a^p}, \text{ falls } r := \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ p \in Z,\ q \in I\!N \text{ (Satz 1.12).}
\end{aligned}
$$

(Diese Definition von a^r ist unabhängig von der konkreten Darstellung von $r \in \mathbb{Q}$ (Übung)).
Es gelten nun die bekannten Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen.

Satz 1.14
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d.h. es gilt $\mathbb{Q} \not\subseteq I\!R$.

Beweis:
Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Sei $M := \{n \in I\!N : n\sqrt{2} \in I\!N\}$.
Da $\sqrt{2} > 0$ und $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ folgt: $M \neq \emptyset$.
Nach Satz 1.9 besitzt M ein kleinstes Element. Es sei dies $m_o \in M$, d.h. $m_o \leq n, \forall n \in M$.
$\rightsquigarrow m_o\sqrt{2} \in I\!N$ und $l_o := m_o\sqrt{2} - m_o \in I\!N$ da $1 < \sqrt{2} < 2$ (folgt aus Satz1.13)
$\rightsquigarrow l_o\sqrt{2} = 2m_o - m_o\sqrt{2} \in I\!N$ und $l_o < m_o$
$\rightsquigarrow l_o \in M$ und $l_o < m_o \rightsquigarrow$ Widerspruch. $\square$

Die Elemente von $I\!R \backslash \mathbb{Q}$ heißen irrationale Zahlen.
Später werden wir sehen, daß es "viel mehr" irrationale als rationale Zahlen gibt.

Folgerung 1.15

a) *Zwischen je zwei voneinander verschiedenen (rationalen) reellen Zahlen liegt eine (rationale) reelle Zahl.*

b) *Zwischen je zwei voneinander vrschiedenen (rationalen) reellen Zahlen liegt eine (irrationale) rationale Zahl.*

Beweis:

a) folgt aus Satz 1.3, 1. (ii).

b) $a, b \in I\!R \rightsquigarrow$ Satz 1.10 liefert die Existenz eines $r \in \mathbb{Q}$, das zwischen a und b liegt.
Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$. $\rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{2}}a < \frac{1}{\sqrt{2}}b$
$\rightsquigarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ (wieder Satz 1.10): $\frac{1}{\sqrt{2}}a < r < \frac{1}{\sqrt{2}}b$
d.h. $a < \sqrt{2}r < b$.
O.B.d.A. sei dabei $r \neq 0$ (vgl. auch Satz 1.10).
Wie in Satz 1.14 sieht man nun aber, daß $\sqrt{2}r \notin \mathbb{Q}$. $\square$

1.3 Abbildungen und Mächtigkeit von Mengen

Es seien X, Y zwei Mengen. Wir führen nun den für die Analysis zentralen Begriff der Abbildung von/aus X in Y ein. Anschaulich ordnet eine Abbildung gewissen Elementen von X gewisse Elemente von Y zu, d.h. eine Abbildung bestimmt Paare von einander zugehörigen Elementen.

Definition 1.16
$F \subseteq X \times Y$ heißt Abbildung aus X in Y.
Für jedes $x \in X$ heißt $F(x) := \{y \in Y : (x, y) \in F\}$ Wert von F in x.
$D(F) := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\} = \{x \in X : \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in F\}$ heißt Definitionsbereich der Abbildung F.
$R(F) := \bigcup_{x \in X} F(x) = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ mit } (x, y) \in F\}$ heißt Wertebereich der Abbildung F.
Ist $(x, y) \in F$, so heißt x Urbild von y bzgl. F und y heißt Bild von x bzgl. F.
$F \subseteq X \times Y$ heißt Abbildung
aus/von X, wenn $D(F) \subseteq X / D(F) = X$ bzw.
in/auf Y, wenn $R(F) \subseteq Y / R(F) = Y$.
$F \subseteq X \times Y$ heißt eindeutige Abbildung, falls für jedes $x \in X$ $F(x)$ höchstens ein Element besitzt (sonst: mehrdeutig oder mengenwertig).
Für eindeutige Abbildungen F existiert also zu jedem $x \in D(F)$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in F$. In diesem Fall verwenden wir häufig folgende Schreibweisen:

$$\begin{aligned} F &: D(F) \to Y \text{ und} \\ F(x) &:= Fx = y \text{ für } (x, y) \in F. \end{aligned}$$

(die einelementige Menge $F(x)$ wird also mit dem Element identifiziert) (Im Rahmen der Vorlesung werden (fast?) ausschließlich eindeutige Abbildungen betrachtet. Deshalb sprechen wir im folgenden auch oft kurz von Abbildungen oder Funktionen (manchmal auch: Operatoren).)
mit F(X,Y) bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von X in Y.

Beispiele:

1) Eine Verknüpfung $\circ$ auf einer Menge $M \neq \emptyset$ ist eine eindeutige Abbildung von $M \times M$ in M, d.h. $\circ : M \times M \to M$.

2) Ist $y_o \in Y$ fixiert, so ist $X \times \{y_o\}$ die konstante Abbildung von X in Y mit Wert y_o.

3) Ist $Y = X$, so ist $F := \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ die sogenannte identische Abbildung von X in X. Bez.: I_X oder I wenn kein Mißverständnis möglich ist.

4) Seien X, Y beliebige Mengen. Dann heißen die Abbildungen

$$pr_1 : \quad X \times Y \to X, \quad pr_1(x,y) = x$$
$$pr_2 : \quad X \times Y \to Y, \quad pr_2(x,y) = y$$

die erste bzw. zweite Projektion von $X \times Y$

5) $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $F(n) := n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

6) $F = \{(x, x^r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 0\}$ $(r \in \mathbb{Q})$ heißt Potenzfunktion, d.h. $F(x) = x^r$.

Definition 1.17
Es sei F eine Abbildung aus X in Y.
Für $A \subseteq X$ heißt $F(A) := \{y \in Y : \exists x \in A$ mit $(x, .y) \in F\} = \bigcup_{x \in A} F(x)$ das Bild der Menge A bzgl. F.
$F^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in F\} = \{(y,x) \in Y \times X : y \in F(x)\}$ heißt zu F inverse Abbildung, d.h.

$x \in F^{-1}(y)$ gdw. $y \in F(x)$.

Für $B \subseteq Y$ heißt $F^{-1}(B) := \{x \in X : \exists y \in B$ mit $(x,y) \in F\}$ das Urbild der Menge B bzgl. F; speziell schreiben wir

$F^{-1}(y) = \{x \in X : (x,y) \in F\}$.

Die Abbildung F heißt
surjektiv, falls $R(F) = Y$;
injektiv, falls F und F^{-1} eindeutige Abbildungen sind;
bijektiv, falls F injektiv und surjektiv ist.
Die Abbildung $F|_A := \{(x,y) \in F : x \in A\}$ heißt Einschränkung von F auf $A \subseteq X$.
Eine Abbildung $\hat{F} \subseteq X \times Y$ heißt Fortsetzung von F, falls $D(F) \subseteq D(\hat{F})$ und $F(x) = \hat{F}(x), \forall x \in D(F)$.

Beispiele:

1) Für jede nichtleere Menge X ist I_X bijektiv.

2) pr_1 und pr_2 (wie oben definiert) sind surjektiv, jedoch nicht injektiv.

3) Für $r \in \mathbb{Q}$ ist die Potenzfunktion $F : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = x^r$ injektiv und es gilt $F^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}}$, $y \in R(F)$.

Eigenschaften 1.18
Es sei F eine Abbildung von X in Y, seien $A, \tilde{A} \subseteq X$, $B, \tilde{B} \subseteq Y$.

1) $A \neq \emptyset \Longleftrightarrow F(A) \neq \emptyset$

2) $A \subseteq \tilde{A} \Longrightarrow F(A) \subseteq F(\tilde{A})$

3) $F(A \cap \tilde{A}) \subseteq F(A) \cap F(\tilde{A})$; *Gleichheit, falls* F^{-1} *eindeutig.*

4) $F(A \cup \tilde{A}) = F(A) \cup F(\tilde{A})$

5) $F(A) = pr_2(F \cap (A \times Y))$, $F^{-1}(B) = pr_1(F \cap (X \times B))$

6) $D(F) = R(F^{-1})$, $D(F^{-1}) = R(F)$

7) $F^{-1}(B \cap \tilde{B}) \subseteq F^{-1}(B) \cap F^{-1}(\tilde{B})$; *Gleichheit, falls* F *eindeutig.*

8) $F^{-1}(B \cup \tilde{B}) = F^{-1}(B) \cup F^{-1}(\tilde{B})$

9) $F(F^{-1}(B)) = B \cap R(F)$, *falls* F *eindeutig,*

10) $F^{-1}(F(A)) = A$, *falls* F *injektiv,*

11) $pr_1^{-1}(A) = A \times Y$, $pr_2^{-1}(B) = X \times B$

12) $Z \subseteq pr_1(Z) \times pr_2(Z)$ *für jedes* $Z \subseteq X \times Y$.

<u>Beweis:</u>

1) und 2) sind klar.

3) Sei $y \in F(A \cap \tilde{A}) \rightsquigarrow \exists x \in A \cap \tilde{A} : (x, y) \in F \rightsquigarrow x \in A$ und $x \in \tilde{A}$
$\rightsquigarrow y \in F(A)$ und $y \in F(\tilde{A}) \rightsquigarrow$ Aussage.
Es sei nun F^{-1} eindeutig und es sei $y \in F(A) \cap F(\tilde{A})$.

$$\rightsquigarrow \left.\begin{array}{lcl} \exists x \in A : F(x) \ni y & \Longleftrightarrow & x = F^{-1}(y) \\ \exists \tilde{x} \in \tilde{A} : F(\tilde{x}) \ni y & \Longleftrightarrow & \tilde{x} = F^{-1}(y) \end{array}\right\} x = \tilde{x} \in A \cap \tilde{A}$$

$\rightsquigarrow y \in F(A \cap \tilde{A})$.

4) ist klar (bzw. Übung), ebenso 6).

5) Wir beweisen stellvertretend die erste Beziehung:

$$\begin{array}{lcl} \text{Sei } y \in F(A) & \rightsquigarrow & \exists x \in A : (x, y) \in F \\ & \rightsquigarrow & \exists x \in X : (x, y) \in F \cap (A \times Y) \\ & \rightsquigarrow & y \in pr_2(F \cap (A \times Y)) \end{array}$$

Umgekehrt: Sei $y \in pr_2(F \cap (A \times Y))$
$\rightsquigarrow \exists x \in X : (x, y) \in F \cap (A \times Y) \rightsquigarrow x \in A$ und $(x, y) \in F$
$\rightsquigarrow y \in F(A)$.

7) beweist man analog zu 3), 8) analog zu 4) (Übung).

9) Sei F eindeutig und zunächst $y \in F(F^{-1}(B))$.
$\rightsquigarrow \exists x \in F^{-1}(B) : (x, y) \in F$, d.h. $F(x) = y$
$\rightsquigarrow \exists \tilde{y} \in B : (x, \tilde{y}) \in F \rightsquigarrow F(x) = \tilde{y} = y$
$\rightsquigarrow y \in B \cap R(F)$.
Sei nun $y \in B \cap R(F)$ bel. $\rightsquigarrow \exists x \in X : (x, y) \in F$ gdw. $(y, x) \in F^{-1}$ gdw. $x \in F^{-1}(y) \subseteq F^{-1}(B)$
$\rightsquigarrow y \in F(x) \subseteq F(F^{-1}(B))$.

10) analog (Übung), 11) und 12) sind klar. □

Definition 1.19
Es seien X, Y, Z beliebige Mengen und $F \subseteq X \times Y$, $G \subseteq Y \times Z$ seien Abbildungen.
Die Abbildung $G \circ F := GF := \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y$ mit $(x, y) \in F$ und $(y, z) \in G\}$ heißt die "Hintereinanderausführung" oder "Zusammensetzung" der Abbildungen F und G.

Eigenschaften 1.20
Seien $F \subseteq X \times Y$, $G \subseteq Y \times Z$, $H \subseteq Z \times W$ Abbildungen. Dann gilt:

a) $G \circ F(A) = G(F(A))$ *für jedes* $A \subseteq X$,

b) $D(G \circ F) \subseteq D(F)$ *und es gilt Gleichheit, falls* $R(F) \subseteq D(G)$,

c) $H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$,

d) $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Beweis:

a) Sei $A \subseteq X$.

$$\begin{aligned} G \circ F(A) &= \{z \in Z : \exists x \in A \text{ mit } (x, z) \in G \circ F\} \\ &= \{z \in Z : \exists x \in A \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in F \text{ und } (y, z) \in G\} \\ &= \{z \in Z : \exists y \in F(A) \text{ und } (y, z) \in G\} \\ &= G(F(A)) \end{aligned}$$

b) Übung, c) ist klar.

d) Sei $(z, x) \in (G \circ F)^{-1} \rightsquigarrow (x, z) \in G \circ F$
$\rightsquigarrow \exists y \in Y : (x, y) \in F$ und $(y, z) \in G$
$\rightsquigarrow \quad (y, x) \in F^{-1}$ und $(z, y) \in G^{-1}$
$\rightsquigarrow (z, x) \in F^{-1} \circ G^{-1} \rightsquigarrow (G \circ F)^{-1} \subseteq F^{-1} \circ G^{-1}$
Die andere Inklusion folgt aus der Umkehr der Schlüsse. □

Definition 1.21
Es seien L und X zwei nichtleere Mengen.
Eine (eindeutige) Abbildung von L in X nennt man auch eine "Familie von Elementen von X mit Indexmenge L"
Bezeichnung: $\lambda \to x_\lambda$ $(\lambda \in L)$, $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ *oder* (x_λ) *(falls kein Mißverständnis möglich ist.)*
Ist L eine endliche oder unendliche Teilmenge von $I\!N_o$, so heißt $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ auch (endliche oder unendliche) Folge. x_λ heißt dann Folgenglied (oder Folgenelement) mit dem Laufindex λ.
Ist $L' \subseteq L$, so heißt die Einschränkung der Abbildung von L in X auf L' Teil-oder Unterfamilie von $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$.
Bei Folgen spricht man von Teilfolgen.

Bemerkung 1.22
Beim Familien- bzw. Folgenbegriff muß klar unterschieden werden zwischen
- der Familie $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ als Abbildung, und
- dem Wertebereich $\{x_\lambda : \lambda \in L\} \subseteq X$ der Abbildung.
Mit der Definition einer Folge als Abbildung mit Definitionsbereich enthalten in $I\!N_o$, bringt man die Vorstellung der Anordnung und Aufeinanderfolge der Folgenglieder zum Ausdruck. Folgen und ihre Eigenschaften, sowie Abbildungen überhaupt, spielen eine fundamentale Rolle in der Analysis.
Beispiele für (unendliche) Folgen in $I\!R$: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in I\!N}$, $(1)_{n \in I\!N}$.

Definition 1.23
Es seien X und Y Mengen.

a) *X und Y heißen gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung von X auf Y existiert. Schreibweise: $X \sim Y$.*

b) *X heißt endlich, wenn $X = \emptyset$ oder ein $m \in I\!N$ existiert, so daß $X \sim \{n \in I\!N : n \leq m\}$.*

c) *X heißt abzählbar, wenn $X \sim I\!N$.*

d) *X heißt höchstens abzählbar,wenn X endlich oder abzählbar ist.*

e) *X heißt überabzählbar,wenn X nicht höchstens abzählbar ist.*

Bemerkung 1.24
Die "Gleichmächtigkeits–Relation" $\sim$ von Mengen ist eine Äquivalenzrelation, d.h. es gilt:

$$X \sim Y, X \sim Y \Longleftrightarrow Y \sim X, X \sim Y \text{ und } Y \sim Z \Longrightarrow X \sim Z; (\textit{Übung}).$$

Die Endlichkeit bzw. Abzählbarkeit von Mengen X stellt eine "Numerierungsmöglichkeit" der Elemente dar. Üblicherweise schreibt man:

$$X = \{x_1, \ldots, x_m\} \quad \text{für } X \sim \{n \in I\!N : n \leq m\},$$
$$X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \quad \text{für } X \sim I\!N.$$

Eigenschaften 1.25

a) *Für jede nichtleere endliche Menge X existiert genau ein $m \in I\!N$ mit $X \sim \{n \in I\!N : n \leq m\}$.*

b) *Jede nicht endliche Menge enthält eine abzählbare Teilmenge.*

c) *Eine Menge ist genau dann nicht endlich, wenn sie zu einer echten Teilmenge gleichmächtig ist.*

d) *Jede abzählbare Menge ist nicht endlich.*

Beweis:

a) Übung (Hinweis: Anderenfalls würden $m_1, m_2 \in I\!N$, $m_1 < m_2$ existieren; so daß $\{n \in I\!N : n \leq m_1\} \sim \{n \in I\!N : n \leq m_2\}$. Man zeige, daß dies unmöglich ist.).

b) Es sei X eine nicht endliche Menge. Dann existiert $x_1 \in X$, so daß $X \backslash \{x_1\} \neq \emptyset$. Induktiv existiert für jedes $n \in I\!N$,

$x_{n+1} \in X \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $X \backslash \{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \neq \emptyset$.

Dieser Prozeß bricht also nicht ab, da sonst X endlich wäre, und $\tilde{X} := \{x_n : n \in I\!N\}$ ist folglich eine abzählbare Teilmenge von X.

c) Ist X zu einer echten Teilmenge gleichmächtig, so kann X nach Teil a) nicht endlich sein. Ist umgekehrt X nicht endlich, aber (zunächst) abzählbar, d.h. $X = \{x_n : n \in I\!N\}$, so ist X gleichmächtig zu $\{x_n : n \in I\!N, n \geq 2\}$ (Bijektion: $x_i \rightarrow x_{i+1}, i \in I\!N\}$. Ist X überabzählbar, so existiert nach b) eine abzählbare Teilmenge $\{x_n : n \in I\!N\}$. Mit der bijektiven Abbildung

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow x, & \forall x \in X \backslash \{x_n : n \in I\!N\} \\ x_i \rightarrow x_{i+1}, i \in I\!N, & \end{array}$$

von X auf $X \backslash \{x_1\}$ ist dann X ebenfalls gleichmächtig zu einer echten Teilmenge.

d) Anderenfalls wäre $I\!N$ endlich und es müßte für ein gewisses $m \in I\!N, I\!N \sim \{n \in I\!N : n \leq m\}$ gelten. Dies ist aber nach Teil c) unmöglich. □

Lemma 1.26
Es sei $A \subset I\!R$ nichtleer und endlich. Dann existieren eindeutig bestimmte $a, b \in A$, so daß $a \leq x \leq b$, $\forall x \in A$.

Beweis
Den Existenzbeweis führen wir durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$\begin{array}{rl} & A \sim \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}. \\ n = 1: & A = \{a_1\} \rightsquigarrow a = b := a_1. \end{array}$$

Die Existenz sei nun für n bewiesen und wir betrachten eine Menge A mit $A \sim \{m \in \mathbb{N} : m \leq n+1\}$, d.h. $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Nach Voraussetzung existieren dann $i_n, j_n \in \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$ so daß $a_{i_n} \leq a_k \leq a_{j_n}$, $\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n$.
Wir definieren nun:

$$\begin{aligned} a &:= \min\{a_{i_n}, a_{n+1}\} \\ b &:= \max\{a_{j_n}, a_{n+1}\} \end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage auch für $n+1$. $\square$

Schreibweise:

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\} \rightsquigarrow \begin{array}{l} b := \max A = \max\{a_i : i = 1, \ldots, n\} \\ a := \min A = \min\{a_i : i = 1, \ldots, n\} \end{array} \text{ (gemäß 1.26).}$$

Satz 1.27

a) *Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist höchstens abzählbar.*

b) *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.*

Beweis:

a) Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, die nicht endlich ist.
Wir zeigen: X ist abzählbar.
Dazu definieren wir folgende Abbildung

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{N} \to X, & f(n) := x_n, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ wobei} \\ x_1 := \min X, & x_n := \min(X \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}) \text{ (induktiv)} \end{array}$$

jeweils gemäß Satz 1.9 definiert sind.
Wir zeigen nun: f ist bijektiv ($\rightsquigarrow \mathbb{N} \sim X$).
Nach induktiver Definition gilt zunächst $x_i < x_n$, falls $i < n$, und $n \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deshalb ist f injektiv.
Um zu zeigen, daß f auch surjektiv ist, sei nun $a \in X$ bel. gewählt. O.B.d.A. gelte $a > x_1$ (sonst $f(1) = a$) und wir definieren $m := \max\{n \in \mathbb{N} : x_n < a\}$ (gemäß 1.26!).
Nach Konstruktion gilt dann aber: $x_{m+1} = a$, d.h. $f(m+1) = a$. $\rightsquigarrow \forall a \in X\ \exists n \in \mathbb{N} : f(n) = a$, d.h. f ist surjektiv. Damit ist alles bewiesen.

b) Wir betrachten die folgende Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(m,n) := n + \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1), \quad \forall m,n \in \mathbb{N}.$$

Diese Abbildung ist injektiv (Übung).
Deshalb ist das bijektive Bild von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ und diese ist nach Teil a) höchstens abzählbar. Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aber nicht endlich ist (vgl. auch 1.25c)), ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar.
(Die definierte Abbildung f kann als Numerierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach dem sog. Cantorschen Diagonalprinzip interpretiert werden. Sortiert man nämlich die Werte von f entsprechend der Ordnungsrelation $\leq$ und numeriert diese neu durch, so entspricht dies dem folgenden "Abzähl-Verfahren":

(Die eingezeichneten Kreuze $\times$ entsprechen dabei jeweils einem Paar (m,n))
$\square$

Satz 1.28

a) *Ist X eine abzählbare Menge und f eine Abbildung von X auf eine Menge Y. Dann ist Y höchstens abzählbar.*

b) *Ist L eine höchstens abzählbare Indexmenge und sind X_λ, $\lambda \in L$, höchstens abzählbare Mengen, so ist die Menge $\tilde{X} := \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ höchstens abzählbar.*

c) *Ist X überabzählbar und $Y \subset X$ höchstens abzählbar, so sind X und $X \backslash Y$ gleichmächtig.*

Beweis:

a) Es sei $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ und wir betrachten die Abbildung $g : I\!N \to Y$, $g(n) := f(x_n)$, $\forall n \in I\!N$.
Nach Voraussetzung ist g surjektiv. Deshalb kann man die folgende Abbildung $h : Y \to I\!N$ definieren:

$$h(y) := \min\{n \in I\!N : g(n) = y\}, \quad \forall y \in Y$$

(für jedes $y \in Y$ ist die Menge $\{n \in I\!N : g(n) = y\}$ nichtleer. Nach Satz 1.9 existiert deshalb ein kleinstes Element dieser Menge.)
Nach Konstruktion gilt: $g(h(y)) = y$, $\forall y \in Y$, und h ist eine eindeutige Abbildung. Ist h injektiv? Zu zeigen: $h(y_1) = h(y_2) \longrightarrow y_1 = y_2$
Annahme: $y_1 < y_2$ und $n_1 := h(y_1) = n_2 := h(y_2) \rightsquigarrow y_1 = g(n_1) < y_2 = g(n_2)$ und andererseits $g(n_1) = g(n_2)$, da $n_1 = n_2$, Widerspruch!
Deshalb ist h injektiv und folglich eine Bijektion von Y auf $h(Y) \subseteq I\!N$.
Da nach Satz 1.27a) $h(Y)$ höchstens abzählbar ist, gilt dies schließlich auch für Y.

b) Nach Voraussetzung existieren surjektive Abbildungen $n \to \lambda_n$ (von $I\!N$ auf L) und $m \to x_\lambda^{(m)} \in X_\lambda$)d.h. $X_\lambda = \{x_\lambda^{(1)}, \ldots, x_\lambda^{(m)}, \ldots\}$ oder X_λ endlich).
Wir definieren nun eine Abbildung $F : I\!N \times I\!N \to \tilde{X}$

$$f(m, n) := x_{\lambda_n}^{(m)}, \quad \forall (m, n) \in I\!N \times I\!N.$$

Diese Abbildung ist nach Konstruktion surjektiv. Nach Satz 1.27b) ist $I\!N \times I\!N$ abzählbar. Deshalb folgt aus Satz 1.28a), daß $\tilde{X}$ höchstens abzählbar ist.

c) Da Y höchstens abzählbar ist, muß $X\backslash Y$ überabzählbar sein (anderenfalls wäre nach Teil b) auch $X = (X\backslash Y) \cup Y$ höchstens abzählbar).
Nach 1.25d) existiert eine abzählbare Teilmenge Y_1 von $X\backslash Y$ und wir definieren $Z := (X\backslash Y)\backslash Y_1$.
$\rightsquigarrow X = Z \cup (Y \cup Y_1)$ und $X\backslash Y = Z \cup Y_1$.
Wir definieren nun eine Abbildung $f : X \to X\backslash Y$ wie folgt $f(x) := x$, $\forall x \in Z$, und $f|_{Y \cup Y_1} : Y \cup Y_1 \to Y_1$ bijektiv (was möglich ist, da beide Mengen abzählbar sind). Damit ist die Abbildung f insgesamt bijektiv, d.h. $X\backslash Y$ ist gleichmächtig zu X. $\square$

Beispiel: ("Hilberts Hotel")
Ein Hotel besitze abzählbar viele Zimmer und sei voll belegt. G_n bezeichne den Gast im Zimmer mit der Nummer $n \in I\!N$. Plötzlich erscheinen abzählbar viele neue Gäste $g_n, n \in I\!N$, und fragen nach Zimmern.
(Nach Satz 1.28b) ist die Menge $\{G_n : n \in I\!N\} \cup \{g_n, n \in I\!N\}$ wieder abzählbar und kann folglich im Hotel untergebracht werden!)

Der Portier verteilt die Zimmer wie folgt neu: G_n wohnt in Zimmer $2n$, g_n wohnt in Zimmer $2n+1, n \in \mathbb{N}$. ("Paradoxon" der Abzählbarkeit)
(Nebenbei: das Hotel ist nichteinmal mehr voll belegt: Zimmer 1 ist frei!!)

1.4 Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

Satz 1.29
Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis:
Wir betrachten zunächst die Menge $\{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$ und die Abbildung
$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$, $f(m,n) := \frac{m}{n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.
Diese Abbildung f ist nach Definition von $\mathbb{Q}$ surjektiv. Nach Satz 1.27b) ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar.
Deshalb ist Satz 1.28a) anwendbar und liefert: $\{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$ ist höchstens abzählbar. Wegen $\mathbb{N} \subset \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$, ist $\{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$ abzählbar.
Analog zeigt man: $\{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$ ist abzählbar.
Aus Satz 1.28b) folgt dann:
$\mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\} \cup \{0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$ ist abzählbar. $\square$

Unser nächstes Ziel besteht nun darin, zu zeigen, daß die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist. Dazu benötigen wir eine bestimmte Darstellung reeller Zahlen, die wir jetzt vorbereiten.

Lemma 1.30
Es seien $K \in \mathbb{N}_o, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ und $z_i \in \{n \in \mathbb{N}_o : n \leq m-1\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, so daß

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

wobei $a_n := \sum\limits_{i=1}^{n} z_i m^{k-i}$, $b_n := a_n + m^{k-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Nach Definition gilt: $0 \leq a_n < b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} z_i m^{k-i} + m^{k-(n+1)} &= a_n + (z_{n+1}+1) m^{k-(n+1)} \\ &\leq a_n + m \cdot m^{k-(n+1)} = b_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Da $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist (mit b_1), definieren wir nun $x := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Dann gilt: $x \geq 0$ und $a_n \leq x$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Wir zeigen: $x \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\underline{\text{Annahme:}}$ $\exists \bar{n} \in I\!N : x > b_{\bar{n}}$
$\rightsquigarrow x > b_{\bar{n}} \geq b_n > a_n, \forall n \geq \bar{n}.$
$\rightsquigarrow x > \frac{1}{2}(x + b_{\bar{n}}) > b_{\bar{n}} > a_n, \forall n \geq \bar{n}.$
$\rightsquigarrow$ x ist nicht kleinste obere Schranke von $\{a_n : n \in I\!N\}$.
Also gilt:

$$x \in \bigcap_{n \in I\!N} [a_n, b_n]$$

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von x.
$\underline{\text{Annahme:}}$ $\exists x, y \in \bigcap\limits_{n \in I\!N} [a_n, b_n]$ mit $x \neq y$, o.B.d.A. $x < y$,
$\rightsquigarrow a_n \leq x < y < a_n + m^{k-n} \rightsquigarrow 0 < y - x \leq b_n - a_n = m^{k-n} = \frac{m^k}{m^n}, \forall n \in I\!N.$
Ferner existiert nach Satz 1.8 ein $\tilde{n} \in I\!N$ mit $\frac{1}{\tilde{n}} < y - x$, $\tilde{n} \geq 2$.
Daraus folgt für alle $n \geq k + \tilde{n}$:

$$\frac{1}{2^{\tilde{n}}} < \frac{1}{\tilde{n}} < y - x \leq m^{k-n} = \frac{1}{m^{n-k}} \leq \frac{1}{2^{n-k}} \leq \frac{1}{2^{\tilde{n}}} \rightsquigarrow \text{ Widerspruch!}$$

$\square$

Satz 1.31
Es seien $m \in I\!N$, $m \geq 2$ und $x \in I\!R$, $x \geq 0$.
Dann existieren $k \in I\!N_o$ und $z_i \in \{n \in I\!N_o : n \leq m - 1\}$, $i \in I\!N$, so daß

$$x \in \bigcap_{n \in I\!N} [a_n, b_n[$$

wobei $a_n := \sum\limits_{i=1}^{n} z_i m^{k-i}$, $b_n := a_n + m^{k-n}$, $\forall n \in I\!N$.

<u>Beweis:</u>
Wir definieren die folgende Abbildung $G : \{y \in I\!R : y \geq 0\} \to I\!N$ mit $G(y) := \min\{n \in I\!N : y < n\}$ (Satz 1.9!).
Dann gilt: $G(y) - 1 \leq y < G(y)$, $\forall y \in I\!R$, $y \geq 0$.
Wir betrachten weiterhin $M := \{n \in I\!N_o : m^n > x\}$.
Für jedes $n \geq \frac{x}{m-1}$ folgt aus Satz 1.11b):

$x < x + 1 \leq n(m-1) + 1 \leq (m - 1 + 1)^n = m^n \rightsquigarrow n \in M$. Also gilt $M \neq \emptyset$.
Nach Satz 1.9 existiert $k := \min M$.
Wir definieren nun

$$z_1 := G(\frac{x}{m^{k-1}}) - 1 \in I\!N_o.$$

$\rightsquigarrow z_1 = G(\frac{x}{m^{k-1}}) - 1 \leq \frac{x}{m^{k-1}} < G(\frac{x}{m^{k-1}} = z_1 + 1$
$\rightsquigarrow z_1 m^{k-1} = a_1 \leq x < (z_1 + 1)m^{k-1} = b_1$ (d.h. $x \in [a_1; b_1[$)

und $z_1 < m$ (da $m^k > x \rightsquigarrow m > fracxm^{k-1} \geq z_1$).
Induktiv setzen wir fort wie folgt: ($j \in I\!N$)

$$z_j := G\left(\frac{1}{m^{k-j}}(x - \sum_{i=1}^{j-1} z_i m^{k-i})\right) - 1 \in I\!N_o$$

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow \quad z_j \leq \tfrac{1}{m^{k-j}}(x - \textstyle\sum_{i=1}^{j-1} z_i m^{k-i}) < z_j + 1 \\
&\rightsquigarrow \quad z_j m^{k-j} \leq (x - \textstyle\sum_{i=1}^{j-1} z_i m^{k-i}) < z_j m^{k-j} + m^{k-j} \\
&\rightsquigarrow \quad a_j \leq x < a_j + m^{k-j} = b_j
\end{aligned}$$

und nach Induktionsvoraussetzung gilt: $a_{j-1} \leq x < b_{j-1}$
$\rightsquigarrow z_j \leq \frac{1}{m^{k-j}}(x - a_{j-1}) < \frac{1}{m^{k-j}}(b_{j-1} - a_{j-1}) = m$
Insgesamt ist damit die Existenz von $k \in I\!N$, $z_i \in I\!N_o$, $z_i \leq m-1$, $\forall i \in I\!N$ gezeigt, so daß $x \in \bigcap_{n \in I\!N} [a_n, b_n[$. $\square$

Bemerkung 1.32
In Satz 1.31 sind $k \in I\!N_o$ und die $z_i \in \{n \in I\!N_o : n \leq m-1\}$, $i \in I\!N$, nach Konstruktion für beliebiges $x \in I\!R$, $x \geq 0$ eindeutig bestimmt. Nach Lemma 1.30 und seinem Beweis erlaubt dies die Zuordnung

$$x = \sup\{\sum_{i=1}^{n} z_i m^{k-i} : n \in I\!N\} =: z_1 z_2 \cdots z_k . z_{k+1} z_{k+2} \cdots .$$

Letzteres heißt die <u>"m-Darstellung"</u> von $x \in I\!R$, $x \geq 0$. (Für $m = 2$ spricht man von <u>Dual–Darstellung</u> und für $m = 10$ von <u>Dezimal–Darstellung</u>.)
k entspricht der Anzahl der "Ziffern" vor dem Komma, d.h. so daß $m^{k-1} \in I\!N$, $i = 0, \ldots, K$.
Nach Konstruktion ist die Ziffer z_j die Zahl in $I\!N_o$, so daß

$$z_j m^{k-j} \leq x - \sum_{i=1}^{j-1} z_i m^{k-i} < (z_j + 1) m^{k-j}, \quad \forall j \in I\!N,$$

und $k \in I\!N_o$ hat die Eigenschaft $k := \min\{n \in I\!N_o : x < m^n\}$. Für $m = 10$ ist dies das übliche Prinzip der Dezimal–Darstellung.

<u>Beispiel:</u> $x = \frac{1}{2}$ *und* $m = 10 \rightsquigarrow k = 0, z_1 = 5 \rightsquigarrow x = .500\cdots$.
(Klar ist auch, daß die andere Variante der Konstruktion denkbar ist: $a_n < x \leq b_n$, $\forall n \in I\!N$.
Nach Lemma 1.30 ist auch dadurch dasselbe $x \in I\!R$ bestimmt. Hier erhält man für $x = \frac{1}{2}$ gerade $x = .4999\cdots$. Die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl ist also in <u>diesem</u> Sinne nicht eindeutig.)

Bemerkung 1.33 *(Computer–Zahlen und –Arithmetik)*
Gemäß obiger Dezimal–Darstellung reeller Zahlen kann jedes $x \neq 0$ dargestellt werden in der Form

$$x = \pm .z_1 z_2 \cdots \cdot 10^e, \quad z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\},$$

wobei $\pm .z_1 z_2 \cdots$ Mantisse und $e \in Z$ Exponent heißt.
Dabei setzt man normierend $z_1 \neq 0$ voraus.

Problem: Im Computer können nur endlich viele Stellen berücksichtigt werden. Ferner sind auch andere Basen als $m = 10$ interessant.
Menge der Computer–Zahlen:

$$R(m, t, E_1, E_2) := \{\pm .z_1 z_2 \cdots z_t \cdot m^e \ : \ z_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, \\ i = 1, \ldots, t, -E_1 \leq e \leq E_2\}$$

wobei $m, t, E_1, E_2 \in I\!N$, $m \geq 2$.
(m-Basis, t-Mantissenlänge, $[-E_1, E_2]$ Exponentenbereich;
Normierung: $z_1 \geq 0$ oder $z_1 = z_2 = \cdots = z_t = 0$ und $e = -E_1$)

Darstellung reeller Zahlen durch Computerzahlen mit Hilfe der sog. Rundungsfunktion $\mathrm{rd} : I\!R \to R(m, t, E_1, E_2)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rd}(x) &:= 0, \text{falls } 0 \leq |x| < \mathrm{Min} := m^{-E_1-1} \\
\mathrm{rd}(x) &:= x(1 + \varepsilon(x)) \quad \text{mit } |\varepsilon(x)| \leq 0.5 m^{1-t} \text{ falls Min} \leq |x| \leq \mathrm{Max} \ = m^{E_2} \\
\mathrm{rd}(x) &:= \pm m^{E_2} \quad \text{falls } x > m^{E_2} \text{ bzw. } x < -m^{E_2}
\end{aligned}$$

($rd(x)$ ist die x am nächsten gelegene Computerzahl.)

Für Computerzahlen x, y ist $x \diamondsuit y$, $\diamondsuit \in \{+, -, \cdot, /\}$, in der Regel keine Computerzahl.
Postulat: Die Computer–Arithmetik in $R(m, t, E_1, E_2)$ arbeite so, daß für $x, y \in R$ mit $x \diamondsuit y \in [-\mathrm{Max}, \mathrm{Max}]$

$$\mathrm{fl}(x \diamondsuit y) = \mathrm{rd}(x \diamondsuit y) \quad \text{gilt,}$$

wobei $\mathrm{fl}(x \diamondsuit y)$ das Computer–Resultat von $x \diamondsuit y$ ist.

Eine Konsequenz dessen ist, daß (falls nicht moderne Systeme verwendet werden, die Rundungsfehler fast vermeiden) normalerweise in numerischen Prozessen Rundungsfehler auftreten, deren Ausbreitung untersucht werden muß.

Satz 1.34
Die Menge $]0, 1[\subset I\!R$ ist überabzählbar.

Beweis:
$]0,1[$ ist nicht endlich, da $\frac{1}{n} \in]0,1[, \forall n \in I\!N$.
Annahme: $]0,1[$ ist abzählbar, d.h. es ist eine Durchnumerierung möglich: $]0,1[= \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.
Nach Satz 1.31 läßt sich jedes $x_i, i \in I\!N$, in Dezimal–Darstellung schreiben:

$$x_i = .z_{1i}z_{2i}z_{3i}\cdots, z_{ji} \in \{0,1,\ldots,9\}, \forall i,j \in I\!N.$$

Wir wählen nun für alle $i \in I\!N : z_i \in \{1,2,\ldots,8\}\backslash\{z_{ii}\}$.
Für $k = 1, m = 10$ und die eben gewählten z_i, $i \in I\!N$, existiert nach Lemma 1.30 eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $x \in I\!R$, $x \geq 0$ mit

$$x \in \bigcap_{n \in I\!N} [a_n, b_n], \text{ nämlich } x = \sup\{\sum_{i=1}^{n} z_i 10^{k-i} : n \in I\!N\}.$$

Nach Satz 1.31 hat x die Dezimal–Darstellung:

$$x = .z_1 z_2 z_3 \cdots$$

Nach Konstruktion gilt aber: $x \in]0,1[$ und $x \neq x_i$, $\forall i \in I\!N$.
(Letzteres gilt, da die Dezimal–Darstellung einer reellen Zahl $x \geq 0$ eindeutig bestimmt ist!)
Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme! $\Box$

Folgerung 1.35
$I\!R$ und $I\!R\backslash Q\!\!\!\!I$ sind überabzählbar und gleichmächtig.

Beweis:
Wäre $I\!R$ abzählbar, so würde aus Satz 1.27 a) folgen, daß $]0,1[\subset I\!R$ höchstens abzählbar ist. Dies widerspricht Satz 1.34!
$\leadsto$ $I\!R$ ist überabzählbar.
Wäre $I\!R\backslash Q\!\!\!\!I$ abzählbar, so auch $(I\!R\backslash Q\!\!\!\!I) \cup Q\!\!\!\!I = I\!R$ nach Satz 1.29 bzw. 1.28 b).
$\leadsto$ $I\!R\backslash Q\!\!\!\!I$ ist überabzählbar.
Die Gleichmächtigkeit von $I\!R$ und $I\!R\backslash Q\!\!\!\!I$ folgt aus Satz 1.28 c). $\Box$

Folgerung 1.35 zeigt also, daß es "viel mehr" irrationale Zahlen als rationale gibt.
Im folgenden führen wir nun weitere Mengen (neben $I\!R$) als Grundstrukturen der Analysis ein. Basis ist dafür aber stets $I\!R$!

1.5 Der m-dimensionale Euklidische Raum

Für jede natürliche Zahl m betrachten wir die Menge

$\underline{I\!R^m} := \underbrace{I\!R \times \ldots \times I\!R}_{m} = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in I\!R, i = 1, \ldots, m\}.$

Wir führen nun eine Addition " $+$ " und eine Multiplikation " $\cdot$ " mit reellen Zahlen ein:
Seien $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in I\!R^m, \alpha \in I\!R.$

$$
\begin{aligned}
x + y &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m) \\
\alpha \cdot x &:= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_m).
\end{aligned}
$$

Eigenschaften 1.36

(i) *$(I\!R^m, +)$ ist eine Abelsche Gruppe mit $\Theta = (0, 0, \ldots, 0)$ als "Nullelement".*

(ii) *$1 \cdot x = x, \quad \forall x \in I\!R^m,$*

(iii) *$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in I\!R^m, \forall \alpha, \beta \in I\!R,$*

(iv) *$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in I\!R^m, \forall \alpha \in I\!R,$*

(v) *$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad \forall x \in I\!R^m, \forall \alpha, \beta \in I\!R.$*

i) bis v) gilt offenbar, da der $I\!R^m$ die entsprechenden Eigenschaften von $I\!R$ "erbt".

Definition 1.37

a) *$(I\!R^m; +, \cdot)$ heißt m-dimensionaler linearer Raum (oder Vektorraum), Kurzbezeichnung: $I\!R^m$.*

b) *Die folgende Abbildung $< \cdot, \cdot >: I\!R^m \times I\!R^m \to I\!R$ definiert durch*

$$< x, y > := \sum_{i=1}^{m} x_i y_i, \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in I\!R^m,$$

heißt Skalarprodukt auf $I\!R^m$.
Die Abbildung $\| \cdot \| : I\!R^m \to I\!R$ definiert durch $\|x\| := < x, x >^{\frac{1}{2}}, \forall x \in I\!R^m$, heißt Euklidische Norm auf $I\!R^m$;
Die Zahl $\|x - y\|$ heißt Euklidischer Abstand von $x, y \in I\!R^m$;

c) *$(I\!R^m, \| \cdot \|)$ heißt m-dimensionaler Euklidischer Raum.*

Bemerkung 1.38
Später werden wir jede Abelsche Gruppe $(X, +)$, *für die eine Operation ("Multiplikation") mit Elementen eines Körpers* K *erklärt ist, die die Eigenschaften (ii)–(v) in 1.36 erfüllen, einen linearen Raum nennen.*
Die Elemente $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$ *("i-te Komponente gleich 1"),* $i = 1, \ldots, m$, *heißen "Einheitsvektoren" (oder: "kanonische Basis") von* $\mathbb{R}^m$.
Offenbar gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \quad \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Satz 1.39
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ *gilt die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung:*

$$| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$$

In der Ungleichung gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$ *die Gleichheit gdw.* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *existieren mit* $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ *und* $\alpha x + \beta y = \Theta$.

<u>Beweis:</u>
Der Fall $\|x\| = 0$ ist trivial, da die Ungleichung dann sicher richtig ist. Es gelte nun $\|x\| \neq 0$ und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^{m} (\alpha x_i + \beta y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{m} (\alpha^2 x_i^2) + \sum_{i=1}^{m} (2\alpha\beta x_i y_i) + \sum_{i=1}^{m} \beta^2 y_i^2 \\ &= \alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha\beta < x, y > + \beta^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Wir setzen nun speziell $\alpha := -\frac{<x,y>}{\|x\|}$, $\beta := \|x\|$ und erhalten
$0 \leq < x, y >^2 - 2 < x, y >^2 + \|x\|^2 \|y\|^2$, d.h. die behauptete Ungleichung.
Es seien nun $x, y \in \mathbb{R}^m$, so daß $< x, y >^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$.
Diese Gleichung ist entsprechend unseren obigen Überlegungen äquivalent zur Gleichung

$$0 = \sum_{i=1}^{m} (- < x, y > x_i + \|x\|^2 y_i)^2 \text{ (mit } \alpha := - < x, y >, \beta := \|x\| x^2)$$

$\Longleftrightarrow 0 = - < x, y > x_i + \|x\|^2 y_i, \quad \forall i = 1, \ldots, m,$
$\Longleftrightarrow \Theta = - < x, y > x + \|x\|^2 y \quad (*)$.
D.h. die Gleichheit in der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung gilt gdw. entweder ($x = \Theta$ oder $y = \Theta$) (und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ können entsprechend gewählt werden) oder $(*)$ gilt, d.h. $\alpha = - < x, y >$ und $\beta = \|x\|^2 \neq 0$. $\square$.

Satz 1.40
Für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0$ *gdw.* $x = \Theta$*;*

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$*;*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Minkowskische oder Dreiecks–Ungleichung)*

(iv) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

<u>**Beweis:**</u>

(i) und (ii) sind klar nach Definition $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(iii) Es seien $x, y \in \mathbb{R}^m$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{m}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m} x_i y_i + \sum_{i=1}^{m} y_i^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2| < x, y > | + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad \text{(Satz 1.39)} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

(iv) folgt aus der Definition des Betrages, sowie aus (iii) und den folgenden Ungleichungen:

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \quad \|y\| \leq \|y - x\| + \|x\|.$$

□

Bemerkung 1.41

Auf $\mathbb{R}^m$ kann man noch viele weitere "Normen", d.h. Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (i)-(iii) in 1.40, betrachten. Wichtige Beispiele:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} (p \in \mathbb{R}, p \geq 1), \|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,m} |x_i|$$

(die bisher betrachtete Euklidische Norm ist dann $\|\cdot\|_2$)
<u>*Übung:*</u> *Man beweise die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$, und für $\|\cdot\|_\infty$!*

1.6 Die komplexen Zahlen

Historische Motivation: Geeignete Erweiterung von $\mathbb{R}$, um $\sqrt{x}$ auch für $x < 0$ definieren zu können.
Ausgangspunkt: Kann $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ durch Einführung geeigneter Operationen zu einem Körper gemacht werden?
(in Kap. 1.5 wurde $\mathbb{R}^2$ zu einem linearen Raum)
Definition von Verknüpfungen " $+$ " bzw. " $\cdot$ " auf $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$:
$+$: wie in Kap. 1.5;
$\cdot$: $(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$, $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

Satz 1.42
$\mathbb{C} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$ *ist ein Abelscher Körper mit Nullelement* $(0, 0)$ *und Einselement* $(1, 0)$.
Bezeichnung: $\mathbb{C}$ *heißt Körper der komplexen Zahlen.*

Beweis:
Gemäß 1.36(i) ist $(\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, +)$ eine Abelsche Gruppe mit dem Nullelement $(0, 0)$.
Die Kommutativität der Verknüpfung "$\cdot$" ist sofort aus der Definition ersichtlich. Außerdem gilt:

$$(x, y)(1, 0) = (x - 0, 0 + y) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Falls $(x, y) \neq (0, 0)$, so gilt

$$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0)$$

d.h. das inverse Element existiert.
Nachzuweisen bleiben nun nur noch das Assoziativ– und das Distributivgesetz.
Wir rechnen als Beispiel das Distributivgesetz nach:
Seien $(x, y), (u, v), (w, z)$ beliebig gewählt,

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad & (x, y) \cdot ((u, v) + (w, z)) = (x, y) \cdot (u + w, v + z) = \\
= \quad & (x(u + w) - y(v + z), x(v + z) + y(u + w)) \\
= \quad & (xu - yv, xv + yu) + (xw - yz, xz + yw) \\
= \quad & (x, y) \cdot (u, v) + (x, y) \cdot (w, z)
\end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. $\square$

Bemerkung 1.43

a) *Alle Rechenregeln mit reellen Zahlen, die allein aus den Körper–Eigenschaften von* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *resultieren, lassen sich auf* $\mathbb{C}$ *übertragen. (Achtung bei allen Dingen, die aus der Ordnungsrelation abgeleitet wurden, z.B. die Wurzel)*

b) *Wir betrachten insbesondere die folgende Teilmenge* $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ *von* $\mathbb{C}$*. nach Definition gilt:*

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0), (x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$$

Vom Standpunkt algebraischer Strukturen besteht also kein Unterschied zwischen $x \in \mathbb{R}$ *und* $(x, 0) \in \mathbb{C}$*. Deshalb kann man* $\mathbb{R}$ *mit der Menge* $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ *identifizieren.*
Wir schreiben also $(x, 0) = x$*, insbesondere* $(0, 0) = 0, (1, 0) = 1$*. In diesem Sinne ist* $\mathbb{C}$ *eine Erweiterung von* $\mathbb{R}$*!*

c) *Bezeichnung:* $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ *(Euler 1777)*
Mit dieser Festlegung kann $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ *dargestellt werden als*

$$\begin{aligned} z &= (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) \\ &= (x, 0) + (y, 0)i \\ &= x + yi \quad \text{(entsprechend Teil b))} \end{aligned}$$

Dann heißt $\begin{array}{lll} x & \underline{\textit{Realteil}} \textit{ von } z \in \mathbb{C}: & \mathrm{Re} z := x \in \mathbb{R} \\ y & \underline{\textit{Imaginärteil}} \textit{ von } z \in \mathbb{C}: & \mathrm{Im} z := y \in \mathbb{R}. \end{array}$

Die komplexe Zahl $\bar{z} := (x, -y) = x - yi$ *heißt zu* $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ *konjugiert komplex.*

Die reelle Zahl $\begin{aligned} |z| &= |(x, y)| := \|(x, y)\| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (gemäß 1.37)} \\ &= ((\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$

heißt absoluter Betrag von $z \in \mathbb{C}$*.*

d) *Die komplexen Zahlen können wir als Punkte in der sog. komplexen (oder: Gaußschen) Zahlenebene auffassen:*

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= |z| \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} i \right) \\ &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \end{aligned}$$

Wobei gilt: $x = z \cos \varphi$, $y = z \sin \varphi$*.* $(\|z\|, \varphi)$ *heißen dann "Polarkoordinaten" von* $z \in \mathbb{C}$*.*

Eigenschaften 1.44 *(Übung)*

(i) $i^2 = (-1, 0) = -1$, $i^3 = -i, i^4 = 1$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $z = \bar{\bar{z}}$, $z \cdot \bar{z} = \|z\|^2$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$
$\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
(Weitere Eigenschaften des absoluten Betrages resultieren aus 1.40.)

(iii) $z \in \mathbb{R}$ *gdw.* $z = \bar{z}$

Bemerkung 1.45
Real– und Imaginärteil eines Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$ *bestimmt man am besten wie folgt:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)}{\|z_2\|^2}$$

$$\text{und} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)}{\|z_2\|^2}$$

Bemerkung 1.46

a) *Die Addition komplexer Zahlen entspricht der Addition zweier Vektoren im* $\mathbb{R}^2$*, also der Hintereinanderausführung von Verschiebungen. Durch die Abbildung* $T_{\tilde{z}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, T_{\tilde{z}}(z) = z + \tilde{z}$ *wird eine Menge* $A \subseteq \mathbb{C}$ *entlang dem Vektor* $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ *nach* $T_{\tilde{z}}(A) = A + \{\tilde{z}\}$ *verschoben.*

b) *Mit* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *und* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$*, sowie* $z_1z_2 = (r_1r_2)(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ *entspricht die Multiplikation* z_1z_2 *der Multiplikation der Beträge und der Addition der Winkel. Die Abbildung* $D_{\tilde{z}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, D_{\tilde{z}}(z) = z\tilde{z}$ *bewirkt (analog zu a)) eine Streckung um den Faktor* $\|\tilde{z}\| = \tilde{r}$ *und eine Drehung um* $\tilde{\varphi}$*, wobei das Zentrum jeweils in* $(0, 0)$ *liegt.*

c) *Die Abbildungen* $S_o : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, S_o(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ *und* $S_{\mathrm{Re}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, S_{\mathrm{Re}}(z) = \bar{z}$ *vermitteln die Spiegelung am Einheitskreis bzw. an der Realteilachse.*

Satz 1.47
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *hat die Gleichung* $z^n = 1$ *genau* n *verschiedene Lösungen, die sämtlich auf dem Einheitskreis* $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ *der Gaußschen Zahlenebene liegen.*

Beweis:
Wir schreiben z in der Form $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
$\rightsquigarrow z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (durch Induktion nach 1.46.b))
$\rightsquigarrow 1 = 1(\cos(k \cdot 360°) + i\sin(k \cdot 360°)$, $k \in Z$
wegen $z^n = 1$ folgt nach Gleichsetzung der obigen Ausdrücke:
$r = 1$ und $\varphi = \frac{k}{n}360°$
sei o.B.d.A. $\varphi \in [0°; 360°[$ und $k \in \{1; \ldots; n-1\}$
$\rightsquigarrow z_k = \cos(\frac{k}{n}360°) + i\sin(\frac{k}{n}360°)$, $k \in \{1; \ldots; n-1\}$ sind alle Lösungen von $z^n = 1$ und liegen auf dem Einheitskreis, da $r = 1$.

Bemerkung 1.48
Gemäß 1.44 (i) kann man für $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ definieren

$$x^{\frac{1}{2}} := \sqrt{-x}\, i \in \mathbb{C},$$

d.h. die eingangs formulierte Zielstellung ist erreicht.
Analog zu Kap. 1.5 kann man den linearen Raum $\mathbb{C}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ (mit Multiplikation von Elementen aus $\mathbb{C}$) einführen. Auch eine zur Euklidischen Norm analoge Norm bzw. ein analoges Skalarprodukt kann eingeführt werden:

$$\begin{aligned} < \tilde{z}, z > &:= \sum_{i=1}^{m} \tilde{z}_i \bar{z}_i \in \mathbb{C} \\ \|z\| &:= < z, z >^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} |z_i|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\forall z, \tilde{z} \in \mathbb{C})$$

2 Metrische Räume

Im Unterschied zur Untersuchung konkreter Mengen in Kap. 1 betrachten wir jetzt vor allem abstrakte Mengen, in denen lediglich ein sog. "Abstand" von Elementen definiert ist, wie wir es auch von $I\!R$, $I\!R^m$ und $\mathbb{C}$ kennen. Die Motivation für diesen Abstraktionsschritt besteht u.a. darin, daß

- zur Formulierung des in der Analysis grundlegenden Begriffs der Konvergenz und anderer mit ihm zusammenhängender Begriffe genau betrachtet nur der Abstand und seine Eigenschaften verwendet wird;
- in dieser "allgemeinen Sprache" einfache, das wesentliche enthaltende, Beweise der Ergebnisse möglich sind;
- durch die Allgemeinheit der Ergebnisse vielfältige Anwendungen auf konkrete Aufgabenstellungen bzw. Sachverhalte möglich sind.

2.1 Grundbegriffe metrischer Räume

Definition 2.1
Es sei X eine nichtleere Menge und $d : X \times X \to I\!R$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(I) $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$,
$d(x,y) = 0$ *gdw.* $x = y$;

(II) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$;

(III) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x, y, z \in X$
(Dreiecksungleichung).

Dann heißt (X,d) metrischer Raum und d heißt Metrik in X; $d(x,y)$ heißt Abstand der Elemente $x, y \in X$.

Beispiele 2.2

a) $X := I\!R$, $d(x,y) := |x-y|$, $\forall x, y \in I\!R$ *(vgl. Kap. 1.2, Satz 1.3)*
$X := \mathbb{C}$, $d(z_1,z_2) := |z_1 - z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *(vgl. Kap. 1.6)*

b)

$$\begin{aligned} X := I\!R^m, d(x,y) &:= \|x-y\|_p \quad (p \geq 1 \text{ oder } p = +\infty) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \forall x, y \in I\!R^m, p \in I\!R, p \geq 1 \\ &= \max_{i=1\ldots m} |x_i - y_i|, \quad p = +\infty. \end{aligned}$$

Hier resultieren die Eigenschaften (I) - (III) in Def. 2.1 aus den entsprechenden Eigenschaften der Normen.

c) *Es sei T eine nichtleere Menge und es bezeichne*
$B(T) := \{f : T \longrightarrow \mathbb{R} : \exists C > 0 \text{ mit } |f(t)| \leq C, \forall t \in T\}$, *d.h.*
$B(T)$ ist die Menge aller beschränkten Abbildungen von T in $\mathbb{R}$.
Nach Definition ist klar, daß
$\sup\{|f(t)| : t \in T\} =: \sup_{t\in T} |f(t)| \in \mathbb{R}, \forall f \in B(T)$.
Wir betrachten nun die folgende Abbildung
$d : B(T) \times B(T) \longrightarrow \mathbb{R},\ d(f, g) := \sup_{t\in T} |f(t) - g(t)|$.
Klar ist zunächst, daß $d(f, g) \geq 0$ und $d(f, g) = d(g, f)$ für alle $f, g \in B(T)$ gilt. Ferner folgt aus $d(f, g) = 0$, daß
$f(t) = g(t), \forall t \in T$, *d.h.*
$f = \{(t, f(t)) : t \in T\} = g = \{(t, g(t)) : t \in T\}$.
Wir beweisen noch die Dreiecksungleichung: Es seien $t \in T$ und $f, g, h \in B(T)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &\leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \leq d(f, h) + d(h, g) \\ \rightsquigarrow d(f, g) &= \sup_{t\in T} |f(t) - g(t)| \leq d(f, h) + d(h, g) \end{aligned}$$

Also ist $(B(T), d)$ ein metrischer Raum !

d) *<u>Frage:</u> Läßt sich auf jeder Menge $X \neq \emptyset$ eine Metrik definieren?*
Antwort:

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 \,, x \neq y \\ 0 \,, x = y \end{cases} \qquad (\forall x, y \in X)$$

Offenbar erfüllt d die Eigenschaften (I), (II) von 2.1. (III) gilt für $x = y$ trivialerweise, für $x \neq y$ ist $d(x, y) = 1$ und $d(x, z) + d(z, y) \geq 1$, da $z = x$ und $z = y$ nicht gleichzeitig gelten kann.
Also ist d eine Metrik in X. (X, d) heißt dann <u>diskreter metrischer Raum</u>.

e) *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \longrightarrow Y$ eine bijektive Abbildung. Dann ist die Abbildung $d_Y : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$d_Y(y, \tilde{y}) := d(f^{-1}(y), f^{-1}(\tilde{y})), \forall y, \tilde{y} \in Y,$$

eine Metrik in Y.

f) *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Abbildung*

$$d' : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, d'(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}, \forall x, y \in X,$$

ebenfalls eine Metrik in X (Übung).

g) *Es seien $(X_i, d_i), i = 1, 2$, metrische Räume. Dann ist $(X_1 \times X_2, d)$ mit $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$, $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$, ebenfalls ein metrischer Raum (Übung).*

Definition 2.3
Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) *Für alle $x \in X$ und $r > 0$ heißen $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ bzw. $\overline{B}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ offene bzw. abgeschlossene Kugel um $x \in X$ mit Radius r.*

b) *$U \subseteq X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls $\exists \varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.*

c) *Für $x \in X$ und $A \subseteq X, A \neq \emptyset$, heißt die reelle Zahl*

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y) := -\sup\{-d(x, y) : y \in A\}$$

Abstand von X zu A.

d) *$A \subseteq X$ heißt beschränkt, falls $\exists C > 0$ mit $d(x, y) \leq C, \forall x, y \in A$. In diesem Fall heißt $\operatorname{diam} A := \sup_{x,y \in A} d(x, y) \in I\!R$ Durchmesser von A.*

Beispiele 2.4

a) *Für $(X, d) = (I\!R, |\cdot|)$ gilt:*

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \,]x - r, x + r[\text{ und} \\ \overline{B}(x, r) &= [x - r, x + r]. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt z.B. $]a, b[= B(\frac{1}{2}(a + b), \frac{1}{2}(b - a)), \forall a, b \in I\!R$.

b) *Für $(I\!R^2, \|\cdot\|_2)$ hat $\overline{B}((0, 0), 1)$ die Gestalt $\overline{B}((0, 0), 1) = \{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ d.h., die Einheitskreisscheibe im $I\!R^2$. Man veranschauliche sich $\overline{B}((0, 0), 1)$ für $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ in $I\!R^2$ (Übung).*

c) *Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gilt für alle $x \in X$:*

$$\begin{aligned} B(x, r) &:= \{y \in X : d(x, y) < r\} \\ &= \begin{cases} \{x\} & , r \leq 1 \\ X & , r > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

d) *Es gilt stets: $\operatorname{diam} \overline{B}(x, r) \leq 2r$, $\forall x \in X$, $\forall r > 0$.*

Beweis: $$\begin{aligned} \operatorname{diam} \overline{B}(x, r) &= \sup_{y,z \in \overline{B}(x,r)} d(y, z) \leq \sup_{y,z \in \overline{B}(x,r)} [d(y, x) + d(x, z)] \\ &\leq r + r = 2r. \end{aligned}$$

e) *Ist $A \subseteq X$ beschränkt, so gilt $A \subseteq \overline{B}(x, diam(A))$, $\forall x \in A$.*
Beweis: sei $y \in A \rightsquigarrow d(x,y) \leq diam(A) \rightsquigarrow y \in \overline{B}(x, diam(A)$.

f) *Es gilt für $A \neq \emptyset : |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$, $\forall x, y \in X$. (Übung)*

Im folgenden sei (stets) (X,d) metrischer Raum.

Definition 2.5
$A \subseteq X$ heißt offen, wenn zu jedem $x \in A$ eine Umgebung $U \subseteq X$ von x existiert mit $U \subseteq A$. $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \backslash A$ offen ist.

Beispiele 2.6

a) $\emptyset$ und X sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

b) $B(x,r)$ ist offen, $\forall x \in X$ $\forall r > 0$.

Bew.: Sei $y \in B(x,r)$ und setze: $\varepsilon := r - d(x,y)$. Wir zeigen: $B(y,\varepsilon) \subseteq B(x,r)$.
Sei $z \in B(y,\varepsilon) \rightsquigarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \varepsilon = r$
$\rightsquigarrow z \in B(x,r)$.
Zu jedem $y \in B(x,r)$ ist also $U := B(y,\varepsilon)$ eine Umgebung mit den in Def. 2.5 gewünschten Eigenschaften. $\square$

c) $\overline{B}(x,r)$ ist abgeschlossen, $\forall x \in X$, $\forall r > 0$.

Bew: Wir zeigen: $X \backslash \overline{B}(x,r)$ ist offen. Es sei also $y \in X \backslash \overline{B}(x,r)$, d.h. $d(x,y) > r$. Wir setzen $\varepsilon := d(x,y) - r$. Wir zeigen:
$B(y,\varepsilon) \subseteq X \backslash \overline{B}(x,r)$. Sei $z \in B(y,\varepsilon)$. Dann gilt:
$d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y) > r \rightsquigarrow d(x,z) > d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - \varepsilon = r$
$\rightsquigarrow z \in X \backslash \overline{B}(x,r)$. $\square$

d) Ist $A \subseteq X$ offen, so gilt $A = \bigcup\limits_{x \in A} B(x, \varepsilon(x))$ mit geeignet gewählten $\varepsilon(x) > 0, \forall x \in A$.

Bew. Sei $x \in A$ bel.$\rightsquigarrow \exists$ Umgebung $U \subseteq X$ von x mit $U \subseteq A$
$\rightsquigarrow \exists \varepsilon(x) > 0 : B(x, \varepsilon(x)) \subseteq U \subseteq A$
$\rightsquigarrow \bigcup\limits_{x \in A} B(x, \varepsilon(x)) \subseteq A$. Die andere Inklusion ist trivial. $\square$

e) In einem diskreten metrischen Raum (vgl. 2.2 d)) ist jede Teilmenge $A \subseteq X$ offen und (damit auch) abgeschlossen.
genügt (nach Def. 2.5.) zu zeigen: A ist immer offen.
$\rightsquigarrow U := B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subseteq A$, $\forall x \in A$.

f) Für $X := \mathbb{R}$ ist die Menge $A := [0,1[$ weder offen noch abgeschlossen (Übung).

Satz 2.7
Es sei $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ eine Familie von Teilmengen der Menge X.

a) *Sind die Mengen $A_\lambda, \forall\lambda \in L$, offen bzw. abgeschlossen, so ist $\bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ offen bzw. $\bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ abgeschlossen.*

b) *Die Indexmenge L sei endlich.*
Sind die Mengen A_λ, $\forall\lambda \in L$, offen bzw. abgeschlossen, so ist $\bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ offen bzw. $\bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ abgeschlossen.

Beweis:

a) Es seien (zunächst) alle Mengen A_λ, $\lambda \in L$, offen und es sei $y \in \bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda := \{x \in X : \exists\lambda \in L \text{ mit } x \in A_\lambda\}$.
$\rightsquigarrow \exists\lambda_o \in L : y \in A_{\lambda_o}$.
Da A_{λ_o} offen ist, existiert eine Umgebung U von y mit $y \in U \subseteq A_{\lambda_o} \subseteq \bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$, d.h. $\bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ ist offen.
Es seien nun sämtliche A_λ, $\lambda \in L$, abgeschlossen. Dann folgt aus der Morgan'schen Regel (vgl. Kap.1.1):
$X\backslash(\bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda) = C_X(\bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in L} C_X(A_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in L}(X\backslash A_\lambda)$
Nun ist aber $X\backslash A_\lambda$ offen, $\forall\lambda \in L$, und nach dem soeben bewiesenen Teilresultat auch $\bigcup\limits_{\lambda\in L}(X\backslash A_\lambda)$ offen. Deshalb ist (nach Definition) $\bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ abgeschlossen.

b) Es sei L endlich und sämtliche A_λ, $\lambda \in L$, seien offen. Wir wählen $y \in \bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ beliebig.
$\rightsquigarrow \forall\lambda \in L \quad \exists\varepsilon_\lambda > 0$ mit $B(y,\varepsilon_\lambda) \subseteq A_\lambda$. Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_\lambda : \lambda \in L\}$ (vgl. Lemma 1.26) $\rightsquigarrow \varepsilon > 0$.
Dann gilt:
$B(y,\varepsilon) \subseteq B(y,\varepsilon_\lambda) \subseteq A_\lambda, \forall\lambda \in L.$
$\rightsquigarrow B(y,\varepsilon) \subseteq \bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda \rightsquigarrow \bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ ist offen.
Sind nun alle A_λ, $\lambda \in L$, abgeschlossen, so schließt man wieder über die Morgan'sche Regel
$X\backslash(\bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda\in L}(X\backslash A_\lambda)$ analog zu Teil a). □

Übung: Man zeige anhand von Gegenbeispielen, daß Satz 2.7.b) für nicht endliche Indexmengen L im allgemeinen nicht richtig ist!

Definition 2.8

a) *$x \in X$ heißt* <u>*Häufungspunkt*</u> *von $A \subseteq X$, wenn für jede Umgebung $U \subseteq X$ von x gilt $(A \bigcap U) \backslash \{x\} \neq \emptyset$. $x \in A$ heißt* <u>*isolierter Punkt*</u>*, falls x kein Häufungspunkt von A ist.*

b) *$x \in X$ heißt* <u>*innerer*</u> *(bzw.* <u>*äußerer*</u>*)* <u>*Punkt*</u> *von $A \subseteq X$, falls $\exists$ Umgebung $U \subseteq X$ von x, so daß $U \subseteq A$ (bzw. $U \bigcap A = \emptyset$). $x \in X$ heißt* <u>*Randpunkt*</u> *von $A \subseteq X$, falls $\forall$ Umgebungen $U \subseteq X$ von x gilt: $U \bigcap A \neq \emptyset$ und $U \bigcap (X \backslash A) \neq \emptyset$.*

Beispiele 2.9

a) $X := I\!R$, $A := \{\frac{1}{n} : n \in I\!N\}$. Nach Satz 1.8 (Eudoxos) gilt
$(B(0,\varepsilon) \bigcap A) \backslash \{0\} \neq \emptyset$, $\forall \varepsilon > 0$.
Also ist 0 Häufungspunkt von A.

b) $X := I\!R$, $A := \mathbb{Q}$. Nach Satz 1.10 gilt $\forall x \in I\!R$ und $\forall \varepsilon > 0$: $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$
d.h. $(B(x,\varepsilon) \bigcap \mathbb{Q}) \backslash \{x\} \neq \emptyset$. Also ist jede reelle Zahl Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.

c) Endliche Teilmengen A von X enthalten nur isolierte Punkte.

Bew: *sei $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$, $a := \min\limits_{i,j=1\ldots n, i\neq j} d(x_i, x_j) > 0$*
$\rightsquigarrow (B(x,a) \cap A) \backslash \{x_i\} = \emptyset \ \forall i = 1 \ldots n$
$\rightsquigarrow$ *$x_i, i = 1 \ldots n$ ist kein Häufungspunkt von A.*

d) Es sei $x \notin A$. Dann ist x Häufungspunkt von A gdw. x ist Randpunkt von A.

Bew: *Sei $x \notin A$ und x Häufungspunkt von A. Sei U eine beliebige Umgebung von x. $\rightsquigarrow (A \bigcap U) \backslash \{x\} = A \bigcap U \neq \emptyset$ und $x \in U \bigcap (X \backslash A)$*
$\rightsquigarrow$ *x ist Randpunkt von A.*
Sei nun x Randpunkt von A und U eine bel. Umgebung von x.
$\rightsquigarrow (A \bigcap U) \backslash \{x\} = A \bigcap U \neq \emptyset \rightsquigarrow$ *x Häufungspunkt von A.* $\square$

e) $X := I\!R$, $A := [0,1[$. Man gebe alle inneren, äußeren und Randpunkte von A an! (Übung)

Satz 2.10
Es sei $A \subseteq X$ und $x \in X$ sei ein Häufungspunkt von A. $\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge $(A \bigcap B(x,\varepsilon)) \backslash \{x\}$ nicht endlich.

<u>**Beweis:**</u>
$\forall \varepsilon > 0$ ist die offene Kugel $B(x,\varepsilon)$ eine Umgebung von x. Deshalb gilt nach

Def. 2.8: $(A \bigcap B(x,\varepsilon)) \backslash \{x\} \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$.
Annahme:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_o > 0 : (A \quad \bigcap \quad & B(x, \varepsilon_o)) \backslash \{x\} \quad \text{ist endlich, d.h.} \\ (A \quad \bigcap \quad & B(x, \varepsilon_o)) \backslash \{x\} = \{x_1, ..., x_n\} \quad \text{für ein } n \in I\!N. \end{aligned}$$

Wir definieren $\varepsilon_1 := \min\limits_{1 \leq i \leq n} d(x, x_i) \in]0, \varepsilon_o[$ und erhalten $(A \bigcap B(x, \varepsilon_1)) \backslash \{x\} = \emptyset \rightsquigarrow$ Widerspruch zu x Häufungspunkt von A. $\square$

Definition 2.11
Es sei A eine Teilmenge von X.

a)

$$\begin{aligned} A' &:= \{x \in X : x \textit{ ist Häufungspunkt von } A\}. \\ \mathring{A} &:= int(A) := \{x \in A : x \textit{ ist innerer Punkt von } A\} \textit{ heißt } \underline{\textit{Inneres}} \\ & \quad \textit{von } A \text{ ("}int\text{"} \widehat{=} \text{"}interior\text{")} \\ \overline{A} &:= cl(A) := \bigcap_{D \in \mathcal{M}} D \textit{ heißt } \underline{\textit{Abschließung}} \textit{ von } A \text{ ("}cl\text{"} \widehat{=} \text{"}closure\text{")}, \\ & \quad \textit{wobei } \mathcal{M} := \{D \subseteq X : D \textit{ abgeschlossen und } A \subseteq D\}. \end{aligned}$$

b) *A heißt <u>dicht</u> bez. $B \subseteq X$, falls $B \subseteq \overline{A}$. A heißt (<u>überall</u>) <u>dicht</u>, falls $\overline{A} = X$.*

c) *X heißt <u>separabel</u>, falls eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge von X existiert.*

Satz 2.12
Es sei A eine Teilmenge von X.

a) $\overline{A} = A \bigcup A'$.

b) *A ist abgeschlossen (offen) gdw. $A = \overline{A}$ $\quad (A = \mathring{A})$.*

<u>Beweis:</u>

a) 1. Schritt: $A \bigcup A' \subseteq \overline{A}$. Klar ist nach Definition: $A \subseteq \overline{A}$. Wir zeigen: $A' \subseteq \bar{A}$.
<u>Annahme:</u> $\exists x \in A'$ und $x \notin \overline{A}$.
Da $\overline{A}$ nach Definition abgeschlossen ist (Def. 2.7), folgt: $X \backslash \overline{A}$ ist offen.
$\rightsquigarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq X \backslash \overline{A}$.
$\rightsquigarrow A \bigcap B(x, \varepsilon) = (A \bigcap B(x, \varepsilon)) \backslash \{x\} = \emptyset$.
$\rightsquigarrow x$ ist kein Häufungspunkt von $A \rightsquigarrow x \notin A' \rightsquigarrow$ Widerspruch.
2.Schritt: $\overline{A} \subseteq A \bigcup A'$.
Es genügt zu zeigen: $A \bigcup A'$ ist abgeschlossen.

Wir betrachten dazu $C := X \backslash (A \bigcup A')$ und zeigen C ist offen. Sei $x \in C$ beliebig gewählt.
Wir zeigen: $\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq C$.
Annahme: $\forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \bigcap (A \bigcup A') \neq \emptyset$.
Analog zum Beweis von Satz 2.10 zeigt man, daß $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $B(x,\varepsilon) \bigcap (A \bigcup A')$ nicht endlich ist.
Wegen $B(x,\varepsilon) \bigcap (A \bigcup A') = (B(x,\varepsilon) \bigcap A) \bigcup (B(x,\varepsilon) \bigcap A')$ folgt daraus, daß$\forall \varepsilon > 0$ die Menge $B(x,\varepsilon) \bigcap A$ oder die Menge $B(x,\varepsilon) \bigcap A'$ nichtleer ist.
1. Fall: $\forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \bigcap A \neq \emptyset \rightsquigarrow x \in A' \rightsquigarrow$ Widerspruch.
2. Fall: $\forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \bigcap A' \neq \emptyset$
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und $y \in B(x,\varepsilon) \bigcap A'$.
Sei $\varepsilon_o := \varepsilon - d(x,y) \in]0,\varepsilon[$.
Wegen $y \in A'$ existiert $z \in (A \bigcap B(y,\varepsilon_o)) \backslash \{y\}$.
$\rightsquigarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \varepsilon_o = \varepsilon$
$\rightsquigarrow z \in (A \bigcap B(x,\varepsilon)) \backslash \{x\}$.
$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 : (A \bigcap B(x,\varepsilon)) \backslash \{x\} \neq \emptyset \rightsquigarrow x \in A' \rightsquigarrow$ Widerspruch.
Also ist die Annahme falsch und C offen. $\rightsquigarrow A \bigcup A'$ ist abgeschlossen.

b) Ist A abgeschlossen, so gilt $\overline{A} \subseteq A. A \subseteq \overline{A}$ ist aber trivial. Die Umkehrung ist trivial, da $\overline{A}$ abgeschlossen ist. Ist A offen, so ist nach Definition jeder Punkt $x \in A$ ein innerer Punkt von $A \rightsquigarrow A \subseteq \mathring{A}$ ist trivial. $\mathring{A}$ ist nach Definition eine offene Menge. □

Beispiele 2.13

a)

$$X := I\!R, A := \{\frac{1}{n} : n \in I\!N\} \rightsquigarrow A' = \{0\} (Bsp.\ 2.9a))\ und$$
$$\overline{A} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : N \in I\!N\}.$$

b) $X := I\!R, A :=]0,1[\rightsquigarrow A' = [0,1], \overline{A} = [0,1], \mathring{A} = A$.

c) $X := I\!R, A := \mathbb{Q}$
$\rightsquigarrow \mathbb{Q}' = I\!R \quad (vgl. Bsp. 2.9b))$,
$\rightsquigarrow \overline{\mathbb{Q}} = I\!R,\ int(\mathbb{Q}) = \emptyset$.
$\rightsquigarrow \mathbb{Q}$ *ist abzählbar und dicht in* $I\!R$
$\rightsquigarrow I\!R$ *ist separabel!*

d) $cl(B(x,r)) \subseteq \overline{B}(x,r), \forall x \in X, \forall r > 0$.

Bew.: *Es genügt zu zeigen:* $(B(x,r))' \subseteq \overline{B}(x,r)$. *Sei* $y \in (B(x,r))'$.
$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 : (B(x,r) \bigcap B(y,\varepsilon)) \backslash \{y\} \neq \emptyset$

$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 : (\overline{B}(x,r) \bigcap B(y,\varepsilon))\backslash\{y\} \neq \emptyset$
$\rightsquigarrow y \in (\overline{B}(x,r))' \subseteq \overline{B}(x,r)$ *(Satz 2.12.!).* $\square$
(folgt natürlich auch sofort aus der Def. von "cl", da $\overline{B}(x,r)$ *abgeschlossen ist).*

Die Gleichheit $cl(B(x,r)) = \overline{B}(x,r)$ *gilt im allgemeinen nicht: Im diskreten metrischen Raum* (X,d) *gilt für* $r = 1, x \in X$ *beliebig:*
$B(x,r) = \{x\} = cl(B(x,r))$ *und* $\overline{B}(x,r) = X$.

2.2 Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen

Wir kommen nun zum für die Analysis zentralen Begriff der Konvergenz einer Folge (in einem metrischen Raum).
Im folgenden sei (X,d) ein metrischer Raum.

Definition 2.14
Es sei $(x_n)_{n\in I\!N}$ *eine Folge von Elementen aus* X *(vgl.Def.1.21),* $x \in X$. $(x_n)_{n\in I\!N}$ *heißt* *konvergent* *gegen* x, *falls* $\forall \varepsilon > 0 \exists n_o(\varepsilon) \in I\!N$ *so daß* $d(x,x_n) < \varepsilon, \forall n \geq n_o(\varepsilon)$.
x *heißt* *Grenzwert* *oder* *Limes* *der Folge* $(x_n)_{n\in I\!N}$.
Schreibweise: $x = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n, x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

Lemma 2.15
Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum besitzt einen eindeutig bestimmten Grenzwert.

Beweis
Annahme: Es existieren eine Folge $(x_n)_{n\in I\!N}$ in X und x, $\tilde{x} \in X$, $x \neq \tilde{x}$,

mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \tilde{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Wir wählen nun $\varepsilon > 0$ so, daß $2\varepsilon < d(x,\tilde{x})$. Dann existieren $n_o(\varepsilon) \in I\!N$ und $\tilde{n}_o(\varepsilon) \in I\!N$, so daß

$d(x,x_n) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_o(\varepsilon), d(\tilde{x},x_n) < \varepsilon,\ \forall n \geq \tilde{n}_o(\varepsilon)$.

Deshalb gilt für beliebiges $n \geq \max\{n_o(\varepsilon), \tilde{n}_o(\varepsilon)\}$:
$2\varepsilon < d(x,\tilde{x}) \leq d(x,x_n) + d(x_n,\tilde{x}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$
Dies ist aber unmöglich und die Annahme ist falsch. $\square$

Beispiele 2.16

a) $X := I\!R, x_n := \frac{1}{n}, \forall n \in I\!N$.
$(\frac{1}{n})_{n\in I\!N}$ *konvergiert gegen* 0 *(nach Satz 1.8).*
$X :=]0,1], (\frac{1}{n})_{n\in I\!N}$ *ist nicht konvergent in* X.

b) $X := I\!R, r \in]-1,1[$. *Dann gilt:* $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.

Bew.: *$r = 0$ ist trivial, sei $r \neq 0$.*
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und setzen $a := \frac{1-|r|}{|r|} > 0$.
$\rightsquigarrow |r| = \frac{1}{1+a}$.
Wir wählen nun $n_o(\varepsilon) \in I\!N$, so daß $n_o(\varepsilon) \geq \frac{1}{a\varepsilon}$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow |r^n| = |r|^n &= (\frac{1}{1+a})^n = \frac{1}{(1+a)^n} \qquad \textit{(Satz 1.11!)} \\ &\leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} < \varepsilon, \forall n \geq n_o(\varepsilon). \Box \end{aligned}$$

c) $X := I\!R$. *Die folgenden beiden Folgen sind nicht konvergent in $I\!R$:*

$$(n)_{n\in I\!N} \text{ und } (x_n)_{n\in I\!N}\ , x_n := \begin{cases} \frac{1}{2}\,, & n \text{ gerade} \\ 1\,, & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in I\!N)$$

Bew.: *(x_n) konvergiert <u>nicht</u> gegen $x \in X$ bedeutet:*
(*) $\exists \varepsilon_o \forall n \in I\!N \exists k(n) \geq n : d(x, x_{k(n)}) \geq \varepsilon_o$.
(x_n) ist nicht konvergent in X bedeutet: $\forall x \in X$ gilt (*).
Wir betrachten zunächst $(n)_{n\in I\!N}$:
Sei $\varepsilon = 1$ und $x \in I\!R$ bel. und wir wählen $n_0 \in I\!N$ mit $|x| \leq n_o$.
Wir definieren $k(n) := \max\{n, n_o + 1\}, \forall n \in I\!N$, und erhalten $\varepsilon_o = 1 \leq k(n) - |x| \leq |k(n) - x|$, d.h. (*) ist erfüllt.
Sei nun $(x_n) = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \ldots), x \in I\!R$ beliebig, $\varepsilon_o := max\{|1-x|, |\frac{1}{2} - x|\}, n \in I\!N$ beliebig.
Wir wählen $k(n) := 2n+1$, falls $\varepsilon_o = |1-x|$ bzw. $k(n) := 2n$, falls $\varepsilon_o = |\frac{1}{2} - x|$.

$$\rightsquigarrow \varepsilon_o = \begin{cases} |1-x| = |x_{k(n)} - x|\,, \forall n \in I\!N \\ |\frac{1}{2} - x| = |x_{k(n)} - x|\,, \forall n \in I\!N \end{cases} \qquad \Box$$

d) Es sei (X, d) ein diskreter metrischer Raum. Dann ist $(x_n)_{n\in I\!N}$ konvergent in X gdw. $\exists n_o \in I\!N \exists x \in X : x_n = x, \forall n \geq n_o$.

Satz 2.17
Es sei $A \subseteq X$. Dann gilt:

a) $\forall x \in \overline{A}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\in I\!N}$ von Elementen aus A, die gegen x konvergiert.

b) Ist $(x_n)_{n\in I\!N}$, eine Folge von Elementen aus A, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, so gilt $x \in \overline{A}$. Ist A abgeschlossen, so gehört der Grenzwert (sogar) zu A.

<u>**Beweis:**</u>

a) Sei $x \in \overline{A}$ bel. $\rightsquigarrow x \in A \bigcup A'$ (Satz 2.12).
1. Fall: $x \in A \rightsquigarrow$ wir wählen die konstante Folge $(x)_{n\in I\!N}$.
2. Fall: $x \in A' \backslash A$.
Wir betrachten die Mengen $A_n := (A \bigcap B(x, \frac{1}{n})) \backslash \{x\}, \forall n \in I\!N$.
Wir wissen: $A_n \neq \emptyset, \forall n \in I\!N$.
Wir wählen sukzessive $x_1 \in A_1; x_{n+1} \in A_{n+1}, x_{n+1} \neq x_n$.
Nach Satz 2.10 bricht dieser Prozeß nicht nach endlich vielen Schritten ab und wir erhalten:
$x_n \in A$ und $d(x, x_n) < \frac{1}{n}, \forall n \in I\!N$.
Damit ist alles gezeigt.

b) Es sei $(x_n)_{n\in I\!N}$ eine Folge von Elementen aus A, die gegen $x \in X$ konvergiert.
Wir zeigen: $x \in \overline{A}$, ist A abgeschlossen, so ist $A = \overline{A}$. $\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon) \bigcap \{x_n : n \in I\!N\} \neq \emptyset$
2 Möglichkeiten:
1. $x \in \{x_n : n \in I\!N\} \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
2. $x \notin \{x_n : n \in I\!N\} \rightsquigarrow (B(x, \varepsilon) \bigcap \{x_n : n \in I\!N\}) \backslash \{x\} \neq \emptyset \forall \varepsilon > 0$
$\rightsquigarrow x \in \{x_n : n \in I\!N\}' \subseteq A' \subseteq \overline{A}$. □

Bemerkung 2.18
Nach 2.17.b) bedeutet die Abgeschlossenheit einer Menge: Die "Limesbildung" führt nicht aus der Menge heraus.
In Def. 1.21 wurde allgemein der Begriff einer (unendlichen) Folge und einer Teilfolge eingeführt. Wir nehmen im folgenden stets an, daß auch Teilfolgen unendlich sind und die Form haben:
$(x_n)_{n\in \widetilde{I\!N}}, \widetilde{I\!N} \subseteq I\!N$ *und* $\widetilde{I\!N}$ *unendlich.*
Da $I\!N$ *und* $\widetilde{I\!N}$ *beide abzählbar sind, existiert eine bijektive Abbildung* f : $I\!N \longrightarrow \widetilde{I\!N}$ *und wir können die Teilfolge auch so schreiben:*
$(x_{f(n)})_{n\in I\!N}$.
Wir nehmen dabei der Einfachheit halber an, daß
$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < f(n+1) < \ldots$
Eine Teilfolge $(x_n)_{n\in \widetilde{I\!N}}$ *von* $(x_n)_{n\in I\!N}$ *ist dementsprechend konvergent gegen ein* $x \in X$, *falls*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists n_o(\varepsilon) \in I\!N \quad &: \quad d(x, x_{f(n)}) < \varepsilon, \forall n \in I\!N, n \geq n_o(\varepsilon), \\ \textit{oder} \quad &: \quad d(x, x_n) < \varepsilon, \forall n \in \widetilde{I\!N}, n \geq n_o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Schreibweise: $x_n \underset{\substack{n\to\infty \\ n\in\widetilde{I\!N}}}{\longrightarrow} x$.

Satz 2.19
Ist eine Folge $(x_n)_{n\in I\!N}$ *(in* X*) gegen* $x \in X$ *konvergent, so konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen* x.

Beweis:
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $\lim n \to \infty x_n = x$, weiterhin sei $\widetilde{\mathbb{N}}$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ &: \ d(x, x_n) < \varepsilon, \forall n \geq n_o(\varepsilon). \\ \rightsquigarrow \ & \ \ d(x, x_n) < \varepsilon, \forall n \geq n_o(\varepsilon), n \in \widetilde{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Die Aussage folgt damit aus Bemerkung 2.18. □

Definition 2.20
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Fundamentalfolge oder Cauchyfolge, falls
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq n_o(\varepsilon)$.
Der metrische Raum (X, d) heißt vollständig, falls jede Fundamentalfolge (in X) gegen ein Element aus X konvergiert.

Satz 2.21

a) *Jede in X konvergente Folge ist auch Fundamentalfolge.*

b) *Für jede Fundamentalfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ beschränkt. (Man sagt kurz: die Folge ist beschränkt.)*

Beweis:

a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $x \in X$ konvergente Folge. $\varepsilon > 0$ sei beliebig gewählt.
$\rightsquigarrow \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0(\varepsilon)$.
Daraus folgt für alle $m, n \geq n_o(\varepsilon)$:
$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
D.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Fundamentalfolge.

b) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge in X. Sei $\varepsilon_o > 0$ fixiert. Dann existiert ein $n_o \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon_o, \forall n, m \geq n_o$.
Wir definieren:
$r := \max\{\varepsilon_o, \max\limits_{1\leq i\leq n_o-1} d(x_i, x_{n_o})\} > 0$
und erhalten, daß die gesamte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der abgeschlossenen Kugel $\overline{B}(x_{n_o}, r)$ enthalten ist.
Nach Beispiel 2.4c) gilt deshalb:
$diam\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leq 2r$. □

Bemerkung 2.22
Fundamentalfolgen (in metrischen Räumen, die nicht vollständig sind,) sind i.a. nicht gegen ein Element des Raumes konvergent.

Beispiel: $X :=]0,1], (\frac{1}{n})_{n\in I\!N}$ *ist Fundamentalfolge in* X*, denn:*

$$|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| = |\frac{m-n}{mn}| = |\frac{m-n}{m}|\frac{1}{n} < \frac{1}{n}, \forall m \leq n.$$

$$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_o(\varepsilon) \in I\!N : |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n, m \geq n_o(\varepsilon)$$

Aber die Folge ist nicht konvergent in X *(vgl. 2.16a)).*

Die Vollständigkeit eines metrischen Raumes (X, d) *ist also eine Eigenschaft von* X *und* d*! Sie ist von beträchtlichem Interesse, da man oft für eine gegebene Folge nur zeigen kann, daß diese Fundamentalfolge ist. Später werden wir zeigen, daß* $I\!R$ *und* $I\!R^m$ *vollständig bzgl. der betrachteten Metriken sind. Noch später werden wir weitere Beispiele vollständiger bzw. nichtvollständiger Räume kennenlernen.*

Definition 2.23

Es sei $(x_n)_{n\in I\!N}$ *eine Folge in* X*.*
$\mathcal{L}((x_n)_{n\in I\!N}) := \{x \in X : \exists$ *Teilfolge von* $(x_n)_{n\in I\!N}$*, die gegen* x *konvergiert*$\}$ *heißt Limesmenge der Folge* $(x_n)_{n\in I\!N}$*.*

Eigenschaften 2.24

a) Ist $(x_n)_{n\in I\!N}$ *gegen* x *konvergent, so gilt* $\mathcal{L}((x_n)_{n\in I\!N}) = \{x\}$*;*

b) Ist $\{x_n | n \in I\!N\}$ *endlich, so ist* $\mathcal{L}((x_n)_{n\in I\!N}) \neq \emptyset$*;*

c) $\{x_n : n \in I\!N\}' \subseteq \mathcal{L}((x_n)_{n\in I\!N})$*;*

d) Die Limesmenge einer Folge ist abgeschlossen.

e) ist (x_n) *eine Fundamentalfolge, und ihre Limesmenge nichtleer, so ist* (x_n) *konvergent.*

Beweis:

a) folgt sofort aus Satz 2.19, da jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in I\!N}$ gegen x konvergiert.

b) Ist $\{x_n | n \in I\!N\}$ endlich, so existiert eine konstante Teilfolge von $(x_n)_{n\in I\!N}$, deren Grenzwert in der Limesmenge liegt.

c) Ist x ein Häufungspunkt von $A := \{x_n : n \in I\!N\}$, so existiert nach Satz 2.17a) eine Folge in A, Diese Folge enthält aber eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in I\!N}$, die gegen x konvergiert. Also gehört x zur Limesmenge.

d) Sei $L := \mathcal{L}((x_n)_{n\in I\!N})$ und wir zeigen: $X \backslash L$ ist offen.
Sei $z \in X \backslash L$.
Annahme: z ist nicht innerer Punkt von $X \backslash L$.
$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 : B(z, \varepsilon) \bigcap L \neq \emptyset$
$\rightsquigarrow \forall n \in I\!N : B(z, \frac{1}{n}) \bigcap L \neq \emptyset$.
Analog zu Satz 2.10 zeigt man, daß alle diese Mengen unendlich sind.

$$\begin{array}{llll} \rightsquigarrow & \exists & z_1 & \in & B(z,1)\cap L \\ & \exists & z_n & \in & B(z,\frac{1}{n})\cap L, z_n \neq z_{n-1}, \forall n\in I\!N, n\geq 2. \\ \rightsquigarrow & & z_n & \in & L, \forall n \in I\!N, \text{ und } z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \end{array}$$

Ferner gilt, da $z_n \in L$, daß $\forall n \in I\!N \exists k(n) \in I\!N$:
$d(z_n, x_{k(n)}) \leq \frac{1}{n}$.
Dabei sei $k(n), n \in I\!N$, o.B.d.A. monoton wachsend gewählt.
$\rightsquigarrow$ die Teilfolge $(x_{k(n)})_{n\in I\!N}$ konvergiert gegen z.
$\rightsquigarrow z \in L \rightsquigarrow$ Widerspruch.
Also ist jeder Punkt von $X\backslash L$ innerer Punkt.

e) Sei $(x_n)_{n\in I\!N}$ eine Fundamentalfolge und es gelte $\mathcal{L}((x_n)_{n\in I\!N}) \neq \emptyset$, sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $x \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in I\!N})$.
$\rightsquigarrow \exists$ Teilfolge $(x_n)n \in \widetilde{N}$, die gegen x konvergiert.

$$\begin{array}{lll} \rightsquigarrow \exists n_o, \tilde{n}_o \in I\!N & : & d(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2} \forall n, m \geq n_o \\ & & \text{(Fundamentalfolgen-Eigenschaft)} \\ & & d(x, x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2} \forall n \geq \tilde{n}_o, n \in \widetilde{I\!N} \\ & & \text{(Eigenschaft der konvergenten Teilfolge)} \end{array}$$

seien $m, n \geq \max\{n_o, \tilde{n}_o\}$, $m, n \in \widetilde{I\!N}$
$\rightsquigarrow d(x, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Beispiele 2.25

a) $\mathcal{L}((\frac{1}{n})_{n\in I\!N}) = \{0\}$;

b) $x_n := \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ gerade} \\ 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$
$\rightsquigarrow \mathcal{L}((x_n)_{n\in I\!N}) = \{\frac{1}{2}, 1\}$;

c) $x_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \\ 1 - \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$
$\rightsquigarrow \{x_n : n \in I\!N\}' = \{0, 1\} = \mathcal{L}((x_n)_{n\in I\!N})$

d) $\mathcal{L}((n)_{n\in I\!N}) = \emptyset$.

<u>**Konvention:**</u>
Wir schreiben nur (x_n) für $(x_n)_{n\in I\!N}$ zur Abkürzung (d.h. falls die Indexmenge $I\!N$ klar ist).

2.3 Der Banachsche Fixpunktsatz

Eines der wesentlichsten Anliegen der Analysis/Numerik ist die Untersuchung, Lösbarkeit und Lösung von Gleichungen. Insbesondere ist die Frage interessant, ob und unter welchen Voraussetzungen eine Abbildung bestimmte Werte annimmt und wie man die zugehörigen Urbilder ("Lösungen" der Gleichung) berechnen kann.
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $F : X \to X$ eine Abbildung. Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht die Gleichung

$$x = Fx. \tag{1}$$

Das zentrale Ergebnis dieses Kapitels liefert hinreichende Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (1) und darüber hinaus ein iteratives Näherungsverfahren zur Berechnung dieser Lösung.
Angemerkt sei bereits hier, daß viele Arten von Gleichungen durch geeignete Formulierung und Umformung, und auch viele praktische Aufgaben in die Gestalt (1) gebracht werden können.
(1) heißt auch Fixpunktgleichung und eine Lösung von (1) Fixpunkt, da die Lösungen von (1) gerade die Punkte in X sind, die durch F auf sich abgebildet (also fixiert) werden.

Definition 2.26
$F : X \to X$ heißt kontraktiv, wenn ein $\alpha \in]0, 1[$ existiert, so daß

$$d(Fx, Fy) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Die Zahl α heißt dann Kontraktionskonstante von F.

Lemma 2.27
$\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 1,\ \forall k \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=0}^{k} a^i = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$
Beweis:

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a^i\right)(1-a) = \sum_{i=0}^{k}(a^i - a^{i+1}) = 1 - a^{k+1} \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{k} a^i = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}.$$

Satz 2.28 *(Fixpunktsatz von Banach)*
Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $F : X \to X$ sei kontraktiv (mit Konstante $\alpha \in]0, 1[$).
Dann existiert genau ein $x_* \in X$ mit $x_* = Fx_*$ und für jedes $x_o \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei

$$x_n := Fx_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

gegen x_*. Darüber hinaus gilt die Abschätzung

$$d(x_n, x_*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(Fx_o, x_o), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis:
Der Beweis gliedert sich in 4 Schritte:

(i) Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für bel. "Startwert" x_o;

(ii) Existenz einer Lösung von (1);

(iii) Eindeutigkeit;

(iv) Abschätzung.

(i) Es sei $x_o \in X$ beliebig gewählt und wir definieren sukzessive

$$x_n := Fx_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &= d(Fx_{n-1}, Fx_n) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_o, x_1) \\
d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=0}^{m-n-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \leq \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^{n+i} d(x_o, x-1) \\
&\quad \text{(Dreiecksungleichung!)} \\
\rightsquigarrow d(x_n, x_m) &\leq d(x_o, x_1) \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^{n+i} = d(x_o, x_1)\alpha^n \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^i \\
&\leq d(x_o, x_1)\alpha^n \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \leq \frac{d(x_o, x_1)}{1-\alpha}\alpha^n
\end{aligned}$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach Beispiel 2.16 b) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. Deshalb $\exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$\alpha^n \leq \frac{1-\alpha}{d(x_o, x_1)}\varepsilon, \quad \forall n \geq n_o(\varepsilon). \text{ falls } x_0 = x_1 \rightsquigarrow x_o \text{ ist Fixpunkt}$$

$\rightsquigarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall m \geq n \geq n_o(\varepsilon)$.
Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Fundamentalfolge in X. Da (X, d) vollständiger metrischer Raum ist, existiert $x_* \in X$ mit $x_* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(ii) Wir zeigen: $x_* = Fx_*$ ($\rightsquigarrow$ Existenz der Lösung von (1))
<u>Annahme:</u> $x_* \neq Fx_*$
$\rightsquigarrow \exists n_o \in \mathbb{N} : d(x_*, x_n) < \frac{1}{2}d(x_*, Fx_*)$, $\forall n \geq n_o$. Sei $n \geq n_o$:

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow d(x_*, Fx_*) &\leq d(x_*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Fx_*) \\
&= d(x_*, x_{n+1}) + d(Fx_n, Fx_*) \\
&\leq d(x_*, x_{n+1}) + \alpha d(x_n, x_*) < d(x_*, Fx_*)
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Widerspruch!

(iii) Eindeutigkeit der Lösung von (1):
<u>Annahme:</u> $\exists \tilde{x}, \bar{x} \in X$ mit $\tilde{x} \neq \bar{x}$, $\tilde{x} = F\tilde{x}$, $\bar{x} = F\bar{x}$.
$\rightsquigarrow d(\tilde{x}, \bar{x}) = d(F\tilde{x}, F\bar{x}) \leq \alpha d(\tilde{x}, \bar{x}) < d(\tilde{x}, \bar{x})$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch!

(iv) *Abschätzung:* Für beliebiges $n \in I\!N$ gilt:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_*) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_*) \\
&= d(Fx_{n-1}, Fx_n) + d(Fx_n, Fx_*) \\
&\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \alpha d(x_n, x_*) \\
\rightsquigarrow d(x_n, x_*) &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \alpha^{n-1} d(x_o, x_1) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_o, Fx_o).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.29
Der obige Satz liefert neben einer Existenz– und Eindeutigkeitsaussage für die Gleichung (1) auch den Ansatz für ein iteratives Näherungsverfahren ("Verfahren der sukzessiven Approximation", "Iterationsverfahren"; x_n heißt "Iterierte" und x_o "Startwert"), das bei verschiedensten speziellen Aufgabenstellungen (z.B. lineare und nichtlineare Gleichungssysteme) Anwendung findet.
Wegen der Gültigkeit der Abschätzung

$$d(x_*, x_n) \leq \alpha d(x_*, x_{n-1}), \quad \forall n \in I\!N,$$

ist die "Geschwindigkeit" der Konvergenz der Folge (x_n) um so größer je kleiner α ist. Der Fehler der Iterierten verringert sich von Schritt zu Schritt mindestens um den Faktor $\alpha < 1$.
Das Iterationsverfahren ist sehr einfach in einen Algorithmus umsetzbar:
S1: *Wähle X0, EPS, N0 (= maximale Iterationszahl), $N := 0$;*
S2: $X1 := F(X0)$; $N := N + 1$;
S3: $(d(X1, X0) < EPS$ *oder* $N \geq N0) \Longrightarrow STOP$;
$X0 := X1$, *goto S2.*
Bei konkreten Anwendungen muß jedoch über die Berechnung von Werten der Abbildung F und des Abstandes d nachgedacht werden.

Bemerkung 2.30
Die Probleme bei der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes bestehen in der geeigneten Wahl von X und (häufig auch) von d, so daß (X, d) vollständig ist und für die Abbildung $F : X \to X$ die Kontraktivität nachgewiesen werden kann. Oft können die Voraussetzungen von Satz 2.28 nur auf kleineren Mengen $A \subseteq X$ (insbesondere: F kontraktiv) nachgewiesen werden. Mann

betrachtet dann (A, d) als metrischen Raum und muß $F : A \to A$ nachweisen. Als allgemeine Aussage gilt in diesem Zusammenhang:
Ist (X, d) vollständig und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist (A, d) ebenfalls vollständig (Übung; Hinweis: Wende Satz 2.17 an!).

Beispiel 2.31
Ziel ist die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes zur Untersuchung der Lösbarkeit und zur Lösung der Gleichung (in $I\!R$).

$x^2 = a \quad \text{mit} \quad a \in I\!R, a > 0.$

Dazu definieren wir folgende Abbildung

$$F : \{x \in I\!R : x > 0\} \to I\!R, \quad Fx := x - \frac{1}{2x}(x^2 - a),\ \forall x > 0.$$

Es gilt: $x = Fx$ gdw. $x^2 = a$, d.h. x ist genau dann Fixpunkt von F, wenn x die Gleichung $x^2 = a$ löst.
Wir wissen bereits (Satz 1.12), daß die Gleichung $x^2 = a$ genau eine Lösung $x > 0$ besitzt. Unser Ziel ist die Anwendung von Satz 2.28, da hieraus auch ein Iterationsverfahren zur Berechnung der Wurzel aus a resultiert.

Idee für die Wahl von $A \subseteq I\!R$ (gemäß Bem. 2.30):

$A := [\min\{1, a\}, \max\{1, a\}]$

(später zeigen wir in Kap. 3.1, daß $(I\!R, |\cdot|)$ vollständig ist. Das Intervall A ist aber abgeschlossen $\rightsquigarrow$ $(A, |\cdot|)$ ist vollständig.)

Wir zeigen: (i) $F : A \to A$
(ii) *F ist kontraktiv (für gewisse $a \in I\!R$)*

(i) *Es sei $x \in A$ bel. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} Fx = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \quad &\geq \quad \frac{1}{2}(\min\{1, a\} + \frac{a}{\max\{1, a\}}) \\ &= \quad \frac{1}{2}(\min\{1, a\}, a \min\{1, \frac{1}{a}\}) \\ &= \quad \frac{1}{2}(\min\{1, a\}, \min\{a, 1\}) = \min\{1, a\}, \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} Fx \leq \frac{1}{2}(\max\{1, a\} + \frac{a}{\min\{1, a\}}) \quad &= \quad \frac{1}{2}(\max\{1, a\} + a \max\{1, \frac{1}{a}\}) \\ &= \quad \frac{1}{2}(\max\{1, a\} + \max\{1, a\}) \\ &= \quad \max\{1, a\} \end{aligned}$$

Also: $F(A) \subseteq A$.

(ii) *Es seien $x, y \in A$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} |Fx - Fy| &= \frac{1}{2}|x + \frac{a}{x} - y - \frac{a}{y}| = \frac{1}{2}|(x-y) + \frac{a}{xy}(y-x)| \\ &\leq \frac{1}{2}|1 - \frac{a}{xy}||x-y| \end{aligned}$$

Wir untersuchen $K(x,y) := 1 - \frac{a}{xy}$, $\forall x, y \in A$.
Gilt: $\frac{a}{xy} \leq \frac{a}{(\min\{1,a\})^2} = \max\{a, \frac{1}{a}\}$ und $K(x,y) \leq 1 - \min\{a, \frac{1}{a}\}$

Also gilt für alle $x, y \in A$:

$$|Fx - Fy| \leq \frac{1}{2}(\max\{1 - \min\{a, \frac{1}{a}\}, \max\{a, \frac{1}{a}\} - 1\})|x-y|$$

$\rightsquigarrow$ *F is kontraktiv, falls $a \in]\frac{1}{3}, 3[$.*
Demzufolge ist Satz 2.28 für $a \in]\frac{1}{3}, 3[$ anwendbar und für das Iterationsverfahren

$$(\star) \quad x_n := \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}), \forall n \in I\!N, x_o \in A \text{ bel.},$$

gilt: (x_n) konvergiert gegen die einzige Lösung von $x^2 = a$ in A, d.h. gegen $\sqrt{a}$.
Satz 1.12 liefert hier bereits mehr!:
$\forall x_o \in [\min\{1,a\}, \max\{1,a\}]$ konvergiert die Folge $x - n := Fxn - 1 = \frac{1}{2}(xn - 1 + \frac{a}{xn-1}), n \in I\!N$ gegen die Lösung $x_* = \sqrt{a}$ der Gleichung $x^2 = a$.
Numerisches Beispiel: $a = 2$, $\sqrt{2} = 1.414213562 = x_*$.

n	x_n	$d(x_n, x_*)$
0	*2*	*5.85786* $\cdot 10^{-1}$
1	*1.5*	*8.57864* $\cdot 10^{-2}$
2	*1.4166*$\overline{6}$	*2.4531* $\cdot 10^{-3}$
3	*1.414215686*	*2.1236* $\cdot 10^{-6}$
4	*1.414213562*	*3.7* $\cdot 10^{-10}$

theoretischer Fehler:

$$\begin{aligned} |x_n - \sqrt{2}| &\leq \frac{1}{2^{n-1}}|x_o - x_1| \\ \rightsquigarrow |x_4 - \sqrt{2}| &\leq 2^{-4} = 6.25 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Die numerischen Ergebnisse sind also viel besser als es die Fehlerabschätzung erwarten läßt. Dies wird erst im späteren Verlauf der Vorlesung verständlich. $(\star)$ erweist sich als das Newton–Verfahren zur Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Bemerkung 2.32
Die folgenden Gegenbeispiele zeigen, daß Satz 2.28 nicht richtig bleibt, wenn (X, d) *nicht vollständig oder* F *nicht konstraktiv (z.B.* $\alpha = 1$*) ist.*

(i) $X :=]0, 1[$, $Fx := \frac{1}{2}x$, $\forall x \in X$.
$\rightsquigarrow$ *F ist kontraktiv und* $F : X \to X$.
Aber: Es existiert kein Fixpunkt in X.

(ii) $X := I\!R^2$ *mit Euklidischer Metrik,* $F : I\!R^2 \to I\!R^2$,
$F(x, y) := (x, -y)$, $\forall (x, y) \in I\!R^2$.
$\rightsquigarrow d_2(F(x, y), F(\tilde{x}, \tilde{y})) = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (-y - (-\tilde{y}))^2} = d_2((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}))$
$\rightsquigarrow$ *F nicht kontraktiv, da Konstante* $\alpha = 1$.
Gilt: $\{(x, 0) : x \in I\!R\}$ *ist Fixpunktmenge und die Folge im Satz 2.28 ist i.a. nicht konvergent!*

Bemerkung 2.33
Wir betrachten die folgende nichtlineare Gleichung in $I\!R^m$*:*

$$(\star) \quad Gx = 0, \quad \text{mit} \quad G : A \to I\!R^m,\ A \subseteq I\!R^m.$$

Man wähle eine Abbildung $g : A \times I\!R^m \to I\!R^m$*, so daß*

(i) $\forall x \in A : g(x, \cdot) : I\!R^m \to I\!R^m$ *ist bijektiv,*

(ii) $\forall x \in A : g(x, 0) = 0$.

Dann ist $x_* \in A$ *Lösung von* $Gx = 0$ *gdw.* x_* *Fixpunkt von* $Fx := x + g(x, Gx)$, $\forall x \in A$.
Dies ist eine allgemeine Methode zur Anwendung von Satz 2.28 auf die Lösung von $(\star)$*. Die "Kunst" besteht nun darin, möglichst geschickt* A *und* g *so zu wählen, daß* $F : A \to A$ *kontraktiv wird, für* g *(i) und (ii) gelten und* A *mit geeigneter Metrik vollständiger metrischer Raum wird (vgl. Beispiel 2.31).*

2.4 Kompakte Mengen

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subseteq X$.

Definition 2.34
K heißt relativ kompakt, wenn für jede Folge (x_n) *von Elementen aus* K *gilt:* $\mathcal{L}((x_n)) \neq \emptyset$.
K heißt kompakt, wenn K *relativ kompakt und abgeschlossen ist.*

Eigenschaften 2.35

a) *Endliche Teilmengen von* X *sind kompakt.*

b) *K ist kompakt gdw. für jede Folge (x_n) aus K gilt:*

$$\emptyset \neq \mathcal{L}((x_n)) \subseteq K.$$

c) *Ist L endlich und sind $K_\lambda \subseteq X$, $\forall \lambda \in L$, (relativ) kompakt, so ist $\bigcup_{\lambda \in L} K_\lambda$ (relativ) kompakt.*

<u>**Beweis:**</u>

a) Ist $K \subseteq X$ endlich, so gilt für jede Folge (x_n) aus K, daß $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ endlich ist. Also folgt aus 2.24 b):

$$\mathcal{L}((x_n)) \neq \emptyset.$$

Endliche Mengen sind außerdem abgeschlossen, da alle ihre Elemente isolierte Punkte sind.

b) Die Richtung $\Longrightarrow$ ist klar, da K relativ kompakt und abgeschlossen ist und folglich alle Grenzwerte von Folgen aus K enthält (Satz 2.17).
Beim Beweis der Richtung $\Longleftarrow$ ist zunächst klar, daß K relativ kompakt ist. Zum Nachweis der Abgeschlossenheit von K zeigen wir $K = \bar{K}$. Sei $x \in \bar{K}$. Nach Satz 2.17 existiert eine Folge (x_n) in K mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \rightsquigarrow x \in \mathcal{L}((x_n)) \subseteq K \rightsquigarrow \bar{K} \subseteq K \rightsquigarrow K = \bar{K}$.

c) Es seien zunächst K_λ, $\forall \lambda \in L$, relativ kompakt und es sei (x_n) eine Folge in $\bigcup_{\lambda \in L} K_\lambda$. Dann ist entweder $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ endlich (und alles ist bewiesen nach 2.24 b)) oder $\exists \lambda_o \in L \exists \bar{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ unendlich:

$$x_n \in K_{\lambda_o}, \quad \forall n \in \bar{\mathbb{N}}.$$

$\rightsquigarrow \exists$ Teilfolge von $(x_n)_{n \in \bar{\mathbb{N}}}$ und damit von (x_n), die konvergent ist, da K_{λ_o} kompakt ist.
Sind die K_λ, $\forall \lambda \in L$, außerdem abgeschlossen, so auch $\bigcup_{\lambda \in L} K_\lambda$ (Satz 2.7) $\square$

Bemerkung 2.36
Das "Kompaktheitsprinzip", d.h. die Möglichkeit der Auswahl einer konvergenten Teilfolge, ist ein grundlegendes Prinzip der Analysis. Man benötigt es sowohl für den "inneren Aufbau" der Analysis, für den Beweis von Existenzaussagen als auch für den Nachweis der Konvergenz von Näherungsverfahren.

Im folgenden kommen wir nun auf zwei sehr wichtige Charakterisierungen der Kompaktheit von Mengen zu sprechen, nämlich zum einen mit Hilfe von sog. "ε-Netzen" und zweitens mit Hilfe des sog. "Überdeckungsprinzips". Ferner geben wir weitere Eigenschaften kompakter Mengen an.

Definition 2.37

a) *Eine Menge* $N_\varepsilon \subseteq X$ *heißt* <u>ε*- Netz*</u> *für die Menge* $K \subseteq X$*, falls*

$$d(x, N_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \forall x \in K.$$

b) $K \subseteq X$ *heißt* <u>*total beschränkt*</u> *(oder:* <u>*präkompakt*</u>*), falls zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine endliche Menge* $N_\varepsilon \subseteq X$ *exisitert, die* ε*-Netz für* K *ist.*

Eigenschaften 2.38

a) *Jede total beschränkte Teilmenge von* X *ist beschränkt.*

b) *Ist* X *total beschränkt, so ist* (X, d) *separabel.*

<u>**Beweis:**</u>

a) Es sei $K \subseteq X$ total beschränkt und $\varepsilon_o > 0$ fixiert. Dann gibt es eine endliche Menge $N := \{x_1, \ldots, x_r\}$, so daß

$$d(x, N) = \min_{i=1\ldots r} d(x, x_i) < \varepsilon_o, \quad \forall x \in K.$$

Es seien $x, y \in K$ bel. gewählt. Dann existieren $i, j \in \{1, \ldots r\}$ mit:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,y) < 2\varepsilon_o + d(x_i,x_j) \\ &\leq 2\varepsilon_o + \max_{i,j=1,\ldots,r} d(x_i,x_j) = 2\varepsilon_o + \operatorname{diam} N. \end{aligned}$$

Also gilt $\operatorname{diam} K \leq 2\varepsilon_o + \operatorname{diam} N$, d.h. K ist beschränkt.

b) Sei X total beschränkt. Zu zeigen:$\exists$ höchstens abzählbare dichte Teilmenge von X
$\rightsquigarrow \forall n \in I\!N$ existiert eine endliche Menge $N_n \subseteq X$, so daß

$$d(x, N_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in X.$$

Wir betrachten nun die Menge $A := \bigcup_{n \in I\!N} N_n$ und wissen, daß A höchstens abzählbar ist (Satz 1.28).
Wir müssen noch zeigen: $\bar{A} = X$.
Sei $x \in X \rightsquigarrow \forall n \in I\!N \exists x_n \in N_n : d(x, x_n) < \frac{1}{n}$.
$\rightsquigarrow x_n \in A$, $\forall n \in I\!N$, und $x_n \to x \rightsquigarrow x \in \bar{A}$ (Satz 2.17). $\square$

Satz 2.39

Ist $K \subseteq X$ *relativ kompakt, so ist* K *total beschränkt.*
Ist (X, d) *vollständig, so gilt auch die Umkehrung.*

Beweis:
Es sei K relativ kompakt und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.
Wir zeigen: $\exists$ endliche Menge N_ε mit $d(x, N_\varepsilon) < \varepsilon$, $\forall x \in K$. Wir gehen dabei konstruktiv vor.
Sei $x_1 \in K$ beliebig gewählt. Dann sind 2 Fälle möglich:

(i) $d(x, x_1) < \varepsilon$, $\forall x \in K \leadsto N_\varepsilon = \{x_1\}$ ist ε-Netz.

(ii) $\exists x_2 \in K : d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$.

Für die Situation (ii) sind wieder 2 Fälle möglich:

(i) $d(x, \{x_1, x_2\}) = \min_{i=1,2} d(x, x_i) < \varepsilon \leadsto N_\varepsilon = \{x_1, x_2\}$ ist ε-Netz.

(ii) $\exists x_3 \in K : d(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ und $d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$.

Setzt man diesen Prozeß fort, so erhählt man im "ungünstigen" Fall im n-ten Schritt $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.
Wieder gibt es 2 Möglichkeiten:

(i) $N_\varepsilon := \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist ε-Netz für K, oder

(ii) der Prozeß kann fortgesetzt werden.

Annahme: Der Prozeß bricht nicht nach endlich vielen Schritten mit einem ε-Netz für K ab.
$\leadsto \exists$ Folge (x_n) in K mit $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$.
Da K relativ kompakt ist, gilt aber

$$\mathcal{L}((x_n)) \neq \emptyset,$$

d.h. (x_n) enthält eine in X konvergente Teilfolge.
$\leadsto \exists \tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \exists x \in X \exists n_o \in \mathbb{N} : d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_o$, $n \in \tilde{\mathbb{N}}$.
$\leadsto d(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_o$, $n, m \in \tilde{\mathbb{N}}$.
$\leadsto$ Widerspruch! Also bricht der Prozeß ab! $\leadsto K$ ist total beschränkt.

Es sei nun (X, d) vollständig und K sei total beschränkt. Weiterhin sei (x_n) eine beliebige Folge in K.
Wir zeigen: $\mathcal{L}((x_n)) \neq \emptyset$.
O.B.d.A. sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht endlich (sonst ist der Beweis beendet). Nach Voraussetzung existiert $\forall m \in \mathbb{N}$ ein endliches $\frac{1}{m}$- Netz N_m von K, d.h.

$$K \subseteq \bigcup_{z \in N_m} B(z, \frac{1}{m}), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$\leadsto \exists z_1 \in N_1 : A_1 := B(z_1, 1) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht endlich.
$\leadsto \exists z_2 \in N_2 : A_2 := A_1 \cap B(z_2, \frac{1}{2})$ ist nicht endlich usw.

$\leadsto \exists z_m \in N_m : A_m := A_{m-1} \cap B(z_m, \frac{1}{m})$ ist nicht endlich.
Es gilt: $A_m = \bigcap\limits_{i=1}^{m} B(z_i, \frac{1}{i}) \cap \{x_n : n \in I\!N\}$
Wir wählen nun eine Teilfolge von (x_n) wie folgt aus:

$$\begin{aligned} x_{k(1)} &\in B(z_1, 1) \\ x_{k(n)} &\in \bigcap_{i=1}^{n} B(z_i, \frac{1}{i}), \quad k(n) > k(n-1), \quad \forall n \in I\!N, n \geq 2. \end{aligned}$$

Dies ist möglich, da A_n, $\forall n \in I\!N$, nicht endlich ist.
Nun gilt nach Konstruktion:

$$d(x_{k(m)}, z_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall m \geq n.$$

$\leadsto d(x_{k(m)}), x_{k(n)}) \leq d(x_{k(m)}, z_n) + d(z_n, x_{k(n)}) < \frac{2}{n}, \quad \forall m \geq n$
$\leadsto$ $(x_{K(n)})_{n \in I\!N}$ ist Fundamentalfolge in X und besitzt deshalb in X einen Grenzwert.
$\leadsto \mathcal{L}((x_n)) \neq \emptyset$. $\square$.

Nach Satz 2.39 ist also jede relativ kompakte Menge in einem metrischen Raum beschränkt (jede kompakte Menge ist beschränkt und abgeschlossen). Wir werden in Kap. 3.2 zeigen, daß jede beschränkte Menge im $I\!R^m$ auch relativ kompakt ist. Dies ist in einem allgemeinen metrischen Raum i.a. nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.40
Wir betrachten den metrischen Raum $(B(T), d)$ aus Bsp. 2.2c) für $T := I\!N$. D.h. die Metrik hat die Gestalt

$$d(f, g) := \sup_{m \in I\!N} |f(m) - g(m)| \quad \forall f, g \in B(I\!N).$$

Es sei $\Theta \in B(I\!N)$, $\Theta(m) := 0$, $\forall m \in I\!N$, und wir betrachten die abgeschlossene Einheitskugel

$$\bar{B}(\Theta, 1) = \{f \in B(I\!N) : \sup_{m \in I\!N} |f(m)| \leq 1\}.$$

Die folgenden Elemente von $B(I\!N)$, $f_n(m) := \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$ $\forall n \in I\!N$, haben offenbar die Eigenschaften:

$$f_n \in \bar{B}(\Theta, 1), \forall n \in I\!N, \text{ und } d(f_n, f_k) = 1, \forall n, k \in I\!N, n \neq k.$$

$\leadsto$ *es existiert keine konvergente Teilfolge von (f_n), d.h., $\bar{B}(\Theta, 1)$ ist <u>nicht</u> relativ kompakt, aber beschränkt.*

Lemma 2.41
Es seien $K_n \subseteq X$, $\forall n \in I\!N$, nichtleer und abgeschlossen, mit der Eigenschaft, daß $K_{n-1} \supseteq K_n$, $\forall n \geq 2$, und K_1 kompakt. Dann gilt $\bigcap\limits_{n\in I\!N} K_n \neq \emptyset$.

<u>**Beweis:**</u>
Wir wählen $x_n \in K_n$, $\forall n \in I\!N$. Dann ist (x_n) eine Folge in K_1. Wegen der Kompaktheit von K_1, existiert eine Teilfolge $(x_{k(n)})_{n\in I\!N}$ von (x_n), die gegen $x \in K_1$ konvergiert. Wegen $k(n) \geq n$, $\forall n \in I\!N$ folgt:

$x_{k(n)} \in K_m, \quad \forall n \geq m, \quad \forall m \in I\!N.$

$\rightsquigarrow x \in \bar{K}_m = K_m$, $\forall m \in I\!N$ (Satz 2.17).
$\rightsquigarrow x \in \bigcap\limits_{n\in I\!N} K_n$. □

Definition 2.42
Eine Familie $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$ von offenen Teilmengen von X heißt <u>Überdeckung</u> von $K \subseteq X$, falls $\bigcup\limits_{\lambda\in L} G_\lambda \supseteq K$.

Satz 2.43 *(Überdeckungssatz von Heine/Borel)*
$K \subseteq X$ ist kompakt gdw. zu jeder Überdeckung $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$ von K eine endliche Teilfamilie $(G_\lambda)_{\lambda\in H}$ ($H \subset L$ endlich) existiert, die K überdeckt.

<u>**Beweis:**</u>

a) Es sei K kompakt und $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$ eine Überdeckung von K.
<u>*Annahme:*</u> Es existiert keine endliche Teilfamilie von $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$, die eine Überdeckung von K ist.
Nach Satz 2.39 existiert $\forall n \in I\!N$ ein endliches $\frac{1}{n}$-Netz $\{x_1^{(n)}, \ldots, x_{k(n)}^{(n)}\}$ von K.

$$\rightsquigarrow \; K = \bigcup_{i=1}^{k(n)} \bar{B}(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}) \cap K, \quad \forall n \in I\!N.$$

Wir definieren nun induktiv eine Folge $(K_n)_{n\in I\!N}$ von Teilmengen von X, die die Voraussetzungen von Lemma 2.41 erfüllt. Entsprechend unserer Annahme existiert zunächst für $n = 1$ ein $i_1 \in \{1, \ldots, k(1)\}$, so daß die Menge

$$K_1 := \bar{B}(x_{i_1}^{(1)}, 1) \cap K$$

nicht durch eine endliche Teilfamilie von $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$ überdeckt werden kann.
Induktiv existiert ein $i_n \in \{1, \ldots, k(n)\}$, so daß die Menge

$$K_n := \bar{B}(x_{i_n}^{(n)}, \frac{1}{n}) \cap K_{n-1}$$

nicht durch eine endliche Teilfamilie von $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ überdeckt werden kann. Dieser Prozeß kann nicht nach endlich vielen Schritten abbrechen. Alle Mengen K_n, $n \in I\!N$, sind abgeschlossen und K_1 ist kompakt. Aus Lemma 2.41 folgt: $\bigcap\limits_{n \in I\!N} K_n \neq \emptyset$.

Sei $x \in \bigcap\limits_{n \in I\!N} K_n \subseteq K \leadsto \exists \lambda_o \in L : x \in G_{\lambda_o}$. Da G_{λ_o} offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq G_{\lambda_o}$. Wir wählen noch $n = n(\varepsilon) \in I\!N$, so daß $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt:

$$K_n \subseteq \bar{B}(x_{i_n}^{(n)}, \frac{1}{n}) \subseteq \bar{B}(x, \frac{2}{n}) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq G_{\lambda_o}.$$

$\leadsto K_n$ kann bereits durch G_{λ_o} überdeckt werden $\leadsto$ Widerspruch!

b) Wir setzen nun voraus, daß für jede Überdeckung der Menge K eine endliche Teilfamilie existiert, die ebenfalls K überdeckt.
Wir zeigen: K ist relativ kompakt und abgeschlossen.

(i) z.z.: K ist relativ kompakt.
Es sei (x_n) eine Folge in K. Wir definieren

$$A_n := \text{cl}(\{x_{n+i} : i \in I\!N_o\}), \quad \forall n \in I\!N.$$

<u>Annahme:</u> $\bigcap\limits_{n \in I\!N} A_n = \emptyset$
$\leadsto K \subseteq X = X \backslash (\bigcap\limits_{n \in I\!N} A_n) = \bigcup\limits_{n \in I\!N} (X \backslash A_n)$.
Also ist $(X \backslash A_n)_{n \in I\!N}$ eine Überdeckung für K.
$\leadsto \exists \{n_i : i = 1, \ldots, k\} \subseteq I\!N$, so daß

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (X \backslash A_{n_i}) = X \backslash (\bigcap_{i=1}^{k} A_{n_i})$$

$\leadsto$ für $n := \max\{n_i : i = 1, \ldots k\}$ gilt: $x_n \notin K$
$\leadsto$ Widerspruch!
$\leadsto \exists x \in \bigcap\limits_{n \in I\!N} A_n \leadsto x \in \text{cl}(\{x_{n+i} : i \in I\!N_o\}),\ \forall n \in I\!N$
$\leadsto x \in \mathcal{L}((x_n))$ (vgl. 2.24).

(ii) z.z.: K ist abgeschlossen.
Sei $a \in \bar{K} \backslash K \leadsto \varepsilon(x) := \frac{1}{2} d(a, x) > 0,\ \forall x \in K$.
$\leadsto (B(x, \varepsilon(x)))_{x \in K}$ ist Überdeckung von K.
$\leadsto \exists x_i \in K,\ i = 1, \ldots, m : K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon(x_i))$.
Wir setzen $\varepsilon := \min\{\varepsilon(x_i) : i = 1, \ldots, m\} > 0$ und betrachten die offene Kugel $B(a, \varepsilon)$.
Sei $x \in K \leadsto \exists i_o \in \{1, \ldots, m\} : x \in B(x_{i_o}, \varepsilon(x_{i_o}))$
$\leadsto \varepsilon(x_{i_o}) = \frac{1}{2} d(a, x_{i_o}) < \frac{1}{2}(d(a, x) + \varepsilon(x_{i_o}))$

$\rightsquigarrow \varepsilon \leq \varepsilon(x_{i_o}) \leq d(a,x)$.
Also gilt: $K \cap B(a,\varepsilon) = \emptyset \rightsquigarrow a \notin K' \rightsquigarrow a \notin \bar{K}$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch!
Demnach gilt $K = \bar{K}$ und K ist abgeschlossen. $\square$

2.5 Zusammenhängende Mengen

Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.

Definition 2.44
A heißt zusammenhängend, falls kein Paar offener Mengen $G_1 \subseteq X$ und $G_2 \subseteq X$ existiert, so daß $A_i := G_i \cap A \neq \emptyset$, $i = 1,2$, und

$A_1 \cup A_2 = A, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset.$

Beispiele 2.45

a) *$A := \emptyset$ und $A := \{x\}$ $(x \in X)$ sind stets zusammenhängend.*
$A := \{x_1, x_2\}$ $(x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2)$ ist nicht zusammenhängend.
Bew.: Um letzteres einzusehen, setzt man $\varepsilon := d(x_1,x_2)$ und betrachtet $G_i := B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, $i = 1,2$. $\square$

b) *In einem diskreten metrischen Raum ist jede Teilmenge mit mindestens 2 Elementen nicht zusammenhängend.*
Bew.: Sei (X,d) diskreter metrischer Raum und $A \subseteq X$. Sei $x \in A$.
$\rightsquigarrow \{x\}$ und $A \backslash \{x\}$ sind offen und nichtleer. Außerdem erfüllen sie die Bedingungen von Def. 2.44. $\square$

c) *Sei $X := \mathbb{R}$.* **Def.:** *Eine Menge $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt Intervall, falls für alle $x, y \in I, x < y$ gilt: $[x,y] \subseteq I$.*
Beh.: $A \subseteq \mathbb{R}$ ist zusammenhängend gdw. A ein Intervall ist.
Bew.: $(\Longrightarrow)$: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend.
$A = \emptyset$ und $A = \{x\}$ sind offenbar Intervalle und zusammenhängend.
Es existieren nun $a, b \in A, a < b$, z.z.: $[a,b] \subseteq A$
Sei $x \in [a,b]$ (bzw. $a < x < b$). Wir zeigen: $x \in A$:
Annahme: $x \notin A$.
Wir betrachten $G_1 := \{y \in \mathbb{R}, y < x\}, G_2 := \{y \in \mathbb{R}, y > x\}$. G_1, G_2 sind offen. Seien $A_i := G_i \cup A \neq \emptyset, i = 1,2$; $\quad a \in G_1, b \in G_2$
$\rightsquigarrow A_1 \cup A_2 = (\mathbb{R} \backslash \{x\} \cup A = A$ und $A_1 \cap A_2 \subseteq G_1 \cap G_2 = \emptyset$
$\rightsquigarrow A$ ist nicht zusammenhängend. Widerspruch!
$\rightsquigarrow x \in A \rightsquigarrow [a,b] \in A \rightsquigarrow A$ ist ein Intervall.
$(\Longleftarrow)$: Sei A ein Intervall.
Annahme: $\exists G_1, G_2$ offen mit $A_i := G_i \cap A \neq \emptyset$, $i = 1,2$, und $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
Seien $x \in A_1$, $y \in A_2$ und o.B.d.A. $x < y$.

Auf Grund der Gestalt von A gilt zunächst $[x,y] \subseteq A$.
Wir definieren nun $z := \sup [x,y] \cap A_1$ und unterscheiden die folgenden Fälle:

(i) $z \in A_1 \leadsto z < y \leadsto \exists \varepsilon > 0 : [z, z+\varepsilon[\subseteq [x,y] \subseteq A$ *und* $[z, z+\varepsilon[\subseteq G_1 \leadsto [z, z+\varepsilon[\subseteq [x,y] \cap A_1$
$\leadsto$ *Widerspruch zur Definition von z!*

(ii) $z \in A_2 \leadsto x < z \leadsto$ *analog* $\exists \varepsilon > 0$:

$]z-\varepsilon, z] \subseteq A_2 \cap [x,y]$

$\leadsto \sup [x,y] \cap A_1 \leq z - \varepsilon \leadsto$ *Widerspruch!*

Also gilt $z \notin A_1 \cup A_2 \supset [x,y] \leadsto$ Widerspruch und die Annahme ist falsch. □

Eigenschaften 2.46

a) *X ist zusammenhängend gdw. aus $A \subseteq X$ offen und abgeschlossen folgt: $A = X$ oder $A = \emptyset$.*

b) *Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend und gilt $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, so ist auch B zusammenhängend.*

c) *Ist $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X mit der Eigenschaft*
$\bigcap\limits_{\lambda \in L} A_\lambda \neq \emptyset$,
dann ist $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ zusammenhängend.

d) *Ist X zusammenhängend, so hat jede von X bzw. $\emptyset$ verschiedene Teilmenge von X wenigstens einen Randpunkt.*

<u>**Beweis:**</u>

a) Es sei X zusammenhängend und $A \subseteq X$ offen und abgeschlossen.
<u>Annahme:</u> $A \neq \emptyset$ und $A \neq X$.

$\leadsto$ $G_1 := X \backslash A$ ist offen und es gilt mit $G_2 := A$:
$G_1 \neq \emptyset, G_2 \neq \emptyset, \quad X = G_1 \cup G_2, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset.$
$\leadsto$ X ist nicht zusammenhängend $\leadsto$ Widerspruch.

Für die umgekehrte Richtung <u>nehmen wir an</u>, daß nichtleere offene Mengen $G_i \subseteq X$, $i = 1, 2$, existieren, so daß
$X = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ (d.h. X ist nicht zusammenhängend).
$\leadsto G_2 = X \backslash G_1$ ist abgeschlossen, aber $G_2 \neq \emptyset$ und $G_2 \neq X$
$\leadsto$ Widerspruch!

b) Es sei $A \subseteq X$ zusammenhängend und sei $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$.
<u>Annahme:</u> $\exists$ offene Mengen $G_1, G_2 \subseteq X$ mit $B_i := G_i \cap B \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, und $B = B_1 \cup B_2, B_1 \cap B_2 = \emptyset$.
Wir zeigen: Daraus folgt: auch A ist nicht zusammenhängend, d.h. $B_i \cap A = G_i \cap A \neq \emptyset$, $i = 1, 2$.
Sei $i \in \{1, 2\}$ und $b \in B_i \rightsquigarrow$ 2 Fälle (wegen Satz 2.12):

(i) $b \in A$ und $b \in G_i \rightsquigarrow b \in A_i \rightsquigarrow A_i \neq \emptyset \rightsquigarrow$ alles ist gezeigt.

(ii) $b \in A' \backslash A$ (d.h. b Häufungspunkt) und $b \in G_i \rightsquigarrow G_i$ ist Umgebung für b
$\rightsquigarrow A_i = G_i \cap A \neq \emptyset$, nach Def. des Häufungspunktes.

Also gilt für $A_i := G_i \cap A$, $i = 1, 2 : A_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, und
$A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (beides nach Annahme)
$\rightsquigarrow A$ ist nicht zusammenhängend $\rightsquigarrow$ Widerspruch!

c) <u>Annahme:</u> $\exists$ offene Mengen $G_1, G_2 \subseteq X$ mit $A_i := G_i \cap A \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, und $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
Es sei nun $a \in \bigcap\limits_{\lambda \in L} A_\lambda \subseteq A$. O.B.d.A. gelte $a \in A_1$.
$\rightsquigarrow \exists \lambda \in L : A_2 \cap A_\lambda \neq \emptyset \rightsquigarrow a \in A_1 \cap A_\lambda$.
Wir erhalten also: $G_i \cap A_\lambda \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, und

$$A_\lambda = (G_1 \cap A_\lambda) \cup (G_2 \cap A_\lambda), \quad (G_1 \cap A_\lambda) \cap (G_2 \cap A_\lambda) = \emptyset.$$

$\rightsquigarrow A_\lambda$ ist nicht zusammenhängend.
$\rightsquigarrow$ Widerspruch!

d) Sei $A \subseteq X$ mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq X$.
<u>Annahme:</u> Es existiert kein Randpunkt von A.
Nach Def. 2.8 ist jedes $x \in X$ entweder innerer Punkt von A oder äußerer Punkt von A oder Randpunkt von A ($\widehat{=}$ Randpunkt von $X \backslash A$).
Entsprechend unserer Annahme gilt deshalb:

$$X = int(A) \cup int(X \backslash A).$$

Nach Voraussetzung gilt aber $A = int(A) \neq \emptyset$ und $(X \backslash A) = int(X \backslash A) \neq \emptyset$.
Folglich ist X nicht zusammenhängend $\rightsquigarrow$ Widerspruch! $\square$

Bemerkung 2.47 *In Kapitel 4.1 werden wir zeigen, daß stetige Bilder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend sind. Diese Eigenschaft und 2.46 b) und c) führen zu einer großen Zahl von (weiteren) Beispielen zusammenhängender Mengen.*
Unmittelbar aus 2.46 b) folgt für $X := \mathbb{R}$: Die Mengen $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, $[a, b]$, $[a, b[$ und $]a, b]$ (für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$) sind zusammenhängend.

2.6 Das Produkt metrischer Räume

Es seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, zwei metrische Räume und wir betrachten wie im Beispiel 2.2 g) den metrischen Raum (X, d), wobei

$X := X_1 \times X_2$

$d(x, y) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X.$

Im folgenden werden wir Kugeln bez. der Metriken d, d_1, d_2 in den Räumen X, X_1, X_2 mit B, B_1, B_2 bezeichnen.
Mit $pr_i : X \to X_i$, $i = 1, 2$, bezeichnen wir die Projektionen von $X_1 \times X_2$ auf X_i (vgl. Beispiele nach Def. 1.16), d.h.

$pr_i(x_1, x_2) := x_i, \quad \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2, \quad i = 1, 2.$

Die zentrale Fragestellung besteht in diesem Kapitel darin, wie die Begriffe "offen", "abgeschlossen", "kompakt", "vollständig", "zusammenhängend" in X mit den entsprechenden Eigenschaften in X_1 und X_2 in Zusammenhang stehen.

Lemma 2.48

a) *$\forall x = (x_1, x_2) \in X$, $\forall r > 0$:*
$B(x, r) = B_1(x_1, r) \times B_2(x_2, r)$, $\bar{B}(x, r) = \bar{B}_1(x_1, r) \times \bar{B}_2(x_2, r)$.

b) *Sind A_i offen in X_i, $i = 1, 2$, so ist $A_1 \times A_2$ offen in X.*

c) *Für alle $A_i \subseteq X_i$, $i =, 1, 2$ gilt: $\overline{A_1 \times A_2} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$.*

Beweis:

a) Sei $x = (x_1, x_2) \in X$ und $r > 0$. Wir betrachten als Beispiel die offenen Kugeln. Dann gilt:

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y = (y_1, y_2) \in X : \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} < r\} \\ &= \{y = (y_1, y_2) \in X : d_1(x_1, y_1) < r \text{ und } d_2(x_2, y_2) < r\} \\ &= \{y_1 \in X_1 : d_1(x_1, y_1) < r\} \times \{y_2 \in X_2 : d_2(x_2, y_2) < r\} \\ &= B_1(x_1, r) \times B_2(x_2, r) \end{aligned}$$

b) Seien $A_i \subseteq X_i$ offen, $i = 1, 2$, und $x = (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ bel.
Nach Vor. gilt: $\exists \varepsilon_i > 0 : B_i(x_i, \varepsilon_i) \subseteq A_i$, $i = 1, 2$.
Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ folgt ebenfalls:

$B_i(x_i, \varepsilon) \subseteq A_i, \quad i = 1, 2.$

$\rightsquigarrow B(x, \varepsilon) = B_1(x_1, \varepsilon) \times B_2(x_2, \varepsilon) \subseteq A_1 \times A_2$.
$\rightsquigarrow A_1 \times A_2$ ist offen.

c) Seien $A_i \subseteq X_i$, $i = 1,2$, und wir zeigen beide Inklusionen:

(i) $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \subseteq \overline{A_1 \times A_2}$ und (ii) $\overline{A_1 \times A_2} \subseteq \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$.

(i) Es sei $x = (x_1, x_2) \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ und es sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt.
Nach Satz 2.17 existieren $y_i \in A_i$, $i = 1,2$, so daß

$d_i(x_i, y_i) < \varepsilon, \quad i = 1,2.$

Daraus folgt für $y := (y_1, y_2) \in A_1 \times A_2$:

$d(x, y) < \varepsilon.$

Da dies für bel. $\varepsilon > 0$ gilt, folgt: $x \in \overline{A_1 \times A_2}$ (2.17!).

(ii) Sei $(x_1, x_2) \in \overline{A_1 \times A_2}$.
<u>Annahme:</u> $(x_1, x_2) \notin \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$, o.B.d.A. $x_1 \notin \bar{A}_1$
$\rightsquigarrow (x_1, x_2) \in (X_1 \backslash \bar{A}_1) \times X_2$ und die letztere Menge ist offen nach Teil b).
Ferner gilt: $((X_1 \backslash \bar{A}_1) \times X_2) \cap A_1 \times A_2 = \emptyset$
$\rightsquigarrow (x_1, x_2) \notin (A_1 \times A_2) \cup (A_1 \times A_2)' = \overline{A_1 \times A_2}$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch! □

Satz 2.49
Eine Folge $((x_n^{(1)}, x_n^{(2)}))$ *in* $X_1 \times X_2$ *ist konvergent (Fundamentalfolge) gdw.* $(x_n^{(1)})$ *und* $(x_n^{(2)})$ *sind konvergent (Fundamentalfolge) in* X_1 *bzw.* X_2.

<u>**Beweis:**</u>
Wir betrachten als Beispiel die Fundamentalfolgen–Eigenschaft.

($\rightarrow$) Sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt.
$\rightsquigarrow \exists n_o(\varepsilon) \in I\!N : \max\{d_1(x_n^{(1)}, x_m^{(1)}),\ d_2(x_n^{(2)}, x_m^{(2)})\} < \varepsilon$
für alle $m, n \geq n_o(\varepsilon)$.
$\rightsquigarrow d_i(x_n^{(i)}, x_m^{(i)}) < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_o(\varepsilon)$, $i = 1,2$.
d.h. beide Komponentenfolgen sind Fundamentalfolgen.

($\leftarrow$) Sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt.
$\rightsquigarrow \exists n_o^{(i)}(\varepsilon) \in I\!N : d_1(x_n^{(i)}, x_m^{(i)}) < \varepsilon$,
$\forall m, n \geq n_o^{(i)}(\varepsilon)$, $i = 1,2$.
$\rightsquigarrow \max\{d_1(x_n^{(1)}, x_m^{(1)}),\ d_2(x_n^{(2)}, x_m^{(2)})\} < \varepsilon$,
$\forall m, n \geq \max\{n_o^{(1)}(\varepsilon), n_o^{(2)}(\varepsilon)\} =: n_o(\varepsilon)$.
$\rightsquigarrow ((x_n^{(1)}, x_n^{(2)}))$ ist Fundamentalfolge in $X_1 \times X_2$. □

Satz 2.50
(X, d) *ist vollständig (separabel), gdw.* (X_1, d_1) *und* (X_2, d_2) *vollständig (separabel) sind.*

Beweis:

($\Longleftarrow$) a) Vollständigkeit von (X, d):
Sei $((x_n^{(1)}, x_n^{(2)}))$ Fundamentalfolge in $X \leadsto (x_n^{(i)})$ ist Fundamentalfolge in X_i, $i = 1, 2$ (Satz 2.49), und ist deshalb in X_i konvergent ($i = 1, 2$). Wieder nach 2.49 ist folglich die Folge $((x_n^{(1)}, x_n^{(2)}))$ in X konvergent.
b) Separabilität von (X, d):
Nach Vor. existieren höchstens abzählbare Teilmengen A_i von X_i, $i = 1, 2$. Dann ist $A_1 \times A_2$ höchstens abzählbar (Satz 1.27) und nach Lemma 2.48 c) gilt:

$$\overline{A_1 \times A_2} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2 = X_1 \times X_2 = X.$$

Also ist (X, d) separabel.
($\Longrightarrow$) a) Sei X vollständig, z.z.: (X_1, d_1) ist vollständig (o.B.d.A.)
Sei $(x_n^{(1)})$ Cauchyfolge in X_1, $x^{(2)} \in X$ beliebig gewählt, und wir betrachten die Folge $((x_n^{(1)}, x^{(2)}))$ in X.
$\leadsto d((x_n^{(1)}, x^{(2)}), (x_m^{(1)}, x^{(2)})) = d_1(x_n^{(1)}, x_m^{(1)})$
$\leadsto (x_n^{(1)}, x^{(2)})$ ist Cauchyfolge in X.
$\leadsto$ Wegen der Vollständigkeit von X und Satz 2.49 folgt: $(x_n^{(1)})$ ist konvergent in X_1, d.h. X_1 ist vollständig.
b) Sei $A \subseteq X$ höchstens abzählbar und dicht. Wir zeigen (o.B.d.A.): X_1 ist separabel.
Wir betrachten $A_1 := pr_1(A) = \{x_1 \in X_1 : \exists x_2 \in X_2 \text{ mit } (x_1, x_2) \in A\} \subseteq X_1$
$\leadsto A_1$ ist höchstens abzählbar.
noch z.z.: $\bar{A}_1 = X_1$, seien $x_i \in X_i, i = 1, 2$, beliebig.
$\leadsto \exists((x_n^{(1)}, x_n^{(2)}))$ in $A : (x_n^{(1)}, x_n^{(2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x_1, x_2)$
$\leadsto (x_n^{(1)})$ ist Folge in A_1 und konvergiert gegen x_1. $\leadsto X_1 \subseteq \bar{A}_1$, d.h. $\bar{A}_1 = X_1$.
A_1 ist also dicht in $X_1 \leadsto X_1$ ist separabel. □

Satz 2.51

a) *Ist $A \subseteq X_1 \times X_2$ (offen, beschränkt, relativ kompakt) zusammenhängend, so gilt dies auch für $pr_1(A)$ und $pr_2(A)$, in X_1 bzw. X_2.*

b) *Sind $A_i \subseteq X_i$, $i = 1, 2$ (beschränkt, relativ kompakt) zusammenhängend, so gilt dies auch für $A := A_1 \times A_2 \subseteq X_1 \times X_2$.*

Beweis:

a) • Sei $A \subseteq X_1 \times X_2$ offen.
Wir zeigen: $pr_1(A)$ ist offen in X_1 (analog für $pr_2(A)$).
Sei $x_1 \in pr_1(A)$ bel.
$\leadsto \exists x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A$.
$\leadsto \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) = B_1(x_1, \varepsilon) \times B_2(x_2, \varepsilon) \subseteq A \subseteq pr_1(A) \times pr_2(A)$.
Für letztere Inklusion vergleiche man auch 1.18.
$\leadsto B_1(x_1, \varepsilon) \subseteq pr_1(A) \leadsto pr_1(A)$ ist offen.

- Sei $A \subseteq X_1 \times X_2$ beschränkt.
  $\leadsto$ für $a = (a_1, a_2) \in A \ \exists r > 0 : A \subseteq \bar{B}(a, r)$
  $\leadsto A \subseteq \bar{B}_1(a_1, r) \times \bar{B}_2(a_2, r)$
  $\leadsto pr_1(A) \subseteq \bar{B}_1(a_1, r)$, d.h. $pr_1(A)$ ist beschränkt ($diam(pr_1(A)) \leq 2r$).

- Sei $A \subseteq X_1 \times X_2$ relativ kompakt.
  Wir zeigen: $pr_1(A)$ ist relativ kompakt.
  Sei $(x_n^{(1)})$ eine Folge in $pr_1(A)$.
  $\leadsto \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n^{(2)} \in X_2 : (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) \in A$
  $\leadsto$ nach Vor.: $\mathcal{L}((x_n^{(1)}, x_n^{(2)})) \neq \emptyset$
  $\leadsto \mathcal{L}((x_n^{(1)})) \neq \emptyset$ nach Satz 2.49, d.h. $pr_1(A)$ ist relativ kompakt.

- Sei $A \subseteq X_1 \times X_2$ zusammenhängend.
  Annahme: $pr_1(A)$ ist nicht zusammenhängend, d.h.
  $\exists G_1, G_2 \subseteq X_1$ offen, so daß $A_i := pr_1(A) \cap G_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$,
  $pr_1(A) = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
  Wir betrachten nun die Mengen

  $$\tilde{A}_i := A \cap G_i \times X_2, \quad i = 1, 2,$$

  und vermerken, daß die Mengen $G_i \times X_2$, $i = 1, 2$, offen in $X_1 \times X_2$ sind (2.48!).
  Es gilt: $\tilde{A}_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2,$, denn

  $$\begin{aligned} \exists x_1^{(i)} \in pr_1(A) \cap G_i \ &\leadsto \ \exists x_2^{(i)} \in X_2 : (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in A. \\ &\leadsto \ (x_1^{(1)}, x_2^{(i)}) \in A \cap G_i \times X_2, \ i = 1, 2. \end{aligned}$$

  Weiterhin

  $$\begin{aligned} \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 &= (A \cap G_1 \times X_2) \cup (A \cap G_2 \times X_2) \\ &= A \cap (G_1 \cup G_2) \times X_2 \supseteq A \cap pr_1(A) \times X_2 = A \\ \leadsto \quad \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 &= A, \text{ und} \\ \tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 &= A \cap (G_1 \cap G_2) \times X_2 = \emptyset \end{aligned}$$

  Also wäre A nicht zusammenhängend $\leadsto$ Widerspruch!

b)
- Seien A_1 und A_2 beschränkt.
  $\leadsto$ für $a_i \in A_i \ \exists r_i > 0 : A_i \subseteq \bar{B}_i(a_i, r_i)$, $i = 1, 2$.
  $\leadsto A_1 \times A_2 \subseteq \bar{B}_1(a_1, r_1) \times \bar{B}_2(a_2, r_2) \subseteq \bar{B}(a, r)$
  mit $a := (a_1, a_2)$,$r := \max\{r_1, r_2\}$.
  $\leadsto A_1 \times A_2$ ist beschränkt ($diam(A) \leq 2r$).

- Seien A_1 und A_2 relativ kompakt.
  Sei $((x_n^{(1)}, x_n^{(2)}))$ eine Folge in $A_1 \times A_2$.
  $\leadsto$ da A_1 relativ kompakt: $\mathcal{L}((x_n^{(1)})) \neq \emptyset$,

d.h. $\exists \tilde{I\!N} \subseteq I\!N$:
$(x_n^{(1)})_{n\in\tilde{I\!N}}$ ist konvergent in X_1.

$\rightsquigarrow \mathcal{L}((x_n^{(2)})_{n\in\tilde{I\!N}}) \neq \emptyset$, da A_2 relativ kompakt.
$\rightsquigarrow \exists \hat{I\!N} \subseteq \tilde{I\!N} : (x_n^{(2)})_{n\in\hat{I\!N}}$ ist konvergent in X_2.

$\rightsquigarrow ((x_n^{(1)}, x_n^{(2)}))_{n\in\hat{I\!N}}$ ist konvergent in $X_1 \times X_2$ (Satz 2.49!).
$\rightsquigarrow A_1 \times A_2$ ist relativ kompakt.

- Seien A_1 und A_2 zusammenhängend. Wir zeigen: $A = A_1 \times A_2$ ist zusammenhängend.
  <u>Annahme:</u> $A := A_1 \times A_2$ ist nicht zusammenhängend, d.h.
  $\exists G_1, G_2 \subseteq X$ offen: $A^{(i)} := A \cap G_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$,
  $A = A^{(1)} \cup A^{(2)}$, $A^{(1)} \cap A^{(2)} = \emptyset$.
  Wir wählen nun $(x_1, x_2) \in A^{(1)}$ und $(y_1, y_2) \in A^{(2)}$ und die Menge $C := (\{x_1\} \times A_2) \cup (A_1 \times \{y_2\}) \subseteq A_1 \times A_2$, $C \subseteq A$. Weiterhin seien $C^{(i)} := C \cap G_i, i = 1, 2$. Dann gilt:

  $(x_1, x_2) \in C^{(1)}, (y_1, y_2) \in C^{(2)} \rightsquigarrow C^{(i)} \neq \emptyset, i = 1, 2$
  $C^{(1)} \cup C^{(2)} = C$ (da schon $A_1 \cup A_2 = A$), und $C^{(1)} \cap C^{(2)} \subseteq A^{(1)} \cap A^{(2)} = \emptyset$.

  Also ist C nicht zusammenhängend.
  <u>Beh.:</u> C ist doch zusammenhängend (und die Annahme falsch).
  <u>Bew.:</u> Dazu wenden wir 2.46 c) an. Wegen der Tatsache, daß gilt

  $(x_1, y_2) \in (\{x_1\} \times A_2) \cap (A_1 \times \{y_2\})$,

  genügt es, zu zeigen: $\{x_1\} \times A_2$ und $A_1 \times \{y_2\}$ sind zusammenhängend.
  Wir zeigen (o.B.d.A.): $\{x_1\} \times A_2$ ist zusammenhängend.
  Wir betrachten dazu die bijektive Abbildung $f : A_2 \to \{x_1\} \times A_2$, definiert durch $f(a) := (x_1, a)$, $\forall a \in A_2$.
  f ist aber eine stetige Abbildung (vgl. Kap. 4.1), $d(f(a), f(\tilde{a})) = d(a, \tilde{a})$, $\forall a, \tilde{a} \in A$.
  Deshalb ist nach Satz 4.8 a) $f(A_2) = \{x_1\} \times A_2$ (als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge) zusammenhängend.
  Also: C ist zusammenhängend und der Satz bewiesen. □

Folgerung 2.52
$A \subseteq X_1 \times X_2$ ist (beschränkt) relativ kompakt gdw. $pr_1(A)$ und $pr_2(A)$ (beschränkt) relativ kompakt in X_1 bzw. X_2 sind.

<u>**Beweis:**</u>
($\rightarrow$) vgl. Satz 2.51 a).
($\leftarrow$) folgt aus $A \subseteq pr_1(A) \times pr_2(A)$ und Satz 2.51 b). □

Beispiel 2.53
Satz 2.51 b) gilt auch für abgeschlossene Mengen A_1 *und* A_2 *wegen* $\overline{A_1 \times A_2} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2 = A_1 \times A_2$ *(Satz 2.48 c)).*
Die Aussage von Satz 2.51 a) gilt jedoch <u>*nicht*</u> *für* $A \subseteq X_1 \times X_2$ *abgeschlossen:*
Sei $X := I\!R \times I\!R = I\!R^2$, $A := \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 : x_1 x_2 = 1\}$.
$\rightsquigarrow$ *A ist abgeschlossen (mit Satz 2.17 und Satz 3.7!)*
<u>*Aber*</u>*:* $pr_1(A) = I\!R \backslash \{0\}$ *ist nicht abgeschlossen!*

Bemerkung 2.54
Man kann auf X auch weitere Metriken definieren. Eine weitere wichtige Metrik ist:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x,y) &:= (d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2)^{1/2} \\ &\ (\forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in X) \end{aligned}$$

Es gilt: $d(x,y) \le \tilde{d}(x,y) \le \sqrt{2} d(x,y)$, $\forall x, y \in X$.
(Die Metrik-Eigenschaften folgen aus denen von d_1 *und* d_2*, die Dreiecksungleichung folgt analog zum Beweis der Dreiecksungleichung für die euklidische Norm.) Deshalb sind Mengen in X offen (abgeschlossen) bez. d gdw. sie offen (abgeschlossen) bez.* $\tilde{d}$ *sind.*
Folgen in X sind konvergent (Fundamentalfolge) bez. d gdw. sie es bez. $\tilde{d}$ *sind!*
Deswegen bleiben alle Aussagen des Kap. 2.6 (mit Ausnahme von 2.48 a)) ebenfalls richtig für $(X, \tilde{d})$*!*

Bemerkung 2.55
Sämtliche Aussagen in diesem Kapitel lassen sich auf das Produkt endlich vieler metrischer Räume übertragen.

3 Folgen und Reihen

3.1 Reelle Zahlenfolgen und weitere Eigenschaften von $I\!R$

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht der metrische Raum $(I\!R, |\cdot|)$, seine Eigenschaften und die Konvergenz von Folgen in $I\!R$, einschließlich einer ganzen Reihe von Beispielen.

Definition 3.1
Es sei (x_n) eine Folge in $I\!R$. Diese heißt

- *(streng) monoton wachsend, falls $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} > x_n)$, $\forall n \in I\!N$;*
- *(streng) monoton fallend, falls $x_{n+1} \leq x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$, $\forall n \in I\!N$;*
- *monoton, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist;*
- *(von unten, von oben) beschränkt, falls $\{x_n : n \in I\!N\}$ (nach unten, nach oben) beschränkt ist;*
- *Nullfolge, falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.*

Lemma 3.2
Jede Folge in $I\!R$ enthält eine monotone Teilfolge.

Beweis:
Wir definieren für eine gegebene Folge (x_n) in $I\!R$ die Menge

$M := \{m \in I\!N : x_n \geq x_m, \forall n > m\}$,

und unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle:

(i) M ist nicht endlich:
Es seien $m(n) \in M$, $\forall n \in I\!N$, mit $m(1) < m(2) < m(3) < \ldots$
Dann gilt nach Definition von M:

$$x_{m(1)} \leq x_{m(2)} \leq x_{m(3)} \leq \ldots$$

Also ist die Teilfolge $(x_{m(n)})_{n\in I\!N}$ monoton wachsend.

(ii) M ist endlich:
Ist $M = \emptyset$, setzen wir formal $\max M = 0$. Andernfalls ist $\max M \in I\!N$.
$\rightsquigarrow m \notin M$, $\forall m > \max M$.
($m \notin M$ bedeutet: $\exists n(m) \in I\!N$, $n(m) > m$, so daß $x_{n(m)} < x_m$)
Wir konstruieren nun induktiv:

$$\begin{array}{lll} n(1) \in I\!N, & n(1) > \max M & \text{beliebig;} \\ n(k) \in I\!N, & n(k) > n(k-1), & \forall k \in I\!N,\ k \geq 2, \text{ so daß} \\ & x_{n(k)} < x_{n(k-1)}. & \end{array}$$

Dann ist die Folge $(x_{n(k)})_{k \in I\!N}$ streng monoton fallend.
In beiden Fällen gelingt es also, eine monotone Teilfolge auszuwählen.
□

Satz 3.3
Eine monotone Folge in $I\!R$ ist konvergent gdw. sie beschränkt ist.
Ist (x_n) monoton wachsend, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in I\!N\}$,
ist (x_n) monoton fallend, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in I\!N\}$.

Beweis:
Die eine Richtung ist trivial, da konvergente Folgen beschränkt sind (vgl. Satz 2.21).Für die andere Richtung sei (x_n) beschränkt und o.B.d.A. monoton wachsend.
Wir zeigen: (x_n) ist konvergent.
Nach Voraussetzung gilt $s := \sup\{x_n : n \in I\!N\} \in I\!R$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach Definition des Supremums existiert nun ein $n_o(\varepsilon) \in I\!N$, so daß $s - \varepsilon < x_{n_o} \leq s$.
Wegen der Monotonie der Folge gilt dann aber

$$s - \varepsilon < x_{n_o} \leq x_n \leq s, \quad \forall n \in I\!N, n \geq n_o,$$

$$\rightsquigarrow |s - x_n| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o.$$

Also ist s Grenzwert der Folge (x_n). Für monoton fallende Folgen argumentiert man analog. □

Die folgenden beiden Aussagen über die Vollständigkeit von $I\!R$ und die Charakterisierung relativ kompakter Teilmengen von $I\!R$ wurden bereits in Kapitel 2 annonciert. Beides sind wichtige Resultate über $I\!R$, für das zweite geben wir sogar zwei verschiedene Beweise an.

Satz 3.4
Der metrische Raum $(I\!R, |\cdot|)$ ist vollständig (und separabel), d.h. eine Folge in $I\!R$ ist konvergent gdw. sie Fundamentalfolge ist.

Beweis:
Es sei (x_n) eine Fundamentalfolge in $I\!R$. Nach Satz 2.21 ist diese Folge beschränkt. Nach Lemma 3.2 besitzt die Folge eine monotone Teilfolge, die nach Satz 3.3 sogar konvergent ist.

Wir haben also: (x_n) ist Fundamentalfolge mit $\mathcal{L}((x_n)) \neq \emptyset$.
Nach Eigenschaften 2.24 e) ist (x_n) deshalb konvergent.
Also ist $(I\!R, |\cdot|)$ vollständig.
(Q ist abzählbar und dicht in $I\!R \rightsquigarrow I\!R$ ist separabel.) $\square$

Satz 3.5 *(Bolzano/Weierstraß)*
Jede beschränkte Teilmenge von $I\!R$ ist relativ kompakt.

Beweis: (1. Variante)
Sei $A \subseteq I\!R$ beschränkt und (x_n) eine Folge in A. Also ist auch die Folge beschränkt und besitzt wegen Lemma 3.2/Satz 3.3 eine (monotone) konvergente Teilfolge. Also: $\mathcal{L}((x_n)) \neq \emptyset$. $\square$
Beweis: (2. Variante)
Sei $A \subseteq I\!R$ beschränkt. Deswegen existiert zu $a \in A$ ein $r > 0$, so daß

$$A \subseteq \bar{B}(a, r) = [a - r, a + r] =: I$$

Wir zeigen: I ist relativ kompakt.
Dazu wenden wir Satz 2.39 an und zeigen, daß I total beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wir wählen $n = n(\varepsilon)$ so groß, daß $\frac{2r}{n} < \varepsilon$. Dann ist $N_\varepsilon := \{x_k := a - r + k\frac{2r}{n}, k = 0, \ldots, n\}$ eine endliches ε-Netz für I. $\square$

Bemerkung 3.6
Nach Satz 3.5 und Satz 2.39 ist also eine Teilmenge von $I\!R$ relativ kompakt bzw. kompakt in $I\!R$ gdw. sie beschränkt bzw. beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz 3.7 *(Rechenregeln für Grenzwerte)*
Es seien (x_n) und (y_n) in $I\!R$ konvergente Folgen (gegen $x \in I\!R$ bzw. $y \in I\!R$). Dann gilt:

a) *Für beliebige $\alpha, \beta \in I\!R$ konvergiert die Folge $(\alpha x_n + \beta y_n)$ gegen $\alpha x + \beta y$.*

b) *Die Folge $(x_n y_n)$ konvergiert gegen xy.*

c) *Falls $y \neq 0$, so existiert ein $n_o \in I\!N$ mit $y_n \neq 0$, $\forall n \geq n_o$, und die Folge $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \geq n_o}$ konvergiert gegen $\frac{x}{y}$.*

d) $(|x_n|)$ *ist konvergent gegen $|x|$.*

Beweis:

a) Es gilt für alle $n \in I\!N$:

$$|\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)| \leq |\alpha||x_n - x| + |\beta||y_n - y|$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Nach Vor. existieren $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bzw. $\tilde{n}_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$|x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}, \quad \forall n \geq n_o(\varepsilon),$$
$$|y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}, \quad \forall n \geq \tilde{n}_o(\varepsilon).$$

Deshalb folgt für alle $n \geq \max\{n_o(\varepsilon), \tilde{n}_o(\varepsilon)\}$:

$$|\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)| \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|}\varepsilon < \varepsilon.$$

b) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &\leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \end{aligned}$$

Da (x_n) konvergent ist, ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt (Satz 2.21).
$\rightsquigarrow \exists C > 0 : |x_n| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Nach Vor. existieren $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bzw. $\tilde{n}_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad , \forall n \geq n_o(\varepsilon) \quad ,$$
$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |y|)} \quad , \forall n \geq \tilde{n}_o(\varepsilon) \quad .$$

$$\rightsquigarrow |x_n y_n - xy| < C\frac{\varepsilon}{2C} + |y|\frac{\varepsilon}{2(1 + |y|)} < \varepsilon, \ \forall n \geq \max\{n_o(\varepsilon), \tilde{n}_o(\varepsilon)\}.$$

c) Sei $y \neq 0 \rightsquigarrow$ die Existenz von $n_o \in \mathbb{N}$ mit $y_n \neq 0$, $\forall n \geq n_o$, folgt aus der Konvergenz von (y_n) gegen y (anderenfalls würde $y = 0$ folgen).
Außerdem gilt für $n \geq n_o$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y_n} + \frac{x}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &\leq \left|\frac{1}{y_n}\right| |x_n - x| + |x| \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| \\ &= \left|\frac{1}{y_n}\right| |x_n - x| + \frac{|x|}{|y_n||y|} \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{y_n}\right| (|x_n - x| + \frac{|x|}{|y|}|y_n - y|) \end{aligned}$$

Man schlußfolgert nun aus der Konvergenz von (y_n) die Existenz von $n_1 \in \mathbb{N}$ und $c > 0$, so daß $|y_n| \geq c$, $\forall n \geq n_1$, und erhält:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| \leq \frac{1}{c}(|x_n - x| + \frac{|x|}{|y|}|y_n - y|)$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\rightsquigarrow \exists n_o(\varepsilon) \geq n_1, \tilde{n_o}(\varepsilon) \geq n_1 : \quad |x_n - x| < \tfrac{\varepsilon C}{2} \forall n \geq n_o(\varepsilon)$$
$$|y_n - y| < \tfrac{\varepsilon |y|}{2|x|} \forall n \geq \tilde{n_o}(\varepsilon)$$
$$\rightsquigarrow \forall n \geq \max\{n_o(\varepsilon), \tilde{n_o}(\varepsilon)\} : \quad \left|\tfrac{x_n}{y_n} - \tfrac{x}{y}\right| < \tfrac{1}{C}\tfrac{\varepsilon C}{2} + \tfrac{|x|}{|y|}\tfrac{\varepsilon |y|}{2|x|} = \varepsilon.$$

d) Folgt aus $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Definition 3.8
Es sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

a) *(x_n) heißt divergent, wenn sie nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

b) *(x_n) heißt bestimmt divergent (gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$), falls für jedes $r \in \mathbb{R}$ ein $n_o(r) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $x_n \geq r$ bzw. $x_n \leq r$, $\forall n \geq n_o(r)$.*
Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$,
$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ bzw. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

c) *Es sei $\mathcal{L} := \mathcal{L}((x_n))$ die Limesmenge der Folge (x_n). Ist (x_n) von oben (bzw. unten) beschränkt, so heißt $\sup\mathcal{L}$ bzw. $\inf\mathcal{L}$ limes superior bzw. limes inferior der Folge (x_n).*
Schreibweise:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n := \limsup_{n\to\infty} x_n := \sup\mathcal{L}$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n := \liminf_{n\to\infty} x_n := \inf\mathcal{L}$$

Ist (x_n) von oben (bzw. unten) nicht beschränkt, so schreibt man auch $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ bzw. $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Bemerkung 3.9
Ist (x_n) von oben (bzw. unten) beschränkt, so ist auch $\mathcal{L}((x_n))$ nach oben (bzw. unten) beschränkt und limes superior (bzw. inferior) sind folglich definiert in $\mathbb{R}$!
Da nach 2.24 d) die Limesmenge $\mathcal{L} = \mathcal{L}((x_n))$ abgeschlossen ist, gilt stets $\sup\mathcal{L} \in \mathcal{L}$ bzw. $\inf\mathcal{L} \in \mathcal{L}$. Lemma 3.2 und Satz 3.3 ergeben gerade, daß $\sup\mathcal{L}$ bzw. $\inf\mathcal{L}$ Grenzwerte gewisser monotoner Teilfolgen von (x_n) sind.
Aus den Definitionen ergibt sich nun, daß eine Folge (x_n) konvergent ist in $\mathbb{R}$ gdw. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

(Bew.: $\inf\mathcal{L} = \sup\mathcal{L}$ bedeutet: $\mathcal{L} \neq \emptyset$ und $\mathcal{L}$ einelementig.
Ferner muß (x_n) beschränkt sein und, folglich, jede Teilfolge eine konvergente Teilfolge enthalten!)

Satz 3.10 *(Majoranten–Prinzip)*
Es seien (x_n), (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ und es gelte $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, und

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt:

$$a \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq b.$$

Ist insbesondere $a = b$, so gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Beweis:
Nach Voraussetzung ist die Folge (x_n) beschränkt. Ferner gilt:

$$a = \inf \mathcal{L}((a_n)) \leq \inf \mathcal{L}((x_n)) \leq \sup \mathcal{L}((x_n)) \leq \sup \mathcal{L}((b_n)) = b.$$

Nichttrivial in dieser Kette sind nur das erste und letzte Ungleichungszeichen.
Betrachten wir o.B.d.A. das erste "$\leq$":
Annahme: $a > x$.
Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, daß $a > x + \varepsilon$.
Wir wissen: $\exists$ Teilfolge $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}} = x$
$\rightsquigarrow a_{k(n)} - x_{k(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a - x$
$\rightsquigarrow \exists n_o \in \mathbb{N} : -(a_{k(n)} - x_{k(n)}) + (a - x) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_o$
$0 \geq a_{k(n)} - x_{k(n)} > a - x - \varepsilon \quad \forall n \geq n_o$
$\rightsquigarrow x + \varepsilon > a$ Widerspruch!
Die zweite Ungleichung folgt analog.
Ist $a = b$, so ist $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \rightsquigarrow (x_n)$ ist konvergent gegen $a = b$ (nach 3.9) □

Beispiele 3.11

a) *Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt für*
- $|r| < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ *(vgl. Bsp. 2.16 b)),*
- $r = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 1$,
- $r \leq -1$: (r^n) *ist divergent,*
- $r > 1$: (r^n) *ist bestimmt divergent gegen $+\infty$, da $\left(\frac{1}{r^n}\right)$ Nullfolge ist.*

b) *Sei $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$ und (n^r) ist bestimmt divergent gegen $+\infty$.*
Bew.: *Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\rightsquigarrow \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon^{\frac{1}{r}}$, $\forall n \geq n_o(\varepsilon)$ (da $(\frac{1}{n})$ Nullfolge ist).*
$\rightsquigarrow \frac{1}{n^r} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_o(\varepsilon)$. □

c) *Sei $k \in I\!N$, $r \in I\!R$ mit $|r| < 1$. Dann gilt:* $\lim\limits_{n\to\infty} n^k r^n = 0$.

<u>Bew.:</u> *Sei o.B.d.A.* $r \neq 0$; $a := \frac{1}{|r|} - 1 > 0$.

$\rightsquigarrow |r| = (1+a)^{-1}$.

Sei $n \geq k+1$. *Dann gilt (Binomischer Lehrsatz (1.11)):*

$|n^k r^n| = n^k \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1} a^{k+1}}$ *(Satz 1.11)*

$$\rightsquigarrow |n^k r^n| \leq \frac{n^k (k+1)!}{\prod\limits_{i=0}^{k} (n-i) a^{k+1}} = \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{k} (1 - \tfrac{i}{n}) \right)^{-1} \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(letzteres folgt aus 3.7 b)) □

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

<u>Bew.:</u> *Für* $n \geq 2$ *folgt wiederum aus dem Binomischen Lehrsatz:*

$$n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\sqrt[n]{n} - 1)^i \geq \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

$$\rightsquigarrow (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{n \cdot 2 \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{2}{n-1} \leq \frac{4}{n} \quad \text{(wegen } \tfrac{n}{2} \leq n-1\text{)}$$

$$\rightsquigarrow |\sqrt[n]{n} - 1)| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (vgl. b)).}$$ □

e) *Die Folge* $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in I\!N}$ *ist monoton wachsend und konvergent gegen* $e := 2.7182818284$.

<u>Bew.:</u> *Wir zeigen zunächst, daß die Folge monoton wachsend ist. Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} &= \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2 + n - (n+1)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1 - (n+1)\frac{1}{(n+1)^2} \text{ (1.11 b))} \\
&\geq \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Also gilt: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\forall n \in I\!N$.

Zum Beweis der Konvergenz der Folge verwenden wir Satz 3.3 und zeigen dazu ihre Beschränktheit. Aus dem Binomischen Lehrsatz erhalten wir für beliebiges $n \in I\!N$, $n \geq 2$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = 2 + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i}$$

$$\leq \ 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i! \quad n^i} < 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!}$$

$$\leq \ 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = 2 + (1 - \frac{1}{2^n}) < 3 \text{ (vgl. Beweis von 2.28)}$$

Also gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\} =: e.$ □

f) $\forall r \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0.$

<u>Bew.:</u> *Wir wählen* $n_o \in \mathbb{N}$, *so daß* $|r| \leq n_o$. *Dann gilt für* $n > n_o$:

$$\left|\tfrac{r^n}{n!}\right| = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{|r|}{i} = \prod_{i=1}^{n_o} \tfrac{|r|}{i} \prod_{i=n_o+1}^{n} \tfrac{|r|}{i} \leq \prod_{i=1}^{n_o} \tfrac{|r|}{i} \left(\tfrac{|r|}{(n_o+1)}\right)^{n-n_o-1}$$

$$\leq C(n_o, r) \left(\tfrac{|r|}{(n_o+1)}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \textit{(wegen a))}$$

$$\textit{wobei } C(n_o, r) := \tfrac{|r|^{n_o}}{n_o!} \tfrac{(n_o+1)^{n_o+1}}{|r|^{n_o+1}} = \tfrac{1}{|r|} \tfrac{(n_o+1)^{n_o+1}}{n_o!}.$$

g) *Es sei* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ *und wir betrachten die Folge aus Beispiel 2.31 (zum Banachschen Fixpunktsatz):*

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \forall n \in \mathbb{N}_o, x_o \in \mathbb{R}, x_o > 0 \text{ bel.}$$

Dann ist die Folge (x_n) *ab* $n = 1$ *monoton fallend und konvergent gegen* $\sqrt{a}$.

<u>Bew.:</u> *Wir zeigen zuerst:* $x_n \geq \sqrt{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Für beliebige $n \in \mathbb{N}_o$ *gilt:* $(x_n - \frac{a}{x_n})^2 \geq 0$
$\rightsquigarrow (x_n + \frac{a}{x_n})^2 - 4a \geq 0 \rightsquigarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq \sqrt{a}.$
Hieraus folgt aber $x_n^2 \geq a$, *d.h.* $x_n \geq \frac{a}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\rightsquigarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow (x_n)$ *ist monoton fallend und von unten beschränkt*
$\rightsquigarrow (x_n)$ *ist konvergent (gegen* $x \in \mathbb{R}$*) nach Satz 3.3)*
$\rightsquigarrow x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \rightsquigarrow x = \frac{a}{x} \rightsquigarrow x^2 = a \rightsquigarrow x = \sqrt{a}.$ □

(Wir erhalten hier also ein allgemeineres Konvergenzresultat als in Bsp. 2.31, vermerken aber, daß dort für gewisse a *und* x_o *die "Geschwindigkeit" der Konvergenz von* (x_n) *abgeschätzt wurde.)*

Bemerkung 3.12

Im Falle $x_n \to \pm\infty$ *sagt man,* $\pm\infty$ *sei der <u>uneigentliche Grenzwert</u> der Folge* (x_n). *Für die bestimmte Divergenz gelten <u>die folgenden Eigenschaften:</u>*

(i) (x_n) *bestimmt divergent,* (y_n) *beschränkt*
$\leadsto (x_n + y_n)$ *bestimmt divergent.*

(ii) $x_n \to +\infty,\ y_n \to +\infty \leadsto x_n + y_n \to +\infty,\ x_n y_n \to +\infty$

Die Symbole $+\infty$, $-\infty$ *sind* *<u>keine Zahlen</u>. Jedoch kann man die eben dargestellten Eigenschaften (und ähnliche) wie folgt formalisieren:*

$$
\begin{aligned}
&(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (\pm\infty) + r = \pm\infty, \quad \forall r \in I\!R,\\
&(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad r(\pm\infty) = \pm\infty, \quad \forall r > 0,\\
&(+\infty)(+\infty) = +\infty, \quad (-\infty)(-\infty) = +\infty, \quad (-\infty)(+\infty) = -\infty.
\end{aligned}
$$

Kein bestimmter Sinn kann allerdings den folgenden Ausdrücken zugeschrieben werden: $(+\infty) - (+\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot \pm\infty$

<u>Vereinbarung:</u> $-\infty < +\infty$, $-\infty < r < +\infty$, $\forall r \in I\!R$.

3.2 Folgen im Euklidischen Raum $I\!R^m$

Wir beschäftigen uns nun mit Eigenschaften von Folgen im m-dimensionalen Euklidischen Raum $I\!R^m$, des Raumes $I\!R^m$ selbst und seiner Teilmengen.

Satz 3.13
Der Raum $(I\!R^m, \|\cdot\|)$ *ist vollständig und separabel.*

<u>Beweis:</u>
Wir beweisen dieses Resultat durch Induktion über $m \in I\!N$ und unter Verwendung der Ergebnisse aus Kap. 2.6.
$m = 1$: die Aussage folgt aus Satz 3.4 und Bsp. 2.13 c).
Die Aussage sei nun für m gültig und wir beweisen sie für $m + 1$.
Dazu bezeichne $\|\cdot\|_l$ die Euklidische Norm in $I\!R^l$ $(l \in I\!N)$.
Es gilt: $I\!R^{m+1} = I\!R^m \times I\!R$
$\|x\|_{m+1} = (\|(x_1, \ldots, x_m)\|_m^2 + |x_{m+1}|^2)^{1/2}$, $\forall x \in I\!R^{m+1}$.
Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.50, falls $(X_1, d_1) := (I\!R^m, \|\cdot\|_m)$ und $(X_2, d_2) := (I\!R, |\cdot|)$ gesetzt und unter Beachtung von Bemerkung 2.54 für den $I\!R^{m+1}$ die Metrik $d((x, r), (y, s) = (d_1(x, y)^2 + d_2(r, s)^2)^{\frac{1}{2}}$ verwendet wird. $\square$

Bemerkung 3.14
Insbesondere ist eine Folge in $I\!R^m$ *konvergent gdw. sie Fundamentalfolge in* $I\!R^m$ *ist. Aus Lemma 2.49 resultiert außerdem, daß eine Folge in* $I\!R^m$ *genau dann konvergent ist, wenn ihre Komponentenfolgen in* $I\!R$ *konvergent sind.*

Satz 3.15 *(Bolzano/Weierstraß)*
Jede beschränkte Teilmenge des $I\!R^m$ *ist relativ kompakt.*

Beweis:
Wir führen den Beweis wieder induktiv und stellen zunächst fest, daß die Aussage für $m = 1$ mit Satz 3.5 gleichwertig ist.
Die Aussage sei nun für m richtig und es sei $A \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ beschränkt. Wie vorhin setzen wir $(X_1, d_1) := (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_m)$ und $(X_2, d_2) := (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Wegen $A \subseteq X_1 \times X_2$ folgt aus Folg. 2.52 a), daß die Projektionen $\mathrm{pr}_1(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\mathrm{pr}_2(A) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und deshalb nach Voraussetzung relativ kompakt sind.
Wiederum aus Folg. 2.52 b) resultiert dann: $A \subseteq \mathrm{pr}_1(A) \times \mathrm{pr}_2(A)$ ist relativ kompakt. □

Folgerung 3.16 *(Heine/Borel)*
Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist beschränkt und abgeschlossen gdw. für jede Überdeckung dieser Menge eine endliche Teil–Überdeckung existiert.

Beweis:
folgt aus Satz 3.15 und Satz 2.43. □

Bemerkung 3.17
Die Resultate dieses Kapitels gelten sinngemäß auch für $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ (vgl. Kap. 1.6). Folgen in $\mathbb{C}$ konvergieren gdw. die zugehörigen Folgen der Real- bzw. Imaginärteile der Folgenglieder konvergieren. Die Rechenregeln für Grenzwerte in Satz 3.7 lassen sich sofort auf Folgen komplexer Zahlen übertragen. Für Folgen in $\mathbb{R}^m$ gelten auch Satz 3.7 a) und d) sinngemäß!

3.3 Unendliche Reihen

Definition 3.18
Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ (bzw. speziell in $\mathbb{R}$).
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Folge (s_n) heißt Folge der Partialsummen von (a_n) oder unendliche Reihe (mit den Gliedern a_n) und wird mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{bezeichnet.}$$

Definition 3.19
Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, und $a \in \mathbb{C}$.
Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent (gegen a), falls die Folge der

Partialsummen (s_n) (gegen a) konvergiert. Dann heißt a Summe *der unendlichen Reihe.*
Schreibweise: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a$ *(Doppelbedeutung der linken Seite!)*
Anderenfalls heißt die unendliche Reihe divergent*.*
Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* absolut konvergent*, falls* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergent ist.*

Bemerkung 3.20
Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_o}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $k_o \in \mathbb{N}_o$, so bezeichnen wir

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{bzw.} \quad \bar{s}_n := \sum_{k=k_o}^{n} a_k \; (n \geq k_o)$$

Dann gilt:

$$s_n = \bar{s}_n + \begin{cases} -a_o, & k_o = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{k_o-1} a_k, & k_o \geq 1 \end{cases} \qquad (\forall n \geq k_o)$$

Also konvergieren entweder beide Reihen (s_n) bzw. $(\bar{s}_n)_{n \geq k_o}$ oder keine! Folglich genügt es, nur den in 3.19 betrachteten Fall zu untersuchen.

Beispiele 3.21

a) *Geometrische Reihe:* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k, \quad a \in \mathbb{C}.$

Es gilt: $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_o, a \neq 1$ *(vgl. Lemma 2.27).*
Also gilt: $\left|s_n - \frac{1}{1-a}\right| = \frac{|a|^{n+1}}{|1-a|}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_o.$
D.h. für $|a| < 1$ ist die geometrische Reihe konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

Die Reihe ist nach Def. 3.19 dann sogar absolut konvergent. Für $|a| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent!

b) *m-Darstellung reeller Zahlen:*

Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, erlaubt jedes $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, die Darstellung

$$x = \sup\{\sum_{i=1}^{n} z_i m^{k-i} : n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{(Satz 1.31; Bem. 1.32)}$$

wobei $k \in \mathbb{N}_o$, $z_i \in \{n \in \mathbb{N}_o : n \leq m-1\}$, $i \in \mathbb{N}$.
Da die Folge (s_n), $s_n := \sum_{i=1}^{n} z_i m^{k-i}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *monoton wachsend und beschränkt ist, gilt nach Satz 3.3:* $x = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} z_i m^{k-i}$.
Dies ist also eine neue Interpretation der m*-Darstellung einer reellen Zahl als unendliche Reihe!*

Satz 3.22
Es sei (a_n) *eine Folge komplexer Zahlen.*

a) *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist konvergent gdw.* $\forall \varepsilon > 0 \exists n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *so daß*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon, \quad \forall m > n \geq n_o(\varepsilon).$$

b) *Ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

c) *Ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent, so ist* (a_n) *eine Nullfolge.*

d) *Gilt* $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *so konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen* (s_n) *beschränkt ist.*

e) *Sind außerdem* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *und ist* (b_n) *eine weitere Folge komplexer Zahlen, so daß die Reihen*
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergent sind, so ist auch die Reihe*
$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ *konvergent und es gilt*
$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweis:

a) Nach Satz 3.13 (vgl. auch Bem. 3.17) ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent gdw. die Folge der Partialsummen (s_n) eine Fundamentalfolge in $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist. Wegen der Beziehung

$$|s_m - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \text{ für } m > n, \text{folgt daraus die Aussage.}$$

b) Die Aussage folgt wegen $|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| = s_m - s_n < \varepsilon \quad \forall m > n \geq n_o(\varepsilon)$, aus der vorausgesetzten absoluten Konvergenz der Reihe und a).

c) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Aus a) folgt speziell für $m := n+1 : \forall \varepsilon > 0 \exists n_o(\varepsilon) \in I\!N$:

$|a_{n+1}| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o(\varepsilon)$.

D.h. (a_n) ist eine Nullfolge.

d) folgt sofort aus Satz 3.3, da die Folge der Partialsummen (s_n) monoton wachsend ist.

e) folgt wegen $\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum\limits_{k=1} nb_k$ aus Satz 3.7 a) (vgl. Bem. 3.17) angewendet auf die Folgen der Partialsummen beider Reihen. □

Beispiel 3.23

Harmonische Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Nach Satz 3.22 d) ist diese Reihe konvergent gdw. die Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n \in I\!N}$ *beschränkt ist.*

Wir zeigen: Die letztere Folge ist nicht beschränkt!

Behauptung: $\frac{n}{2} + 1 \leq s_{2^n} \leq n + \frac{1}{2}, \forall n \in I\!N$ *(wobei* $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \forall n \in I\!N$*).*

Beweis:

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig. Für $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} s_{2^n} - s_{2^{n-1}} = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k} &\geq 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \\ &\leq 2^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} = 1 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow s_{2^n} \geq s_{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \geq s_{2^{n-2}} + 2\frac{1}{2} \geq s_2 + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{3+n-1}{2} = \frac{n}{2} + 1$

$\rightsquigarrow s_{2^n} \leq s_{2^{n-1}} + 1 \leq s_{2^{n-2}} + 2 \leq s_2 + n - 1 = n + \frac{1}{2}$. □

Also ist die Folge (s_n) nicht beschränkt und deshalb die harmonische Reihe divergent!

Man berechnet, daß (s_n) sehr langsam wächst (wie auch bereits die obige Abschätzung verdeutlicht):

z.B. $s_{5000} = 9.0945$, $s_{10000} = 9.7876$, $s_{100000} = 12.090146$.

Im folgenden beschäftigen wir uns nun mit Konvergenz– und Divergenz–Kriterien für unendliche Reihen, d.h. hinreichenden Bedingungen für Konvergenz bzw. Divergenz, die einfach zu überprüfen sind.
Ein erstes Kriterium wird durch die Beweistechnik im Bsp. 3.23 motiviert.

Satz 3.24 *(Verdichtungssatz von Cauchy)*
Es sei (a_n) eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent gdw. die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent ist.

Beweis:

($\rightarrow$) Es sei a die Summe der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. Dann gilt:

$$a \geq \sum_{k=1}^{2^n} a_k = a_1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} a_k \geq a_1 + \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} a_{2^j}$$

$$\rightsquigarrow 2a \geq a_1 + \sum_{j=1}^{n} 2^j a_{2^j} = \sum_{j=0}^{n} 2^j a_{2^j}$$

Also ist die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ beschränkt und deshalb konvergent (3.22 d)).

($\leftarrow$) Es sei jetzt die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent und es sei $l \leq 2^n$:

$$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^{l} a_i \leq \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=2j}^{2^{j+1}-1} a_k \leq \sum_{j=0}^{n} 2^j a_{2^j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$$

Also ist die Folge der Partialsummen $\left(\sum\limits_{i=0}^{l} a_i\right)_{l \in \mathbb{N}}$ beschränkt und folglich konvergent. $\square$

Beispiel 3.25
Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$. Um dies zu sehen, wenden wir Satz 3.24 an und betrachten die "verdichtete" Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)}.$$

$\alpha > 1$: $\rightsquigarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^k}$
ist eine geometrische Reihe und folglich konvergent (Bsp. 3.21 a))

$\alpha \leq 1$: *die Reihe ist nicht konvergent, da die Folge $(2^{n(1-\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ ihrer Glieder keine Nullfolge ist (3.22 c)).*

Satz 3.26 *(Leibniz–Kriterium für alternierende Reihen)*
Es sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge mit $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist die "alternierende" Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent und für ihre Summe a gilt:

$$|a - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>**Beweis:**</u>
Von der Folge $(s_n) = (\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k)$ betrachten wir die Teilfolgen $(s_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2m+1})_{m\in\mathbb{N}_o}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} s_{2m+2} &= s_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} \leq s_{2m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \\ s_{2m+3} &= s_{2m+1} + a_{2m+2} - a_{2m+3} \geq s_{2m+1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_o. \end{aligned}$$

$\leadsto$ (s_{2m}) ist monoton fallend und (s_{2m+1}) monoton wachsend. Ferner gilt: $-a_1 \leq s_n \leq a_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
(s_n) ist also beschränkt und deshalb beide Teilfolgen konvergent!
Wegen $s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1}$ und $a_{2m+1} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ haben aber beide Teilfolgen denselben Grenzwert a.
Wegen der Wahl der Teilfolgen (sie "zerlegen" die gesamte Folge (s_n)) konvergiert deshalb (s_n) gegen a.
Wir betrachten nun $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$:

$$\leadsto |s_m - s_n| = |\sum_{j=n+1}^{m}(-1)^j a_j| = |a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} \ldots| \leq a_{n+1}$$

$$\leadsto |a - s_n| = \lim_{m\to\infty} |s_m - s_n| \leq a_{n+1} \quad \text{(vgl. 3.7 d), 3.10).}\Box$$

Beispiele 3.27
Leibnizsche Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$.
Diese Reihe ist nach Satz 3.26 konvergent und für ihre Summe a gilt: $|a - s_n| \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Es gilt: $s_{1000} = 0.692647$, $s_{10000} = 0.693097$
$a = 0.693147$,
Allerdings ist die Leibnizsche Reihe <u>nicht</u> absolut konvergent! (nach Bsp. 3.23)

Satz 3.28 *(Majoranten– bzw. Minoranten–Kriterium)*
Es seien (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$.

a) *Existiert ein* $n_o \in I\!N$*, so daß* $|a_n| \leq b_n$, $\forall n \geq n_o$*, und ist die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergent,so ist die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

b) *Existiert ein* $n_o \in I\!N$*, so daß* $0 \leq b_n \leq a_n$, $\forall n \geq n_o$*, und ist die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *divergent, so ist auch* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Beweis:

a) Für alle $m > n \geq n_o$ gilt: $\sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} b_k$.
Die Behauptung folgt nun aus der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ und aus Satz 3.22 a).

b) Für die Partialsummen der Reihen gilt für $n > n_o$:

$$0 \leq s_n - s_{n_o} = \sum_{k=n_o+1}^{n} b_k \leq \sum_{k=n_o+1}^{n} a_k =: \tilde{s}_n - \tilde{s}_{n_o}.$$

Nach Voraussetzung muß die monoton wachsende Folge $(s_n - s_{n_o})$ unbeschränkt wachsen, da sie sonst konvergent wäre.
Dasselbe gilt dann wegen $s_n - s_{n_o} \leq \tilde{s}_n - \tilde{s}_{n_o}$ auch für $(\tilde{s}_n)$!

$\square$

Satz 3.29 *(Wurzelkriterium)*
Es sei (a_n) *eine Folge in* $\mathbb{C}$ *und* $\alpha := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$.

a) *Ist* $\alpha < 1$*, so ist die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

b) *Ist* $\alpha > 1$*, so ist diese Reihe divergent.*

Beweis:

a) Es sei $\alpha < 1$. Wegen $\alpha < \frac{\alpha+1}{2} < 1$ existiert ein $n_o \in I\!N$, so daß $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\alpha+1}{2}$, $\forall n \geq n_o$.
$\rightsquigarrow$ $|a_n| \leq \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^n$, $\forall n \geq n_o$, die geometrische Reihe
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^k$
ist aber konvergent.
$\rightsquigarrow$ die Behauptung folgt aus Satz 3.28 a).

b) Ist $\alpha > 1$, so existiert $\tilde{I\!N} := \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\} \subseteq I\!N$, so daß $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \rightsquigarrow |a_n| \geq 1$, $\forall n \in \tilde{I\!N}$.

Folglich ist (a_n) keine Nullfolge und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nach Satz 3.22 c) nicht konvergent. $\square$

Übung 3.30
Man zeige anhand von Beispielen, daß im Fall $\alpha := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ über die Konvergenz bzw. Divergenz der entsprechenden Reihe keine Aussage gemacht werden kann.

Satz 3.31 *(Quotientenkriterium)*
Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $\beta := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\gamma := \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, +\infty]$ ($a_n \neq 0$, $\forall n$ hinreichend groß).

a) *Ist $\beta < 1$, so ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

b) *Ist $\gamma > 1$, so ist diese Reihe divergent.*

__**Beweis:**__

a) Ist $\beta < 1 \rightsquigarrow \beta < \frac{\beta+1}{2} < 1$, so existiert ein $n_o \in I\!N$, so daß $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{\beta+1}{2} < 1$, für alle $n \geq n_o$. Dann gilt für $n > n_o$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{a_{n_o}}\right| &= \prod_{i=n_o}^{n-1} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \leq \prod_{i=n_o}^{n-1} \frac{\beta+1}{2} = \left(\frac{\beta+1}{2}\right)^{n-n_o} \\ \rightsquigarrow |a_n| &\leq \left[|a_{n_o}| \left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{n_o}\right] \left(\frac{\beta+1}{2}\right)^n, \quad \forall n > n_o. \end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun wieder aus dem Majorantenkriterium (3.28 a)).

b) Ist $\gamma > 1$ so existiert ein $n_o \in I\!N$, so daß $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, $\forall n \geq n_o$. Also gilt $\forall n > n_o$:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n_o}}\right| = \prod_{i=n_o}^{n-1} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \geq 1, \quad \text{d.h.} \quad |a_n| \geq |a_{n_o}| > 0$$

Also ist (a_n) keine Nullfolge und damit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. $\square$

Bemerkung 3.32
Für die in den Sätzen 3.29 und 3.31 definierten Zahlen α und β gilt die folgende Beziehung:

$\alpha \leq \beta$ *(Übung: vgl. Heuser Bd. 1, S. 182)*

Dies bedeutet, daß das Wurzelkriterium etwas leistungsfähiger (aber auch schwerer zu handhaben) ist als das Quotientenkriterium.

Beispiel 3.33
Exponentialreihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \quad (a \in \mathbb{C})$.
Mit $a_n := \frac{a^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *gilt* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a|}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Also folgt $\beta := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ *und die Exponentialreihe ist absolut konvergent nach Satz 3.31 a).*

Definition 3.34
Es sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine gegebene unendliche Reihe.*
Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijektiv, so heißt die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$ *eine* <u>*Umordnung*</u> *der gegebenen Reihe.*

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* <u>*unbedingt konvergent*</u>*, wenn jede Umordnung der gegebenen Reihe konvergent ist und dieselbe Summe hat.*

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* <u>*bedingt konvergent*</u>*, wenn sie konvergent, aber nicht unbedingt konvergent ist.*

Satz 3.35
Jede absolut konvergente Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *in* $\mathbb{C}$ *ist unbedingt konvergent.*

<u>**Beweis:**</u>
Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und $b_n := a_{f(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewäblt.
Nach Vor. $\exists n_o \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=n_o+1}^{m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall m > n_o$ (Satz 3.22 a)).
Wir definieren $r_o := \max\{f^{-1}(n) : n = 1, \ldots, n_o\} \quad (r_o \geq n_o)$.

$$\rightsquigarrow \quad \{1, \ldots, n_o\} \subseteq \{f(1), \ldots, f(r_o)\}$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{k=1}^{r_o} b_k = \sum_{k=1}^{n_o} a_k + \sum_{\substack{k=1 \\ f(k)>n_o}}^{r_o} b_k$$

$$\rightsquigarrow \left|\sum_{k=1}^{r} b_k - \sum_{k=1}^{n_o} a_k\right| = \left|\sum_{\substack{k=1\\ f(k)>n_o}}^{r_o} a_{f(k)}\right| \leq \sum_{\substack{k=1\\ f(k)>n_o}}^{r_o} |a_{f(k)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall r > r_o.$$

Damit gilt für alle $r > r_o$ und $n > n_o$:

$$\left|\sum_{k=1}^{r} b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \left|\sum_{k=1}^{r} b_k - \sum_{k=1}^{n_o} a_k\right| + \sum_{k=n_o+1}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also konvergiert auch die Folge der Partialsummen $\left(\sum\limits_{k=1}^{r} b_k\right)_{r\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Da die Abbildung f beliebig gewählt war, ist die Aussage bewiesen. □

Satz 3.36 *(Riemannscher Umordnungssatz)*
Eine konvergente, aber nicht absolut konvergente, Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *in* $\mathbb{C}$ *ist bedingt konvergent.*
Eine bedingt konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ *besitzt immer eine Umordnung, die gegen eine beliebig vorgegebene Zahl konvergiert.*

Beweis: vgl. Heuser, Bd. 1, S. 197–199.

Bemerkung 3.37
Satz 3.36 erklärt die Bedeutung der bedingten un der absoluten Konvergenz von Reihen. Nach diesem Satz und Bsp. 3.27 ist also die Leibnizsche Reihe bedingt konvergent.
Die Problematik der Umordnung von Reihen ist sofort gegenwärtig, wenn man die Konvergenz der Produkte von Reihen untersucht: Es seien (a_n) *und* (b_m) *Folgen in* $\mathbb{C}$ *und wir betrachten die Folge* $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} a_k b_l\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$. *Legt man nun eine Durchnumerierung von* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *fest, so entsteht eine sog. "Produktreihe". Nun erhebt sich die Frage, ob diese Produktreihe oder gar alle Varianten (sprich: Umordnungen) solcher Produktreihen konvergieren? Satz 3.36 macht klar, daß im Fall nur bedingter Konvergenz hierbei große Probleme entstehen.*

Wir geben nun positive Antworten auf diese Problematik:

Satz 3.38 *(Multiplikationssatz)*
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$ *Folgen in* $\mathbb{C}$ *und wir betrachten die Folge*

$(c_n)_{n\in I\!N_o}$, wobei $c_n := \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, $\forall n \in I\!N_o$.
Sind die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent, so ist ihr sog. "Cauchy–Produkt" $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ ebenfalls absolut konvergent.

Beweis:
Es bezeichne für $n \in I\!N_o : \tilde{c}_n := \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i||b_{n-i}|$,

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} |a_i|, \tilde{s}_n := \sum_{i=0}^{n} |b_i|.$$

Wir zeigen im folgenden, daß die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k$ konvergent ist. Wegen $|c_n| = |\sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \leq \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i||b_{n-i}| = \tilde{c}_n$, $\forall n \in I\!N_o$, folgt dann die Aussage aus dem Majoranten–Kriterium Satz 3.28.
Es sei $n \in I\!N$ bel. Dann gilt für hinreichend großes $m \in I\!N$:

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{c}_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |a_i||b_{n-i}| \leq \left(\sum_{k=0}^{m} |a_k|\right)\left(\sum_{i=0}^{m} |b_i|\right) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right)$$

Also ist die Folge der Partialsummen $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \tilde{c}_k\right)_{n\in I\!N_o}$ beschränkt und deshalb konvergent (3.22 d)). □

Folgerung 3.39
Sind die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent und ist $f : I\!N_o \to I\!N_o \times I\!N_o$ bijektiv (mit $f(k) = (f_1(k), f_2(k))$, $\forall k \in I\!N_o$), so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{f_1(k)} b_{f_2(k)}$ konvergent mit der Summe $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\right)$.

Beweis:
Es ist klar, daß die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{f_1(k)} b_{f_2(k)}$ (für gegebenes f) eine Umordnung des Cauchy–Produktes ist. Letzteres ist aber nach Satz 3.38 absolut konvergent. Deswegen konvergiert nach Satz 3.35 auch jede seiner Umordnungen gegen denselben Grenzwert s.
Die letzte Aussage trifft aber auch auf die Reihe

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)\right)_{n\in I\!N_o} \text{ zu, die gegen } \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

konvergiert und wiederum eine Umordnung des Cauchy–Produktes ist. Damit ist alles bewiesen. □

Also konvergiert auch das Cauchy–Produkt der Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ gegen $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\right)$. Die Durchnumerierung der Produkte $\{a_k b_l : k, l \in \mathbb{N}_o\}$ entspricht dabei dem Cauchy–Cantorschen Diagonalverfahren (vgl. Beweis von Satz 1.27).

3.4 Potenzreihen und Elementarfunktionen

Definition 3.40

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$.
Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ heißt Potenzreihe mit der Koeffizientenfolge (a_n) und der Entwicklungsstelle a.
(Vereinbarung: $(z-a)^0 = 1$)

Frage: *Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert eine Potenzreihe (bei gegebenen a, a_n, $n \in \mathbb{N}_o$)? Auf jeden Fall für $z = a$!*

Beispiel 3.41

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z-a)^k$

Nach Beispiel 3.33 ist diese Reihe $\forall z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent!

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!(z-a)^k$

Wir wenden das Quotientenkriterium (Satz 3.31) für $z \neq a$ an:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(z-a)^{n+1}}{n!\,(z-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|z-a| = +\infty$$

Deshalb ist die Potenzreihe füyr $z \neq a$ divergent (3.32 b))!

Satz 3.42

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $\bar{\alpha} := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$ und $a \in \mathbb{C}$.

a) *Ist $\bar{\alpha} \in]0, +\infty[$, so konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ absolut falls $|z-a| < \bar{\alpha}^{-1}$, und divergiert falls $|z-a| > \bar{\alpha}^{-1}$.*

b) *Ist $\bar{\alpha} = 0$, so konvergiert die Potenzreihe absolut $\forall z \in \mathbb{C}$.*

c) *Ist $\bar\alpha = +\infty$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $z = a$.*

<u>**Beweis:**</u>
Wir wenden das Wurzelkriterium (Satz 3.29) an und definieren

$$\alpha(z) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}|z-a| = \bar\alpha|z-a|$$

a) Es gilt: $|z-a| < \bar\alpha^{-1} \Longleftrightarrow \alpha(z) < 1$,
d.h. die Aussage folgt aus Satz 3.29 a).
Es gilt: $|z-a| > \bar\alpha^{-1} \Longleftrightarrow \alpha(z) > 1$
d.h. der zweite Teil der Aussage folgt aus Satz 3.29 b).

b) Falls $\bar\alpha = 0$ so gilt $\alpha(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$, und 3.29 a) kann angewendet werden.

c) Falls $\bar\alpha = +\infty$, so gilt $\alpha(z) = +\infty$, $\forall z \neq a$, und die Aussage folgt wiederum aus 3.29 b). $\square$

Definition 3.43
Es sei $a \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $\bar\alpha := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$.
Dann heißt $\rho := \begin{cases} +\infty, & \bar\alpha = 0 \\ \bar\alpha^{-1}, & \bar\alpha \in]0, +\infty[, \\ 0, & \bar\alpha = +\infty \end{cases}$ <u>*Konvergenzradius*</u> *der Potenzreihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$.

Bemerkung 3.44
Satz 3.42 rechtfertigt diese Definition des Konvergenzradius einer Potenzreihe und sagt aus, daß eine Potenzreihe stets auf der (offenen) Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho\}$ absolut konvergiert und in $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \le \rho\}$ divergiert. Zum Verhalten auf dem Rand $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho\}$ des "Konvergenzkreises" macht der Satz keine Aussage (vgl. auch Übung 3.30!).
Handelt es sich um eine reelle Potenzreihe, d.h. $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}_o$, und $a \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ $(x \in \mathbb{R})$, so sprechen wir analog vom "Konvergenzintervall" $]a-\rho, a+\rho[$.
Als Schlußfolgerung aus den Sätzen 3.22 e) und 3.38 könnten nun auch Aussagen über die Addition und Multiplikation von Potenzreihen formuliert werden. Wir verzichten hier darauf, kommen aber später auf Potenzreihen zurück.

Beispiel 3.45
Die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für alle $z = \in \mathbb{C}$ absolut (3.33 a)).
Es gilt: $\bar\alpha := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!})^{-1} = 0$, d.h. $\rho = +\infty$.

Dies rechtfertigt die folgende

Definition 3.46
Die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, *heißt (komplexe)* *Exponentialfunktion. Die Einschränkung* $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt (reelle) Exponentialfunktion.*

Satz 3.47
Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

a) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *(Additionstheorem);*

b) $\exp(0) = 1$, $\exp(x) > 1$, $\forall x > 0$,
$0 < \exp(x) < 1$, $\forall x < 0$*;*

c) $\exp(1) = e$ *und* e *ist irrational;*

d) $\exp(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$*;*

e) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist injektiv.*

Beweis:

a) Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt nach Satz 3.38/Folg. 3.39:

$$\begin{aligned} \exp(z_1)\exp(z_2) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} \frac{z_1^i}{i!}\frac{z_2^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} z_1^i z_2^{k-i} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z_1+z_2)^k \ (1.11!) \\ &= \exp(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

b) $\exp(0) = 1$ ist klar nach Definition 3.46.
Aus a) folgt ferner $\exp(x)\exp(-x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
$\forall x > 0$ gilt:

$$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1$$

$\forall x < 0$: $\exp(-x) > 1 \leadsto \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \in]0,1[$.

c) Wir zeigen zunächst: $\exp(1) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} & 1 + \tfrac{1}{n} < \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\left(\tfrac{1}{n}\right)^k = \exp\left(\tfrac{1}{n}\right),\ \exp(1) = \exp\left(\tfrac{1}{n}\cdot n\right) = \left(\exp\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^n \\ \leadsto\ & 1 + \tfrac{1}{n} < (\exp(1))^{1/n} \leadsto (1+\tfrac{1}{n})^n < \exp(1) \\ \leadsto\ & \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \le \exp(1) \end{aligned}$$

Andererseits gilt für $n \geq 2$:
$(\exp(1))^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! n^k} < \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n-1}$ (vgl. 3.21 a))
$\rightsquigarrow \exp(1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$
$\rightsquigarrow$ durch Grenzübergang $n \to \infty$ (Satz 3.10!):

$$\exp(1) \leq \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n.$$

Deshalb gilt nach Beispiel 3.11 e): $\exp(1) = e$.
Wir zeigen jetzt: e ist irrational.
<u>*Annahme:*</u> e ist rational, d.h. $\exists m, n \in \mathbb{N} : e = \frac{m}{n}$.

$$\rightsquigarrow e \quad = \quad \frac{m}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\rightsquigarrow 0 \quad < \quad m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N} \quad (\star)$$

Ferner: $e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!}\frac{1}{n}$
$\rightsquigarrow m(n-1)! - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = n! \left(e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) < \frac{1}{n}$
Wegen $e \in]2,3[$, d.h. $n \neq 1$, ist dies ein Widerspruch zu $(\star)$.

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt zunächst:

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n \text{ (vgl. a)); } \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \exp(1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}} \text{ (vgl. c))}$$

Also gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = (e^{1/n})^m = e^{\frac{m}{n}}$$

Daraus und aus $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, folgt die Aussage.

e) Wir zeigen: $(\exp|_{\mathbb{R}})^{-1} : R(exp) \to \mathbb{R}$ ist eindeutig (vgl. Def. 1.16, 1.17).
Seien (y, x_1), $(y, x_2) \in (\exp|_{\mathbb{R}})^{-1}$, d.h. $(x_i, y) \in \exp|_{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$.
$\rightsquigarrow \exp(x_1) = \exp(x_2) \rightsquigarrow \exp(x_1 - x_2) = 1$ (nach a))
$\rightsquigarrow$ nach b): $x_1 - x_2 = 0 \rightsquigarrow x_1 = x_2$
$\rightsquigarrow \exp|_{\mathbb{R}}$ ist injektiv.

$\square$

Definition 3.48

a) $e^x := \exp(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$;

b) *Die inverse Abbildung* $\ln : R(\exp) \to \mathbb{R}$ *zu* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt* <u>*natürlicher Logarithmus*</u>*, es gilt also:*

$$\begin{aligned} \exp(\ln x) &= x, \quad \forall x \in R(\exp), \\ \ln(\exp x) &= x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) *Für* $a \in R(\exp)$ *wird die* <u>*Exponentialfunktion zur Basis a*</u> *als Abbildung von* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *definiert durch:*

$$a^x := \exp(x \cdot \ln(a)) = e^{x \ln a}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 3.49
Definition 3.48 a) wird durch Satz 3.47 d) motiviert. Später erfolgt die entgültige Rechtfertigung durch den Nachweis der Stetigkeit von exp.
Die inverse Abbildung ln *zu* exp *ist eindeutig wegen 3.47 e). Später zeigen wir noch, daß* $R(\exp) = \exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ *gilt. Klar ist bisher nur:* $R(\exp) \subseteq]0, +\infty[$ *(Satz 3.47b)).*
Für die stärkere Aussage reichen unsere gegenwärtig verfügbaren mathematischen Hilfsmittel noch nicht aus!
Analog zum Beweis von d) zeigt man für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$*:*

$$\exp\left(\frac{m}{n} \ln a\right) = (\exp(\ln a))^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

D.h. für alle $x \in \mathbb{Q}$ *stimmt die in 3.48 c) gegebene Definition von* a^x *mit der früheren aus Bem. 1.13 überein.*

Folgerung 3.50
Die Logarithmusfunktion ln *hat folgende Eigenschaften:*

a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \forall x, y \in R(\exp)$,

b) $\ln(a^x) = x \ln a, \quad \forall a \in R(\exp), \forall x \in \mathbb{R}$,

c) $\ln x < 0$, *falls* $x < 1$ $(x \in R(\exp))$
$\ln x > 0$, *falls* $x > 1$
$\ln x = 0$, *falls* $x = 0$.

<u>**Beweis:**</u> folgt sofort aus Satz 3.47 und Def. 3.48. $\square$

Definition 3.51
Wir definieren die folgenden Elementarfunktionen als Abbildungen von $I\!R$ in $I\!R$:

$$\begin{array}{lll} \cos x & := \mathrm{Re}(\exp(ix)) & \textit{Kosinusfunktion} \\ \sin x & := \mathrm{Im}(\exp(ix)) & \textit{Sinusfunktion} \\ \cosh x & := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) & \textit{Cosinus hyperbolicus} \\ \sinh x & := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) & \textit{Sinus hyperbolicus} \\ & (\forall x \in I\!R) & \end{array}$$

Folgerung 3.52
Für diese Elementarfunktionen gilt die folgende Darstellung:

$$\begin{array}{llll} a) & \cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, & c) & \cosh x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ b) & \sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, & d) & \sinh x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{array} \qquad (\forall x \in I\!R)$$

Alle diese Reihen sind für jedes $x \in I\!R$ absolut konvergent.

Beweis:
Für alle $x \in I\!R$ gilt: $\exp(ix) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!}$
Deshalb folgt aus Bemerkung 3.14/3.17:

$$\begin{aligned} \cos x &= \mathrm{Re}(\exp(ix)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{i^k x^k}{k!}\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Analog resultiert die Formel für $\sin x$.
Wir beweisen nun noch c) (analog folgt d)):

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (1 + (-1)^k) \frac{x^k}{k!}\right) \qquad \text{(Satz 3.22 e))} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe folgt die absolute Konvergenz der Reihen der Real– bzw. Imaginärteile und insgesamt die absolute Konvergenz aller Reihen 3.51 a) bis d). □

Bemerkung 3.53
Man könnte jetzt weitere Elementarfunktionen, abgeleitet aus exp*,* ln*,* cos*,*

sin, cosh, sinh *definieren und die entsprechenden Eigenschaften diskutieren, wie z.B.* tan, cot *usw. Für die in 3.51 definierten reellen Funktionen ergeben sich nun aus Satz 3.47/3.52 vielfältige Eigenschaften, wie z.B.*

$$\begin{aligned}
\cos x = \cos(-x) \quad &, \quad \sin(-x) = -\sin x, \\
(\cos x)^2 + (\sin x)^2 &= |\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} \\
&= \exp(ix)\exp(-ix) = 1
\end{aligned}$$

(vgl. Bem. 1.43: komplexe Zahlenebene)
Additionstheoreme der Winkelfunktionen u.v.a.m.

4 Stetige Funktionen

Nachdem nun über eine längere Zeit die Untersuchung der Strukturen in Mengen bzw. Räumen, einschließlich der Konvergenz von Folgen und Reihen, im Mittelpunkt der Vorlesung standen, kommen wir jetzt zu einem Hauptanliegen der Analysis, nämlich der Untersuchung von Abbildungen. Wir beginnen dabei mit dem zentralen Begriff der Stetigkeit, definiert und untersucht zunächst für Abbildungen zwischen allgemeinen metrischen Räumen. Anschließend betrachten wir Räume stetiger Funktionen und deren Konvergenz. Zum Abschluß gehen wir auf Besonderheiten bei der Untersuchung stetiger reeller Funktionen ein.

4.1 Stetige Abbildungen in metrischen Räumen

Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, B_i bezeicne die Kugeln im Raum (X_i, d_i), $i = 1, 2$, und wir betrachten eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$.

Definition 4.1
$f : X_1 \to X_2$ heißt stetig in $x_o \in X_1$, falls für jede Umgebung V von $f(x_o)$ in X_2 eine Umgebung U von x_o in X_1 existiert, so daß $f(U) \subseteq V$.
f heißt stetig (auf X_1), falls f in jedem $x_o \in X_1$ stetig ist.

Bemerkung 4.2
Anschaulich bedeutet Stetigkeit von f in x_o folgendes: So "klein" man auch eine Umgebung V von $f(x_o)$ wählt, man kann immer eine (wenn auch evtl. "sehr kleine") Umgebung U von x_o finden, so daß für jedes $x \in U$ (d.h. "nahe bei x_o") das Bild $f(x)$ in V liegt (d.h. "nahe bei $f(x_o)$").

Die folgende Aussage gibt nun äquivalente Charakterisierungen der Stetigkeit einer Abbildung in einem Punkt an, die völlig gleichwertig auch zur Definition der Stetigkeit verwendet werden könnten.

Satz 4.3
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) *f ist stetig in $x_o \in X_1$.*

b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X_1$ *mit* $d_1(x, x_o) < \delta$ *gilt* $d_2(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$.

c) *Für alle Folgen (x_n) in X_1 mit $d_1(x_n, x_o) \to 0$ gilt $d_2(f(x_n), f(x_o)) \to 0$.*

Beweis:
a) $\Longrightarrow$ b): Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.
Dann ist $V := B_2(f(x_o), \varepsilon) := \{y \in X_2 : d_2(f(x_o), y) < \varepsilon\}$ Umgebung von $f(x_o)$. Folglich existiert eine Umgebung U von x_o (in X_1), so daß $f(U) \subseteq V$. Da U Umgebung von x_o ist, existiert $\delta > 0$ mit $B_1(x_o, \delta) := \{x \in X_1 : d_1(x, x_o) < \delta\} \subseteq U$. Sei nun $x \in X_1$ mit $d_1(x, x_o) < \delta$.
$\rightsquigarrow f(x) \in f(U) \subseteq V = B_2(f(x_o), \varepsilon)$.
b) $\Longrightarrow$ c): Sei (x_n) eine Folge in X_1 mit $d_1(x_n, x_o) \to 0$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Folglich existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$f(B_1(x_o, \delta)) \subseteq B_2(f(x_o), \varepsilon).$$

$\rightsquigarrow \exists n_o \in I\!N$: $\quad d_1(x_n, x_o) < \delta, \forall n \geq n_o$.
$\rightsquigarrow \qquad d_2(f(x_n), f(x_o)) < \varepsilon, \forall n \geq n_o$,
d.h. $(f(x_n))$ konvergiert gegen $f(x_o)$ in X_2.
c) $\Longrightarrow$ a): Es sei V eine beliebige Umgebung von $f(x_o)$ in X_2.
<u>*Annahme:*</u> $\forall$ Umgebungen U von x_o gilt $f(U) \not\subseteq V$, d.h. $f(U) \backslash V \neq \emptyset$.
Wir betrachten die Umgebungen $U_n := B_1(x_o, \frac{1}{n})$, $\forall n \in I\!N$.
$\rightsquigarrow \exists y_n \in f(U_n) \backslash V \rightsquigarrow \exists x_n \in U_n : f(x_n) = y_n \notin V$.
$\rightsquigarrow x_n \to x_0$ in X_1.
$\rightsquigarrow f(x_n) \to f(x_o)$ in X_2.
$\rightsquigarrow f(x_n) \in V$ für hinreichend große $n \in I\!N$.
$\rightsquigarrow$ Widerspruch zu Annahme!
$\rightsquigarrow \exists$ Umgebung U von x_o mit $f(U) \backslash V = \emptyset$, d.h. $f(U) \subseteq V$.
Also ist die Äquivalenz der Aussagen bewiesen. □

Bemerkung 4.4
Die ε–δ–Charakterisierung der Stetigkeit einer Abbildung f (in Satz 4.3 b)) geht auf Weierstraß zurück. Das dort auftretende δ hängt im allgemeinen von ε und x_o ab, d.h. $\delta = \delta(\varepsilon, x_o)$! Die sog. Limes–Charakterisierung der Stetigkeit in Satz 4.3 c) erweist sich häufig als sehr bequem zum Nachweis der Stetigkeit konkreter Abbildungen (vgl. auch Bsp. 4.5), während sich Def. 4.1 häufig für Negativ–Aussagen als günstig erweist.

Beispiele 4.5

a) *$f : D(f) \to I\!R$, $D(f) \subseteq I\!R$, d.h. wir betrachten reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen.*
Für solche Funktionen bedeutet Stetigkeit in $x_o \in D(f)$ z.B. nach 4.3 b):
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f)$ *mit* $|x - x_o| < \delta$ *gilt* $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.
Wir untersuchen konkrete Beispiele:

(i) $f(x) := \sum_{j=0}^{k} a_j x^j, \quad \forall x \in I\!R \quad (a_j \in I\!R,\ j = 0, \ldots, K)$,
d.h. f ist ein sog. Polynom.

Sei $x_o \in \mathbb{R}$ *und* (x_n) *eine Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $x_n \to x_o$. *Aus Satz 3.7 folgt* $x_n^j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_o^j \; \forall j = 1 \dots k$ *und damit:*

$$f(x_n) = \sum_{j=0}^{k} a_j x_n^j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=0}^{k} a_j x_o^j = f(x_o).$$

Also ist f *stetig in* x_o *und damit auf* $\mathbb{R}$.

(ii) $f(x) := \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ *, d.h.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sei $x_o \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ *und* (x_n) *Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $x_n \to x_o$.
$\rightsquigarrow \exists n_o \in \mathbb{N} : f(x_n) = f(x_o),\ \forall n \geq n_o$.
$\rightsquigarrow f(x_n) \to f(x_o)$, *und* f *ist stetig in* x_o.
Es sei nun $x_o = 1$ *und* $V := B(f(1), \frac{1}{2})$. *Dann gilt aber für alle* $\delta > 0$*:*

$$f(B(x_o, \delta)) = \{0, 1\} \not\subseteq V, \ \text{da } 0 \notin V.$$

Also ist f *nicht stetig in* $x_o = 1$.

(iii) $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ *(Dirichlet–Funktion).*

Sei $x_o \in \mathbb{R}$ *und* $V := B(f(x_o), \frac{1}{2})$.
$\rightsquigarrow \quad \{0, 1\} = f(B(x_o, \delta)) \not\subseteq V,\ \forall \delta > 0$.
$\rightsquigarrow \quad f$ *ist nicht stetig in* x_o, *d.h.* f *ist in keinem Punkt von* $\mathbb{R}$ *stetig.*
Aber: $f_{|\mathbb{Q}}$ *und* $f_{|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$ *sind stetig.*

(iv) $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f)$ *endlich, ist stetig (Übung).*

b) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig.*

<u>Bew.:</u> *Sei* $z_o \in \mathbb{C}$ *und* (z_n) *Folge in* $\mathbb{C}$ *mit* $z_n \to z_o$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*:*
$\exp(z_n) - \exp(z_o) = \exp(z_o)(\exp(z_n - z_o) - 1)$ *(Satz 3.47a).*
$\rightsquigarrow$ *wir müssen zeigen:*
$\lim\limits_{n\to\infty} \exp(z_n - z_o) = 1.$
Es genügt zu zeigen:
$\tilde{z}_n \to 0 \Longrightarrow \exp(\tilde{z}_n) \to 1.$
(Das Additionstheorem reduziert also die Stetigkeit auf $\mathbb{C}$ *auf die Stetigkeit im Punkt* 0*)*
Nach Definition gilt nun für jedes $z \in \mathbb{C}$*:*
$\exp(z) - 1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = z \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = z \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}.$
Ist nun $(\tilde{z}_n)$ *eine Nullfolge, so existiert* $n_o \in \mathbb{N}$*:*
$|\tilde{z}_n| \le \frac{1}{2} < 1, \forall n \ge n_o.$
Deshalb gilt $\forall n \ge n_o$*:*
$|\exp(\tilde{z}_n) - 1| \le |\tilde{z}_n| \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|\tilde{z}_n|^k}{(k+1)!} \le |\tilde{z}_n| \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = 2|\tilde{z}_n|.$
$\rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} |\exp(\tilde{z}_n) - 1| = 0.$ □

c) $\sin$, $\cos$, $\sinh$ *und* $\cosh$ *sind als Funktionen von* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *stetig.*
<u>Bew.:</u> *folgt aus Def. 3.51 und der Stetigkeit von* $\exp$. □
z.B. $|\cos x - \cos x_o| = |Re \exp(ix) - Re \exp(ix_o)| = |Re(\exp(ix) - \exp(ix_o)| \le |\exp(ix) - \exp(ix_o)|$
Die rechte Seite wird aber nach b) klein, wenn x *nahe bei* x_o *liegt.*
$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x - x_o| < \delta$ *gilt* $|\cos x - \cos x_o| < \varepsilon$
$\rightsquigarrow \cos$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}$. *(*$\sin$ *analog, für* $\sinh$ *und* $\cosh$ *folgt alles sofort aus der Stetigkeit von* $\exp$.
Analog gilt auch: $a^x := \exp(x \cdot \ln a)$ *ist stetig auf* $\mathbb{R}$.

d) *Wir betrachten den* m*−dimensionalen Euklidischen Raum* $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$.
Dann ist $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *stetig.*
<u>Bew.:</u> *Sei* $x_o \in \mathbb{R}^m$, (x_n) *Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $x_n \to x_o$.
Dann gilt nach Satz 1.40 (iv):
$|\|x_n\| - \|x_o\|| \le \|x_n - x_o\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$ □

e) *Es sei* $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ *definiert durch*

$$[Ax]_i := \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \forall x \in \mathbb{R}^m, i = 1, \ldots, l,$$

$Ax := ([Ax]_1, \ldots, [Ax]_l)$, *wobei* $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, m$.
Dann ist A *stetig.*

Bew.:
Sei $x^o \in \mathbb{R}^m$ bel. und $(x^{(n)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^m$ mit $x^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^o$.
Dann gilt: $x_j^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_j^o$, $\forall j = 1, \ldots, m$ (vgl. Kap. 3.2).
$\rightsquigarrow \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^o$, $\forall i = 1, \ldots, l$ (Satz 3.7).
$\rightsquigarrow Ax^{(n)} \to Ax^o$ (Kap. 3.2!). $\square$
Einschub: Matrix–Schreibweise der Abbildung A

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\uparrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\text{"Spalte"} \end{array}$$

Dies rechteckige Schema nennen wir Matrix mit l Zeilen und m Spalten, sowie den Elementen a_{ij}, $i = 1, \ldots, l$; $j = 1, \ldots, m$.

Man definiert nun:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{l1} & \cdots & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{lj} x_j \end{pmatrix}.$$

Versteht man nun die Elemente von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^l$ als "Spalten" anstatt wie früher als "Zeilen", so bedeutet die obige Definition, daß die linke Seite gleich Ax ist.
Dies ist die Matrix–Schreibweise für A!
Aus diesem Grund werden wir im folgenden die Elemente Euklidischer Räume meist als "Spalten" schreiben, d.h.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{anstelle} \quad x = (x_1, \ldots, x_m).$$

f) Sei (X, d) ein metrischer Raum.
Beh.: die Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist stetig.
Bew.: Seien (x_n), (y_n) Folgen in X mit $x_n \to x \in X$, $y_n \to y \in X$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x, y)| &\le |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x, y)| \\ &\le d(y_n, y) + d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$ $\square$

g) Sei (X, d) metrischer Raum, $f : X \to X$ kontraktiv mit $\alpha \in]0, 1[$. Dann ist f stetig.

(nach Vor. ist $d(f(x), f(\tilde{x})) \le \alpha d(x, \tilde{x}) \forall x, \tilde{x} \in X \rightsquigarrow$ Anwendung von 4.3 b) mit $\delta := \frac{\varepsilon}{\alpha}$ zu gegebenem $\varepsilon > 0$
(Das führt u.a. zu einem einfacheren Konvergenzbeweis im Banachschen Fixpunktsatz: für $x_n = f(x_{n-1})$ geht man mit $n \to \infty$ zur Grenze über.)

h) *Die Projektionsabbildungen, definiert auf dem Produkt metrischer Räume (vgl. Kap. 2.6) sind stetig (Übung).*

Wir wenden uns nun globalen Eigenschaften stetiger Abbildungen zu.

Satz 4.6
Für eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ sind folgende Aussagen äquivalent.

a) *f ist stetig.*

b) *$\forall A \subseteq X_2$ offen ist $f^{-1}(A)$ offen in X_1.*

c) *$\forall A \subseteq X_2$ abgeschlossen ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X_1.*

d) *$\forall A \subseteq X_1$ gilt: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

<u>Beweis:</u>
Zum Nachweis der Äquivalenz zeigen wir: a) $\Longrightarrow$ d) $\Longrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ a).

a) $\Longrightarrow$ d)**:** Sei $A \subseteq X_1$ bel. gewählt.
<u>*Annahme:*</u> $\exists x \in \bar{A}$ mit $f(x) \notin \overline{f(A)}$.
$\rightsquigarrow x \in \bar{A} \setminus A = A'$ und $f(x)$ ist kein Häufungspunkt von $f(A)$
$\rightsquigarrow \exists$ Umgebung V von $f(x)$ mit $f(A) \cap V = \emptyset$.
Aus a) folgt nun aber:
$\exists$ Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$.
$\rightsquigarrow f(A) \cap f(U) = \emptyset \rightsquigarrow f(A \cap U) = \emptyset$ (1.18!).
$\rightsquigarrow A \cap U = \emptyset$.
$\rightsquigarrow x$ ist kein Häufungspunkt von A, d.h. $x \notin A'$.
$\rightsquigarrow$ Widerspruch!

d) $\Longrightarrow$ c)**:** Sei $A \subseteq X_2$ abgeschlossen und $B := f^{-1}(A) \subseteq X_1$.
$\rightsquigarrow f(\bar{B}) \subseteq \overline{f(B)} \subseteq \bar{A} = A$ (nach d) und 1.18!)
$\rightsquigarrow \bar{B} \subseteq f^{-1}(A) = B \rightsquigarrow B = \bar{B}$.
d.h. $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen.

c) $\Longrightarrow$ b)**:** Sei $A \subseteq X_2$ offen.
$\rightsquigarrow X_2 \setminus A$ ist abgeschlossen
$\rightsquigarrow f^{-1}(X_2 \setminus A)$ ist abgeschlossen in X_1 (nach c)).
Es gilt: $f^{-1}(X_2 \setminus A) = \{x \in X_1 : f(x) \notin A\} = X_1 \setminus f^{-1}(A)$.
$\rightsquigarrow X_1 \setminus f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in X_1.
$\rightsquigarrow f^{-1}(A)$ ist offen in X_1.

b) $\Longrightarrow$ a): Sei $x \in X_1$ bel. gewählt und V eine bel. Umgebung von $f(x)$.
$\rightsquigarrow \exists \varepsilon > 0 : B_2(f(x), \varepsilon) \subseteq V$.
$\rightsquigarrow f^{-1}(B_2(f(x), \varepsilon))$ ist offen in X_1 (nach b)) und enthählt x.
$\rightsquigarrow U := f^{-1}(B_2(f(x), \varepsilon))$ ist Umgebung von x, so daß $f(U) \subseteq V$.
$\rightsquigarrow f$ ist stetig in x. $\square$

Bemerkung 4.7
Man beachte, daß stetige Abbildungen aber im allgemeinen offene bzw. abgeschlossene Mengen nicht in offene bzw. abgeschlossene Mengen abbilden (Satz 4.6 b),c) gilt für Urbilder und nicht für Bilder!).
Beispiele:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 \rightsquigarrow f(]-1,1[) = [0,1[$, *und das Intervall* $[0,1[$ *ist nicht offen!*

(ii) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{-1} \rightsquigarrow f(\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}) =]0,1]$, *und* $]0,1]$ *ist nicht abgeschlossen!*

Die nächste Aussage zeigt nun, daß wichtige Mengeneigenschaften bei stetigen Abbildungen erhalten bleiben.

Satz 4.8
Es sei $f : X_1 \to X_2$ stetig.

a) *Ist $A \subseteq X_1$ zusammenhängend, so gilt dies auch für $f(A)$ in X_2.*

b) *Ist $A \subseteq X_1$ (relativ) kompakt, so ist $f(A)$ in X_2 (relativ) kompakt.*

Beweis:

a) Sei $A \subseteq X_1$ zusammenhängend.
Annahme: $f(A)$ ist nicht zusammenhängend in X_2, d.h.
$\exists$ offene Mengen G_1, G_2 in X_2, so daß
$\tilde{G}_i := G_i \cap f(A) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, und
$f(A) = \tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2$, $\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 = \emptyset$.
Nach Satz 4.6 b) gilt: $f^{-1}(G_i)$ ist offen in X_1, $i = 1, 2$.
Wir setzen: $B_i := A \cap f^{-1}(G_i)$, $i = 1, 2$.
Nun gilt: $B_i \neq \emptyset$, da $\tilde{G}_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$; und

$$
\begin{aligned}
B_1 \cup B_2 &= (A \cap f^{-1}(G_1)) \cup (A \cap f^{-1}(G_2)) = A \cap (f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)) \\
&= A \cap f^{-1}(G_1 \cup G_2) \quad \text{(vgl. 1.18!)} \\
&\supseteq A, \text{ wegen } f(A) \subseteq G_1 \cup G_2.
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow A = B_1 \cup B_2$.
Schließlich:
$$
\begin{aligned}
B_1 \cap B_2 &= A \cap (f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2)) \\
&= A \cap f^{-1}(G_1 \cap G_2) \quad \text{(vgl. 1.18!)} \\
&= \emptyset, \text{ wegen } f(A) \cap G_1 \cap G_2 = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 = \emptyset.
\end{aligned}
$$
Fazit: A ist nicht zusammenhängend.
$\rightsquigarrow$ Widerspruch! $\square$

b) (i) Sei $A \subseteq X_1$ relativ kompakt, und es sei (y_n) eine Folge in $f(A)$.
Wir zeigen: $\mathcal{L}((y_n)) \neq \emptyset$
Es gilt: $\forall n \exists x_n \in A : y_n = f(x_n)$.
$\rightsquigarrow \exists$ Teilfolge $(x_{k(n)})$ von (x_n) mit $x_{K(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X_1$
$\rightsquigarrow f(x_{K(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \in X_2$, da f stetig (4.3 c))
$\rightsquigarrow (y_{K(n)}) = (f(x_{K(n)}))$ ist eine konvergente Teilfolge von $(y_n) \rightsquigarrow$ $\mathcal{L}((y_n)) \neq \emptyset$.

(ii) Sei nun $A \subseteq X_1$ kompakt.
Aus (i) folgt zunächst: $f(A)$ ist relativ kompakt.
Wir zeigen noch: $f(A)$ ist abgeschlossen.
Sei y ein Häufungspunkt von $f(A)$, d.h. $y \in f(A)'$.
Nach Satz 2.17 existiert eine Folge (y_n) in $f(A)$ mit $y_n \to y$.
$\rightsquigarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : y_n = f(x_n)$.
$\rightsquigarrow \exists$ Teilfolge $(x_{k(n)})$ von (x_n) mit $x_{k(n)} \to x \in A$ (2.35 b))
$\rightsquigarrow y_{k(n)} = f(x_{k(n)}) \to f(x) = y \rightsquigarrow y \in f(A)$.

Übung: Man beweise Satz 4.8 b) für A kompakt mit Hilfe des Überdeckungssatzes von Heine/Borel (Satz 2.43)!

Satz 4.8 erlaubt weitreichende Schlußfolgerungen. Wir zeigen, daß speziell der Zwischenwertsatz, der Hauptsatz der Optimierung und ein Resultat über die Stetigkeit inverser Abbildungen daraus abgeleitet werden können.

Satz 4.9 *(Zwischenwertsatz)*
Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $A \subseteq X$ zusammenhängend.
Dann ist $f(A)$ ein Intervall, d.h. aus $x, \tilde{x} \in A$ und $f(x) \leq y \leq f(\tilde{x})$ folgt $y \in f(A)$.

Beweis:
Aus 4.8 a) folgt, daß $f(A)$ zusammenhängend in $\mathbb{R}$ ist. Nach Beispiel 2.45 c) ist $f(A)$ dann ein Intervall. □
Als einfache Schlußfolgerung aus Satz 4.9 füllen wir nun eine Lücke in Kap. 3.4 (vgl. Bem. 3.49).

Folgerung 4.10
$\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Beweis:
Wir wissen bereits: $\exp(\mathbb{R}) \subseteq]0, +\infty[$ (Satz 3.47b)).
Es sei nun $y \in]0, +\infty[$ bel. gewählt, z.z.: $\exists x \in \mathbb{R} : y = \exp(x)$.
Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist (4.5 b)!) und $\mathbb{R}$ zusammenhängend (2.45 b)!), folgt aus Satz 4.9: $\exp(\mathbb{R})$ ist ein Intervall.

Wegen $\exp(x) \geq 1 + x$ und $0 < \exp(-x) \leq (1+x)^{-1}$, $\forall x \geq 0$ (nach Def. von exp und dem Additionstheorem 3.47a)), folgt:

$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : a := \exp(x_1) < y < \exp(x_2) =: b.$

$\rightsquigarrow a, b \in \exp(\mathbb{R}) \rightsquigarrow y \in [a, b] \subseteq \exp(\mathbb{R}).$ □

Satz 4.11
Seien X_1, X_2 metrische Räume, $K \subseteq X_1$ kompakt und $f : K \to X_2$ eine stetige und injektive Abbildung.
Dann ist $f^{-1} : f(K) \to X_1$ stetig.

Beweis:
Wir wenden Satz 4.6 c) an! Sei $A \subseteq X_1$ abgeschlossen.
Wir zeigen: $(f^{-1})^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in X_2.
Es gilt:

$$\begin{aligned}(f^{-1})^{-1}(A) &= \{y \in f(K) : f^{-1}(y) \in A\} \\ &= \{y \in X_2 : f^{-1}(y) \in A \cap K\} = f(A \cap K).\end{aligned}$$

Nach Vor. ist $A \cap K$ kompakt und deshalb nach Satz 4.8 b) auch $f(A \cap K)$ kompakt.
Also ist $(f^{-1})^{-1}(A)$ kompakt und insbesondere abgeschlossen. □

Folgerung 4.12
Der natürliche Logarithmus $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

Beweis:
Wir wenden Satz 4.11 mit $X_1 := X_2 := \mathbb{R}$ und $f := \exp$ an. exp ist stetig (4.5b)) und injektiv (3.47 e)), und

$$\exp^{-1} = \ln .$$

Sei $y \in]0, +\infty[$ bel., und wir wählen $a, b \in]0, +\infty[$ mit

$$a < y < b.$$

Nun wenden wir Satz 4.11 mit $K := [\ln(a), \ln(b)]$ an und erhalten, daß ln auf $f(K) = [a, b]$ und damit auch in y stetig ist. □

Satz 4.13 *(Weierstraß)*
Seien (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$, kompakt.
Dann existieren $x_o, x_1 \in K$, so daß $f(x_o) = \inf\{f(x) : x \in K\}$ und $f(x_1) = \sup\{f(x) : x \in K\}$.

Beweis:
Nach Satz 4.8 b) ist $f(K)$ kompakt in $I\!R$ und folglich beschränkt und abgeschlossen (3.5 und 3.6 !).
$a := \inf f(K)$ und $b := \sup f(K)$ gehören aber zu $I\!R$, da $f(K)$ beschränkt ist, und sind beide Häufungspunkte von $f(K)$. Also: $a \in f(K)$ und $b \in f(K)$.
Damit ist alles bewiesen. $\square$

Bemerkung 4.14
Der Satz von Weierstraß sagt also in Kurzform: Jede stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge ihr Minimum und ihr Maximum an!
Satz 4.13 heißt manchmal auch Hauptsatz der Optimierung.
Allgemeines Optimierungsproblem:

Gegeben:	$\emptyset \neq K \subseteq X$ *(Restriktionsmenge),*
	$f : X \to I\!R$ *(Ziel–, Kostenfunktion).*
Gesucht:	$x_o \in K$ *mit* $f(x_o) = \inf\{f(x) : x \in K\}$.

Satz 4.13 liefert nun Bedingungen an K und f, wann dieses Problem lösbar ist: Man finde eine Metrik d auf X, so daß K kompakt und f stetig ist (dies ist i.a. eine sich gegenseitig widerstreitende Zielstellung!).

Betrachtet man nur sog. "Minimumprobleme" (wie in 4.14), so läßt sich die Vor. an f in Satz 4.13 abschwächen.

Satz 4.15
Sei (X,d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq K \subseteq X$ kompakt.
$f : X \to I\!R$ sei unterhalbstetig, d.h. $\forall x \in X$ $\forall$ Folgen (x_n) in X mit $x_n \to x$ gilt:
$f(x) \leq \varliminf_{n\to\infty} f(x_n)$.
Dann existiert $x_o \in K$ mit $f(x_o) = \inf\{f(x) : x \in K\}$.

Beweis:
Sei $\bar{x} \in K$ bel., und wir betrachten die Menge

$$A := \{r \in I\!R : \exists x \in K \quad \text{mit} \quad f(\bar{x}) \geq r \geq f(x)\} \neq \emptyset.$$

Zunächst gilt: $\inf\{f(x) : x \in K\} = \inf A$.
Wir zeigen: A ist kompakt.

(i) A ist beschränkt.
 Annahme: $\exists$ Folge (r_n) in A mit $r_n \to -\infty$.
 $\rightsquigarrow \forall n \in I\!N \exists x_n \in K : r_n \geq f(x_n)$.
 $\rightsquigarrow \exists$ Teilfolge $(x_{k(n)})$ von (x_n) mit $x_{k(n)} \to x \in K$.
 $\rightsquigarrow f(x) \leq \varliminf_{n\to\infty} f(x_{k(n)}) \leq \varliminf_{n\to\infty} r_n = -\infty \rightsquigarrow$ Widerspruch!

(ii) A ist abgeschlossen.
Sei (r_n) eine Folge in A mit $r_n \to r \in I\!R$.
$\rightsquigarrow \forall n \in I\!N \exists x_n \in K$ mit $f(x_n) \leq r_n \leq f(\bar{x})$.
$\rightsquigarrow \exists$ Teilfolge $(x_{k(n)})$ von (x_n) mit $x_{k(n)}) \to x \in K$.
$\rightsquigarrow f(x) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_{k(n)}) \leq \lim_{n\to\infty} r_{k(n)} = r \leq f(\bar{x})$.
$\rightsquigarrow f(x) \leq r \leq f(\bar{x}) \rightsquigarrow r \in A$.

Also ist A kompakt, und es gilt $\inf A \in A$.
$\rightsquigarrow \exists x_o \in K$: $\quad f(x_o) \leq \inf A$.
$\rightsquigarrow \qquad f(x_o) = \inf\{f(x) : x \in K\}$. $\square$

Wir kommen nun zu weiteren Eigenschaften der Stetigkeit und beginnen mit der Stetigkeit zusammengesetzter Abbildungen (vgl. 1.19).

Satz 4.16
Es seien (X_i, d_i), $i = 1,2,3$, metrische Räume und $f : X_1 \to X_2$, sowie $g : X_2 \to X_3$ Abbildungen.
Ist f stetig in $x_o \in X_1$ und g stetig in $f(x_o) \in X_2$, so ist die Abbildung $h := g \circ f : X_1 \to X_3$ stetig in x_o.
Sind f und g stetig, so ist auch h stetig.

Beweis:
Da der zweite Teil der Aussage sofort aus dem ersten Teil folgt, beweisen wir diesen. Es sei W eine beliebige Umgebung von $h(x_o) = g \circ f(x_o) = g(f(x_o))$. Da g in $f(x_o)$ stetig ist, existiert eine Umgebung V von $f(x_o)$, so daß

$$g(V) \subseteq W.$$

Da f in x_o stetig ist, existiert eine Umgebung U von x_o, so daß

$$f(U) \subseteq V.$$

Folglich gilt $h(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$, und h ist stetig in x_o. $\square$

Definition 4.17

a) *$f : X_1 \to X_2$ heißt gleichmäßig stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, so daß $\forall x, y \in X_1$ mit $d_1(x,y) < \delta$ gilt:*

$$d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

b) *$f : X_1 \to X_2$ heißt Lipschitzstetig, falls $\exists L > 0$, so daß $\forall x, y \in X_1$ gilt:*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x,y).$$

Bemerkung 4.18
Für eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ gilt nach 4.1 bzw. 4.18:
f ist Lipschitzstetig $\Longrightarrow$ f ist gleichmäßig stetig $\Longrightarrow$ f ist stetig

$$(\text{mit } \delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{L}) \qquad (\text{vgl. 4.3b})).$$

Ein Vergleich des Begriffs "gleichmäßige Stetigkeit" mit dem ε– δ–Kriterium in Satz 4.3 b) zeigt, daß dort δ von ε und x_o abhängt und daß in 4.17 a) $\delta = \delta(\varepsilon)$ gleichmäßig bez. der Elemente aus X_1 gewählt werden kann.
Beispiel für Lipschitzstetige Abbildungen f : $f : X \to X$ kontraktiv (vgl. Kap. 2.3).

Beispiele 4.19

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, *ist stetig.*

Bew.:
Es sei zunächst $x_o \neq 0$. Dann ist die Funktion $g(x) := \frac{1}{x}$ stetig in x_o und nach Satz 4.17 bzw. Bsp. 4.5 c) (Stetigkeit von $\sin$) ist auch $\sin(\frac{1}{x})$ stetig in x_o.
Hieraus folgt schließlich die Stetigkeit von f in x_o.
Sei nun $x_o = 0$. Dann gilt für bel. $x \neq 0$:

$$|f(0) - f(x)| \leq |x||\sin\frac{1}{x}| =\leq |x|, \textit{ da aus 3.53 folgt: } \sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

Ist also $\varepsilon > 0$ bel. vorgegeben, so gilt mit $\delta := \varepsilon$:

$$|f(0) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{falls} \quad |x| < \delta,$$

d.h. f ist auch stetig in $x_o = 0$. $\square$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *ist stetig, aber <u>nicht</u> gleichmäßig stetig (auf $\mathbb{R}$).*
<u>Ursache:</u>

$$|x^2 - y^2| = |x + y||x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

und $|x + y|$ kann beliebig groß werden!
<u>Jedoch</u> ist f sogar Lipschitzstetig auf jeder <u>beschränkten</u> Menge!

c) $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) := [-2, -1[\cup [1, 2]$,
$f(x) := \begin{cases} x + 1, & x \in [-2, -1[\\ x - 1, & x \in [1, 2]. \end{cases}$ $\quad$ *f ist stetig.*

f ist injektiv und wir berechnen die inverse Abbildung f^{-1}.

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in f &\iff \left\{\begin{array}{ll} y=x+1, & \forall x\in[-2,-1[\\ y=x-1, & \forall x\in[1,2] \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} x=y-1, & \forall y\in[-1,0[\\ x=y+1, & \forall y\in[0,1] \end{array}\right. \\
&\iff \qquad (y,x)\in f^{-1}
\end{aligned}
$$

f^{-1} ist aber <u>nicht</u> stetig in $x_o=0$, da $f^{-1}(0)=1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(-\frac{1}{n})=-1$.
Dies zeigt, daß die Kompaktheits–Voraussetzung in Satz 4.11 wesentlich ist ($D(f)$ ist <u>nicht</u> kompakt!).

d) *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f(x):=\exp(ix)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, ist Lipschitzstetig (mit Konstante $L:=1$).*
Eine wichtige Konsequenz dieser Aussage ist, daß auch die Funktionen sin *und* cos *Lipschitzstetig mit Konstante $L:=1$ sind.*
<u>Bew.:</u>
Zunächst folgt für alle $x,y\in\mathbb{R}$ aus Satz 3.47 a):

$$
\begin{aligned}
f(x+y)-f(x-y) &= \exp(ix)(\exp(iy)-\exp(-iy)) \\
&= \exp(ix)(\exp(iy)-\overline{\exp(iy)}) \\
&= 2i\exp(ix)\mathrm{Im}(\exp(iy))
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow |f(x+y)-f(x-y)|=2|\sin y|$ *(vgl. 3.51, 3.53).*
$\rightsquigarrow |f(x)-f(\tilde{x})|=2|\sin(\frac{x-\tilde{x}}{2})|, \quad \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}.$
Wir zeigen schließlich $|\sin y|\le|y|$, $\forall y\in\mathbb{R}$,
woraus dann die Aussage folgt.
Zunächst ist wegen $|\sin(-y)|=|-\sin y|=|\sin y|$, klar, daß man sich auf den Fall $y\ge 0$ beschränken kann.
Für $y\ge 1$ gilt aber offenbar

$$|\sin y|\le|\exp(iy)|=1\le y.$$

Es sei nun $y\in[0,1[$. Dafür gilt aber

$$\sin y-y=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\le 0 \quad \text{(vgl. auch Beweis von 3.26);}$$

d.h. $\sin y\le y$. □

e) *$f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x):=x^{\frac{1}{2}}$, $\forall x\in[0,+\infty[$, ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitzstetig (auch nicht auf $[0,1]$).*
<u>Bew.:</u>

Da $g : [0, +\infty[\to I\!R$, $g(y) := y^2$, $\forall y \in I\!R$, stetig und injektiv ist, zeigt man analog zu Folg. 4.12, daß $f = g^{-1}$ ebenfalls stetig ist.
Ist nun für $x, y \in [0, +\infty[$, $x \geq 1$ oder $y \geq 1$, so gilt:

$$|x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}| = \frac{|x-y|}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \leq |x-y|,$$

d.h. für solche $x, y \in [0, +\infty[$ ist f gleichmäßig stetig. Auf $[0,1]$ resultiert die gleichmäßige Stetigkeit von f aus Satz 4.20 (da f stetig und $[0,1]$ kompakt).
Also ist insgesamt f gleichmäßig stetig auf $[0, +\infty[$.
Wäre f Lipschitzstetig, so müßte insbesondere die Menge

$$\left\{ \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} : x > 0 \right\} \text{ beschränkt sein.}$$

Für $x_n := \frac{1}{n}$ $(n \in I\!N)$ gilt aber: $\frac{|f(x_n)-f(0)|}{|x_n|} = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. $\square$

Satz 4.20
Es seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrische Räume, $f : X_1 \to X_2$ stetig und $k \subseteq X_1$ kompakt.
Dann ist f gleichmäßig stetig auf K (d.h. $f_{|K}$ ist gleichmäßig stetig).

Beweis:
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir zeigen: $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:
$\forall x, y \in K$, $d_1(x,y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Wegen der Stetigkeit von f existiert zunächst zu jedem $x \in K$ ein $\delta(\varepsilon, x) > 0$, so daß $\forall y \in K$ mit $d_1(x,y) < \delta(\varepsilon, x)$ gilt: $d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, d.h.

$$f(B_1(x, \delta(\varepsilon, x))) \subseteq B_2(f(x), \frac{\varepsilon}{2}).$$

Dann ist $(B_1(x, \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, x)))_{x \in K}$ eine Überdeckung von K.
Nach Satz 2.43 existiert eine endliche Überdeckung

$$(B_1(x_i, \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, x_i)))_{i=1,\dots,n} \quad \text{von } K \quad (\text{mit } x_i \in K, i = 1, \dots, n).$$

Wir definieren nun $\delta := \frac{1}{2} \min_{i=1,\dots,n} \delta(\varepsilon, x_i)$.
Es seien $x, y \in K$ mit $d_1(x,y) < \delta$ beliebig gewählt.
Dann existiert ein $i_o \in \{1, \dots, n\}$ mit $d_1(x, x_{i_o}) < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, x_{i_o})$.
Folglich gilt:

$$d_1(y, x_{i_o}) \leq d_1(y, x) + d_1(x, x_{i_o}) < \delta + \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, x_{i_o}) \leq \delta(\varepsilon, x_{i_o})$$

$\rightsquigarrow f(y) \in f(B_1(x_{i_o}, \delta(\varepsilon, x_{i_o}))) \subseteq B_2(f(x_{i_o}), \frac{\varepsilon}{2})$

$$\rightsquigarrow d_2(f(x), f(y)) \le d_2(f(x), f(x_{i_o})) + d_2(f(x_{i_o}), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Übung: Man beweise Satz 4.20 mit Hilfe der Folgen–Charakterisierung der Kompaktheit!

Problem: Gegeben sei $f : A \to X_2$, $A \subseteq X_1$, stetig.
Unter welchen Voraussetzungen kann man f auf eine Menge B mit $A \subset B$ stetig fortsetzen, d.h. wann existiert eine
Abbildung $\hat{f} : B \to X_2$, die stetig ist und für die
$\hat{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in A$, gilt?

Bemerkung 4.21
Eine positive Antwort auf diese Problemstellung ist selbstverständlich nicht immer möglich. Dies sieht man z.B. an folgendem Beispiel: $f(x) := x^{-1}$, $\forall x \in]0, +\infty[=: A$*; eine stetige Fortsetzung auf* $A \cup \{0\}$ *ist nicht möglich!*
Trivialerweise existiert eine stetige Fortsetzung im Fall, daß $B \backslash A$ *nur isolierte Punkte (von* B*) enthält, da jede Abbildung in solchen Punkten stets stetig ist. Interessant ist also der Fall* $B \backslash A \subseteq A'$ *oder z.B.* $B := X_1$.

Definition 4.22
Seien $f : A \to X_2$ *stetig,* $A \subseteq X_1$, $a \in A'$.
$y \in X_2$ *heißt Grenzwert von* f *an der Stelle* a*, wenn für jede Folge* (x_n) *in* A *mit* $x_n \to a$ *gilt:*

$$f(x_n) \to y.$$

Bezeichnung: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$.

Lemma 4.23
Seien $f : A \to X_2$ *stetig,* $A \subseteq X_1$, $a \in A' \backslash A$.
Es existiert eine stetige Fortsetzung von f *auf* $A \cup \{a\}$ *gdw.* f *an der Stelle* a *einen Grenzwert besitzt.*

Beweis:

($\Longrightarrow$) : Ist $\hat{f}(a)$ die stetige Fortsetzung von f auf $A \cup \{a\}$, so gilt für jede Folge (x_n) in A mit $x_n \to a$:

$$\lim_{n \to \infty} \hat{f}(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \hat{f}(a).$$

D.h. $\hat{f}(a)$ ist Grenzwert von f an der Stelle a.

$(\Longleftarrow)$: Ist y der Grenzwert von f an der Stelle a, so definieren wir $\hat{f}(a) := y$. Dann folgt die Stetigkeit von $\hat{f}$ in a aus der Grenzwert–Definition. $\square$

Wir kommen nun zu hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Grenzwertes:

Definition 4.24
Sei $F : A \to X_2$, $A \subseteq X_1$, $a \in A'$.
$\omega(f;a) := \inf\{\text{diam } f(U \cap A) : U \text{ ist Umgebung von } a\}$
heißt <u>Oszillation</u> von f in a bez. A.

Satz 4.25
Sei (X_2, d_2) vollständig, $f : A \to X_2$, $A \subseteq X_1$, $a \in A'$.
Dann existiert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ gdw. $\omega(f;a) = 0$.

<u>**Beweis:**</u>

$(\Longrightarrow)$: Sei $y := \lim\limits_{x \to a} f(x)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Wir betrachten $V := B_2(y, \frac{\varepsilon}{2})$.
<u>*Annahme:*</u> $\forall$ Umgebungen U von a gilt: $f(U \cap A) \setminus V \neq \emptyset$.
Mit $U_n := B_1(a, \frac{1}{n})$ $(n \in I\!\!N)$ schlußfolgern wir:
$\forall n \in I\!\!N \exists y_n \in f(U_n \cap A) \setminus V$
$\rightsquigarrow \quad \exists x_n \in U_n \cap A : y_n = f(x_n)$
$\rightsquigarrow x_n \to a$ und (x_n) Folge in A
$\rightsquigarrow f(x_n) = y_n \to y$
$\rightsquigarrow y_n \in V$ für hinreichend großes $n \rightsquigarrow$ Widerspruch!

Also: $\exists$ Umgebung U von a mit $f(U \cap A) \subseteq V$.
$\rightsquigarrow \omega(f;a) \leq \text{diam } V \leq \varepsilon$.
$\rightsquigarrow \omega(f;a) = 0$.

$(\Longleftarrow)$:
$$\begin{aligned} \text{Es sei } \omega(f;a) &= \inf\{\,\text{diam} f(U \cap A) : U = \text{ Umgebung v. } A\} \\ &= \inf\{\sup_{x,y \in U \cap A} d_2(f(x), f(y)) : U = \text{ Umgebung v. } A\} \\ &= 0, \end{aligned}$$
(x_n) eine Folge in A mit $x_n \to a$ und $\varepsilon > 0$ bel. gewählt.
Dann existiert eine Umgebung U von a, so daß

$$\text{diam } f(U \cap A) < \varepsilon,$$

d.h. $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad \forall x, y \in U \cap A$.
Nun gilt aber: $\exists n_o \in I\!\!N$, so daß $x_n \in U \cap A$, $\forall n \geq n_o$.
$\rightsquigarrow d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_o$
$\rightsquigarrow (f(x_n))$ ist Fundamentalfolge im vollständigen metrischen Raum X_2.

$\rightsquigarrow \exists y \in X_2 : f(x_n) \to y$.
Ist nun $(\tilde{x}_n)$ eine weitere Folge in A mit $\tilde{x}_n \to a$, so gilt nach dem oben Gesagten, daß

$$d_2(f(x_n), f(\tilde{x}_n)) < \varepsilon, \quad \text{sobald } x_n, \tilde{x}_n \in U \cap A.$$

$\rightsquigarrow$ für alle solche Folgen gilt: $f(\tilde{x}_n) \to y$.
$\rightsquigarrow y = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. □

Satz 4.26
Sei (X_2, d_2) vollständig, $A \subseteq X_1$ und $f : A \to X_2$ gleichmäßig stetig. Dann existiert eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\hat{f} : \bar{A} \to X_2$ von f.

Beweis:
Gemäß Lemma 4.23 und Satz 4.25 genügt, für die Existenz von $\hat{f}$ zu zeigen: $\omega(f; a) = 0$, $\forall a \in \bar{A}$.
(Dann kann man nach 2.24 definieren:

$$\hat{f}(a) := \lim_{x \to a} f(x), \quad \forall a \in \bar{A} \backslash A).$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ bel. vorgegeben und $a \in \bar{A} \backslash A$ bel. Nach Vor. $\exists \delta > 0$, so daß aus $x, \tilde{x} \in A$, $d_1(x, \tilde{x}) < \delta$ folgt: $d_2(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$.
$\rightsquigarrow$ für bel. $a \in \bar{A}$ gilt: diam $f(A \cap B_1(a, \frac{\delta}{2})) \leq \varepsilon$.
$\rightsquigarrow \omega(f; a) \leq \varepsilon$, $\forall a \in \bar{A}$.
Damit ist die Existenz von $\hat{f} : \bar{A} \to X_2$ als Fortsetzung von f bewiesen. Nach 4.23 ist $\hat{f}$ stetig.
Wir zeigen noch: $\hat{f}$ ist sogar gleichmäßig stetig.
Sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt.
$\rightsquigarrow \exists \delta > 0 : \forall x, \tilde{x} \in A,\ d_1(x, \tilde{x}) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(\tilde{x})) < \frac{\varepsilon}{3}$.
Es seien nun $y, \tilde{y} \in \bar{A}$ mit $d_1(y, \tilde{y}) < \frac{\delta}{3}$.
$\rightsquigarrow \quad \exists x \in A : d_1(y, x) < \frac{\delta}{3}, d_2(\hat{f}(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ und
$\qquad \exists \tilde{x} \in A : d_1(\tilde{y}, \tilde{x}) < \frac{\delta}{3}, d_2(\hat{f}, (\tilde{y}), f(\tilde{x})) < \frac{\varepsilon}{3}$.
$\rightsquigarrow d_1(x, \tilde{x}) \leq d_1(x, y) + d_1(y, \tilde{y}) + d_1(\tilde{y}, \tilde{x}) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta$
$\rightsquigarrow d_2(f(x), f(\tilde{x})) < \frac{\varepsilon}{3}$
$\rightsquigarrow d_2(\hat{f}(y), \hat{f}(\tilde{y})) \leq d_2(\hat{f}(y), f(x)) + d_2(f(x), f(\tilde{x})) + d_2(f(\tilde{x}), \hat{f}(\tilde{y})) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. □

Mit Satz 4.26 ist das Problem der Fortsetzung einer stetigen Abbildung auf die Abschließung ihres Definitionsbereiches für den Fall, daß der Bildraum vollständig ist, zufriedenstellend gelöst. Dies ist speziell auf $X_2 := I\!R$ anwendbar. Das Beispiel in 4.21 zeigt auch, daß die Stetigkeit von f auf A dafür nicht ausreichend ist. Das folgende Resultat ist nun fr̈ den Fall $X_2 := I\!R$ auch das stetige Fortsetzungsproblem von einem abgeschlossenen Definitionsbereich auf den ganzen metrischen Raum.

Satz 4.27 *(Tietze/Urysohn)*
Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig mit
$\sup\limits_{x\in A} |f(x)| < +\infty$.
Dann existiert eine stetige Abbildung $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\hat{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in A,$$

$$\sup_{x\in X} \hat{f}(x) = \sup_{x\in A} f(x) \quad \text{und} \quad \inf_{x\in X} \hat{f}(x) = \inf_{x\in A} f(x).$$

Beweis:
siehe Dieudonné, Kap. 4.5, S. 90. □

4.2 Räume und Folgen stetiger Funktionen

Es sei T eine nichtleere Menge, und wir betrachten die folgende Menge aller beschränkten Funktionen von T in $\mathbb{R}^m$ (vgl. Bsp. 2.2c)):

$B(T,\mathbb{R}^m) := \{x : T \to \mathbb{R}^m : \sup\limits_{t\in T} \|x(t)\| < +\infty\}$

(hierbei ist $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^m$).

Satz 4.28
$(B(T,\mathbb{R}^m), d_B)$ mit $d_B(x,y) := \sup\limits_{t\in T} \|x(t) - y(t)\| \, \forall x, y \in B(T,\mathbb{R}^m)$.
ist ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis:
Analog zu 2.2c) zeigt man, daß $d_B : B(T,\mathbb{R}^m) \times B(T,\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist.
Wir zeigen noch, daß dieser metrische Raum vollständig ist.
Sei (x_n) eine Fundamentalfolge in $B(T,\mathbb{R}^m)$, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
$\rightsquigarrow \exists n_o \in \mathbb{N}$: $d_B(x_n, x_k) < \varepsilon$, $\forall n, k \geq n_o$.
$\rightsquigarrow \forall t \in T$ gilt:

$\|x_n(t) - x_k(t)\| < \varepsilon, \quad \forall n, k \geq n_o.$

$\rightsquigarrow \forall t \in T$ ist $(x_n(t))$ eine Fundamentalfolge in $\mathbb{R}^m$.
Nach Satz 3.13 gilt:

$\forall t \in T \; \exists x(t) \in \mathbb{R}^m : x_n(t) \to x(t).$

Aus der obigen Ungleichung folgt nun durch Grenzübergang $k \to \infty$:

$$\begin{array}{rrcl} & \|x_n(t) - x(t)\| & \leq & \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o, \quad \forall t \in T. \\ \rightsquigarrow & d_B(x_n, x) & \leq & \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o. \end{array}$$

Frage: $x \in B(T, \mathbb{R}^m)$?
Da (x_n) Cauchy-Folge in $B(T, \mathbb{R}^m)$ ist, ist (x_n) beschränkt, d.h. $\exists r > 0$, so daß $\sup\limits_{t \in T} \|x_n(t)\| \leq r \ \forall n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow \|x(t)\| \leq \lim\limits_{n \to \infty} \|x_n(t)\| \leq r \ \forall t \in T$
$\rightsquigarrow \sup\limits_{t \in T} \|x(t)\| \leq r \ \forall t \in T$, d.h. x ist beschränkt. $\square$

Übung: Man zeige, daß $B([0,1], \mathbb{R})$ nicht separabel ist!

Definition 4.29
Sei (x_n) eine Folge von Abbildungen von T in $\mathbb{R}^m$ und $x : T \to \mathbb{R}^m$.
Man sagt

a) *(x_n) konvergiert punktweise auf T gegen x, falls*

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n(t) - x(t)\| = 0, \quad \forall t \in T.$$

b) *(x_n) konvergiert gleichmäßig auf T gegen x, falls*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in T} \|x_n(t) - x(t)\| = 0.$$

Bemerkung 4.30
Die Konvergenz einer Folge in $B(T, \mathbb{R}^m)$ ist also gerade die gleichmäßige Konvergenz. Aus der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge folgt deren punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt i.a. nicht, wie die folgenden Beispiele zeigen!

Beispiele 4.31

a) $T := [0,1], m := 1$, $x_n(t) := \min\{nt, 1\}$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow \sup\limits_{t \in [0,1]} |x_n(t)| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow x_n \in B([0,1], \mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$, $\forall t \in [0,1]$, *wobei*

$$x(t) := \begin{cases} 1 & , \quad t \in]0,1] \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases} ,$$

(D.h. (x_n) ist punktweise konvergent gegen eine nicht–stetige Funktion.)
aber (x_n) konvergiert nicht gleichmäßig gegen x.
Bew.: $d_B(x_n, x) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x(t)|$
$= \sup\limits_{t \in]0, \frac{1}{n}[} |nt - 1| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \square$

b) $T := [0,1]$, $m := 1$ *und* $x_n(t) := \begin{cases} 2n^2t & , t \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2n(1-nt) & , t \in]\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & , t \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Dann gilt: $\forall t > 0 \exists n_o(t) \in \mathbb{N} : x_n(t) = 0 \; \forall n \geq n_o$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0 =: x(t)$, $\forall t \in [0,1]$, *aber*

$\sup\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x(t)| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t)| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(d.h. (x_n) ist punktweise aber nicht gleichmäßig konvergent gegen $x(t) = 0 \; \forall t \in [0,1]$!)

c) $T := [0, +\infty[$, $m := 1$ *und* $x_n(t) := \min\{t, n\}$, $\forall t \in T$.

Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = t =: x(t)$, $\forall t \in T$, *und*

$$x_n \in B(T, \mathbb{R}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aber: $x \notin B(T, \mathbb{R})$, *d.h. der punktweise Grenzwert von Funktionen aus $B(T, \mathbb{R})$ gehört i.a. nicht zu $B(T, \mathbb{R})$!*

Definition 4.32

Es sei (T, d) ein metrischer Raum.

$C(T, \mathbb{R}^m) := \{x : T \to \mathbb{R}^m : x \text{ ist stetig}\}$ – *Menge aller stetigen Funktionen von T in $\mathbb{R}^m$;*

$C_b(T, \mathbb{R}^m) := C(T, \mathbb{R}^m) \cap B(T, \mathbb{R}^m)$ – *Menger aller stetigen und beschränkten Funktionen von T in $\mathbb{R}^m$.*

Bezeichnung: $C_m(T) := C(T, \mathbb{R}^m)$, $C(T) := C(T, \mathbb{R})$, $C_b(T) = C_b(T, \mathbb{R})$.

Bemerkung 4.33

$(C_b(T, \mathbb{R}^m), d_B)$ ist ein metrischer Raum (vgl. auch Satz 4.34).

Ist der metrische Raum T kompakt, so gilt $C_b(T, \mathbb{R}^m) = C(T, \mathbb{R}^m)$ (Weierstraß: stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind beschränkt (Satz 4.13)!)

Ferner gilt in diesem Fall

$$d_B(x, y) = \max_{t\in T} \|x(t) - y(t)\| =: d_C(x, y) \quad \text{(Satz 4.13).}$$

da das Maximum von $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|$ auf T angenommen wird! Beispiel 4.31 a) zeigt auch, daß Grenzwerte von Folgen aus $C_b(T, \mathbb{R}^m)$ bez. der punktweisen Konvergenz i.a. nicht mehr in $C(T, \mathbb{R}^m)$ liegen. Bez. der gleichmäßigen Konvergenz ist dies anders:

Satz 4.34

Es sei (T, d) ein metrischer Raum. Dann ist $C_b(T, \mathbb{R}^m)$ ein abgeschlossener Teilraum von $(B(T, \mathbb{R}^m), d_B)$.

<u>Beweis:</u>
Es sei (x_n) eine Folge in $C_b(T, I\!R^m)$, die in $B(T, I\!R^m)$ gegen ein $x \in B(T, I\!R^m)$ konvergiert.
Wir zeigen: $x \in C(T, I\!R^m)$.
Es sei $\varepsilon > 0$ bel. vorgegeben, und sei $t_o \in T$ bel. gewählt.
$\rightsquigarrow \exists n_o = n_o(\varepsilon) \in I\!N : d_B(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq n_o$.
Da x_{n_o} stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$\|x_{n_o}(t) - x_{n_o}(t_o)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{falls } d(t, t_o) < \delta.$$

Deshalb gilt für alle $t \in T$ mit $d(t, t_o) < \delta$:

$$\begin{aligned}\|x(t) - x(t_o)\| &\leq \|x(t) - x_{n_o}(t)\| + \|x_{n_o}(t) - x_{n_o}(t_o)\| + \|x_{n_o}(t_o) - x(t_o)\| \\ &\leq 2d_B(x, x_{n_o}) + \|x_{n_o}(t) - x_{n_o}(t_o)\| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

Folglich ist x in t_o stetig (Satz 4.3!).
Da $t_o \in T$ bel. gewählt war, gilt $x \in C(T, I\!R^m)$. $\square$

Bemerkung 4.35
Satz 4.34 sagt insbesondere folgendes aus:

(i) Ist (T, d) ein metrischer Raum, so ist $(C_b(T, I\!R^m), d_B)$ ein vollständiger metrischer Raum.
(<u>Bew.:</u> Ist (x_n) eine Fundamentalfolge in $C_b(T, I\!R^m)$, so ist sie in $B(T, I\!R^m)$ konvergent (4.28!), und ihr Grenzwert liegt in $C_b(T, I\!R^m)$ (4.34). $\square$)

(ii) Konvergiert eine Folge stetiger beschränkter Funktionen <u>gleichmäßig</u> gegen eine Funktion, so ist diese <u>ebenfalls stetig</u> (im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz!).

Ist T kompakt, so ist also $(C(T, I\!R^m), d_C)$ ein vollständiger metrischer Raum. Später zeigen wir auch, daß dieser metrische Raum separabel ist (einschließlich der Charakterisierung interessanter dichter Mengen) und daß notwendige und hinreichende Bedingungen für die relative Kompaktheit in $C(T, I\!R^m)$ existieren.

<u>Problem:</u> Unter welchen Voraussetzungen an eine Folge (x_n) in $C(T, I\!R^m)$ folgt aus deren punktweiser Konvergenz ihre gleichmäßige Konvergenz?
Der zentrale Begriff hierbei ist der folgende:

Definition 4.36
Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq C(T, I\!R^m)$ heißt <u>gleichgradig stetig</u>, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathcal{F}$ und $\forall t, \tilde{t} \in T$ mit $d(t, \tilde{t}) < \delta$ gilt:

$$\|x(t) - x(\tilde{t})\| < \varepsilon.$$

Beispiele 4.37

a) *Endliche Mengen von auf T gleichmäßg stetigen Funktionen aus $C(T, \mathbb{R}^m)$ sind gleichgradig stetig.*
(Bew.: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man das kleinste aller endlich vielen $\delta(\varepsilon)$ aus der gleichmäßigen Stetigkeit. $\square$)

b) *Existieren Konstanten $C > 0$, $\alpha > 0$, so daß $\forall x \in \mathcal{F}$, $\forall t, \tilde{t} \in T$ gilt*

$$\|x(t) - x(\tilde{t})\| \leq C(d(t, \tilde{t}))^\alpha,$$

so ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.("gleichmäßige Hölder–Stetigkeit")
(Bew.: Zu $\varepsilon > 0$ wähle man $\delta(\varepsilon) := (\frac{\varepsilon}{C})^{1/\alpha}$. $\square$)

Satz 4.38
Es sei (T, d) ein kompakter metrischer Raum, und (x_n) sei eine Folge in $C(T, \mathbb{R}^m)$. Wir betrachten die folgenden 3 Bedingungen:

a) *(x_n) konvergiert punktweise;*

b) *(x_n) konvergiert gleichmäßig;*

c) *$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichgradig stetig.*

Dann gilt: b) $\Longleftrightarrow$ a) und c).

Beweis:

($\Longrightarrow$) Sei b) erfüllt. Dann folgt offenbar a) (vgl. 4.30).
Wir zeigen: $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichgradig stetig.
Nach Vor. gilt: $\exists x \in C(T, \mathbb{R}^m)$ mit $d_C(x_n, x) \to 0$ (4.34!).
Da T kompakt ist, ist x gleichmäßig stetig auf T (Satz 4.20).
Sei $\varepsilon > 0$ bel. vorgegeben.
$\rightsquigarrow \exists \delta > 0 : \forall t, \tilde{t} \in T$, $d(t, \tilde{t}) < \delta$, gilt: $\|x(t) - x(\tilde{t})\| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Ferner gilt: $\exists n_o \in \mathbb{N} : d_C(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \geq n_o$.
Es seien nun $n \geq n_o$, $t, \tilde{t} \in T$ mit $d(t, \tilde{t}) < \delta$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \|x_n(t) - x_n(\tilde{t})\| &\leq \|x_n(t) - x(t)\| + \|x(t) - x(\tilde{t})\| + \|x(\tilde{t}) - x_n(\tilde{t})\| \\ &\leq 2d_C(x_n, x) + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \{x_n : n \geq n_o\}$ ist gleichgradig stetig.
Nach Satz 4.20 und Bsp. 4.37 a) ist auch die Menge $\{x_n : n = 1, \ldots, n_o - 1\}$ gleichgradig stetig. $\rightsquigarrow$ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichgradig stetig ($\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$).

($\Longleftarrow$) Es sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt. Dann folgt zunächst aus c):
$\exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \forall t, \tilde{t} \in T$ mit $d(t, \tilde{t}) < \delta$ gilt:

$$(\star) \qquad \|x_n(t) - x_n(\tilde{t})\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da T kompakt ist, existiert ein endliches δ–Netz $\{t_1, \ldots, t_r\}$ für T (Satz 2.39), d.h. $\min\limits_{i=1\ldots r} d(t, t_i) < \delta \ \forall t \in T$.
Aus a) folgt nun: $\exists n_i(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_i$

$$\|x_n(t_i) - x(t_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$n_o := \max\limits_{i=1\ldots r} n_i$ hat diese Eigenschaft $\forall n \geq n_o \forall i \in \{1, \ldots, r\}$
. Außerdem folgt aus a) und $(\star)$: $\|x(t) - x(\tilde{t})\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, falls $t, \tilde{t} \in T$, $d(t, \tilde{t}) < \delta$.
Es seien nun $n \geq n_o$ und $t \in T$ bel. gewählt.
$\rightsquigarrow \exists i \in \{1, \ldots, r\} : d(t, t_i) < \delta$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \|x(t) - x_n(t)\| &\leq \|x(t) - x(t_i)\| + \|x(t_i) - x_n(t_i)\| + \|x_n(t_i) - x_n(t)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \sup\limits_{t \in T} \|x(t) - x_n(t)\| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_o$.
$\rightsquigarrow$ Bedingung b) ist erfüllt. $\square$

In $C(T)$ läßt sich nun ein recht einfaches Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz einer punktweise konvergenten Folge von Funktionen beweisen.

Satz 4.39 *(Dini)*
Es sei (T, d) ein kompakter metrischer Raum.
(x_n) sei eine Folge in $C(T)$, die punktweise gegen $x \in C(T)$ konvergiert und für die $(x_n(t))$ monoton wachsend ist, für jedes $t \in T$. Dann ist (x_n) gleichmäßig konvergent gegen x.

Beweis:
Nach Voraussetzung gilt: $x_n(t) \leq x_{n+1}(t) \leq x(t), \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall t \in T$.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
$\rightsquigarrow \forall t \in T \exists n_o(\varepsilon, t) \in \mathbb{N}$: $0 \leq x(t) - x_n(t) < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 = n_o(\varepsilon, t)$.
Wir betrachten nun die Funktion $x - x_{n_o} \in C(T)$ für beliebig gewähltes $t \in T$. Da diese Funktion insbesondere in t stetig ist, existiert eine offene Umgebung $U(t)$ von t, so daß

$$(x - x_{n_o})(U(t)) < \varepsilon.$$

Wir erhalten, daß

$$T \subseteq \bigcup_{t \in T} U(t).$$

Nach Satz 2.43 existieren endlich viele $t_1, \ldots, t_r \in T$, so daß

$$T \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U(t_i).$$

Wir setzen $m_o := \max\{n_o(\varepsilon, t_1), \ldots, n_o(\varepsilon, t_r)\}$. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m_o$, und $t \in T$ sei beliebig gewählt.
$\rightsquigarrow \exists i \in \{1, \ldots, r\} : t \in U(t_i)$
$0 \leq x(t) - x_n(t) \leq x(t) - x_{m_o}(t) \leq x(t) - x_{n_o(\varepsilon, t_i)}(t) < \varepsilon$
$\rightsquigarrow \sup\limits_{t \in T} |x(t) - x_n(t)| \leq \varepsilon$, $\forall n \geq m_o$. $\square$

Als Anwendung der Ergebnisse dieses Kapitels betrachten wir schließlich noch sog. Funktionenreihen.
Es sei T eine nichtleere Menge, $x_n : T \to \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, und wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

die wie in Def. 3.18 als Folge der Partialsummen $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ $(n \in \mathbb{N})$ zu verstehen ist.

Definition 4.40
Die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ heißt

a) *punktweise konvergent, wenn die Folge $(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ konvergent ist für jedes $t \in T$ (d.h. wenn die Folge der Partialsummen punktweise konvergent ist);*

b) *gleichmäßig konvergent (gegen $x : T \to \mathbb{C}$), wenn*

$$\sup_{t \in T} |\sum_{k=1}^{n} x_k(t) - x(t)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

(d.h. wenn die Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen x konvergiert).

Satz 4.41
Es seien $x_n : T \to \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, Funktionen; es gelte $\sup\limits_{t\in T} |x_n(t)| \leq a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sei konvergent.
Dann ist die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ gleichmäßig konvergent.

Beweis:
Wir setzen $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, d.h. $s_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t)$, $\forall t \in T\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}, n > m$:

$$\sup_{t\in T} |s_n(t) - s_m(t)| \leq \sup_{t\in T} \sum_{k=m+1}^{n} |x_k(t)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \sup |x_k(t)| = \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Da die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist, folgt aus Satz 3.22 a), daß die Folge (s_n) in $B(T,\mathbb{C})$ eine Fundamentalfolge ist. Nach Satz 4.28 besitzt die Folge (s_n) einen Grenzwert in $B(T,\mathbb{C})$, d.h. sie konvergiert gegen diesen Grenzwert gleichmäßig. □

Folgerung 4.42
Eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ (mit Konvergenzradius $\rho > 0$, vgl. 3.43) ist in jeder kompakten Teilmenge der offenen Kreisscheibe $B_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho\}$ gleichmäßig konvergent.
Die Funktion $f : B_\rho \to \mathbb{C}$, $f(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$, $\forall z \in B_\rho$, ist stetig.

Beweis:
Es sei $k \subseteq B_\rho$ kompakt und $\rho_1 := \sup\limits_{z\in K} |z-a|$.
Nach Vor. gilt $\rho_1 < \rho$ und $(\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} = \rho \leadsto \exists n_o \in N$, so daß

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\rho} + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o,$$

wobei $\varepsilon > 0$ so gewählt ist, daß $\rho_1(\frac{1}{\rho} + \varepsilon) < 1$.
Dann gilt für bel. $z \in k$ und $n \geq n_o$:

$$\sup_{z\in K} |x_n(z)| = \sup_{z\in K} |a_n||z-a|^n| \leq (\frac{1}{\rho} + \varepsilon)^n \rho_1^n = [\rho_1(\frac{1}{\rho} + \varepsilon)]^n =: \tilde{a}_n.$$

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k$ ist aber konvergent (als geom. Reihe), und der erste Teil der Aussage folgt aus Satz 4.41.

Um die Stetigkeit von f in einem bel. Punkt $z_o \in B_\rho$ zu zeigen, wählen wir $r > 0$ so, daß $\bar{B}(z_o, r) \subseteq B_\rho$.
Aus dem ersten Teil des Beweises folgt mit $K := \bar{B}(z_o, r)$, daß die Folge der Partialsummen der Potenzreihe gleichmäßig in K gegen f konvergiert. Da alle Partialsummen als Polynome in z stetig sind, folgt deshalb die Stetigkeit von f in K, und damit speziell in z_o, aus Satz 4.35. $\Box$

Bemerkung 4.43
Folg. 4.42 liefert speziell einen neuen Beweis für die Stetigkeit der Exponentialfunktion (vgl. Bsp. 4.5 b)).
Sinngemäß gilt 4.42 auch für reelle Potenzreihen auf ihrem Konvergenz–Intervall!
Übung: *Man zeige, daß eine Potenzreihe i.a. nicht gleichmäßig auf B_ρ konvergiert*
(für $\rho \in]0, +\infty[$ und $\rho = +\infty$).

Wir kommen nun noch zu einer Schlußfolgerung aus Satz 4.39 für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen in $C(T)$.

Folgerung 4.44
Es sei (T, d) ein kompakter metrischer Raum.
Es gelte für $x_n \in C(T)$ $(n \in \mathbb{N})$, daß $x_n(t) \geq 0$, $\forall t \in T\ \forall n \in \mathbb{N}$, und daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ punktweise gegen eine Funktion aus $C(T)$ konvergiert.
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ gleichmäßig (gegen diese Funktion).

Beweis:
Für die Partialsummen s_n mit $s_n(t) := \sum_{k=1}^{n} x_k(t)$, $\forall t \in T$, gilt $s_n \in C(T)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Nach Vor. ist $(s_n(t))$ eine monoton wachsende Folge, $\forall t \in T$, und (s_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion aus $C(T)$. Deshalb ist die Aussage eine Konsequenz von Satz 4.39. $\Box$

Beispiele 4.45

a) *Dirichletsche Reihe:* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^t}$ $(t \in]1, +\infty[)$.
Die Funktionen $x_n(t) := n^{-t} = \exp(-t \ln(n))$, $\forall t \in]1, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sind stetig und nichtnegativ.
Nach Bsp. 3.25 ist die Dirichletsche Reihe punktweise konvergent für jedes $t \in]1, +\infty[$.
Die Anwendung von Folg. 4.44 auf einer bel. kompakten Teilmenge von $]1, +\infty[$ fällt aber schwer, da nicht ohne weiteres klar ist, ob die

Dirichletsche Reihe punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert! Betrachtet man aber z.B. die Menge $T_r := \{t \in \mathbb{R} : t \geq r > 1\}$, so gilt

$$n^{-t} \leq n^{-r}, \quad \forall t \in T_r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\rightsquigarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$, *$r > 1$ ist konvergent.*
so resultiert die gleichmäßige Konvergenz der Dirichletschen Reihe $\forall t \in T_r$ sofort aus Satz 4.41.
Also ist die Reihe auf T_r $(\forall r > 1)$ auch stetig!

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k \quad (t \in [0,1[)$

Es gilt $x_n(t) := t^n \geq 0$, $\forall t \in [0,1[\ \forall n \in \mathbb{N}$, und die Funktionenreihe konvergiert punktweise gegen

$$s(t) := \frac{1}{1-t}, \quad \forall t \in [0,1[\text{ (geometrische Reihe!)}.$$

Da s stetig ist, $\forall t \in [0,1[$, konvergiert die Funktionenreihe nach Satz 4.44 auf jedem Intervall $[0,r]$ $(r < 1)$ gleichmäßig!

4.3 Reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen

Wir betrachten in diesem Kapitel Funktionen $f : D(f) \to \mathbb{R}$ mit $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Natürlich sind sämtliche Ergebnisse aus den Kapiteln 4.1 und 4.2 anwendbar; jedoch kommen nun neue Aussagen hinzu, in denen die Besonderheiten von $\mathbb{R}$ (Körpereigenschaften, Ordnungsstruktur) ausgenutzt werden.

Z.B. kann man für $f : D(f) \to \mathbb{R}$ und $g : D(g) \to \mathbb{R}$ folgende Funktionen definieren:

$$\begin{aligned}
(\alpha f)(x) &:= \alpha f(x), \quad \forall x \in D(f), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\
(f+g)(x) &:= f(x) + g(x), \quad \forall x \in D(f) \cap D(g), \\
(fg)(x) &:= f(x)g(x), \quad \forall x \in D(f) \cap D(g), \\
\frac{1}{f}(x) &:= \frac{1}{f(x)}, \qquad \forall x \in D(f).
\end{aligned}$$

(Addition und Multiplikation von Funktionen mit einem Skalar sind analog natürlich auch für Funktionen mit Wertebereich im $\mathbb{R}^m$, und Multiplikation bzw. Division für solche mit Werten in $\mathbb{C}$ erklärt, was wir zum Teil auch schon benutzt haben. Dabei ist jeweils auch als Definitionsbereich ein metrischer Raum zugelassen.)

Satz 4.46
Es seien $f : D(f) \to \mathbb{R}$ und $g : D(g) \to \mathbb{R}$ stetig in $x_o \in D(f) \cap D(g)$. Dann sind

a) *$\alpha f + \beta g$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ und fg stetig in x_o, und*

b) *$\frac{1}{f}$ ist stetig in x_o, falls $f(x_o) \neq 0$.*

Beweis:
Mit Hilfe der Limes–Charakterisierung der Stetigkeit (Satz 4.3 c)) und den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 3.7). □

(Für die Linearkombination gilt 4.46 allgemeiner im Fall von Wertebereich:= $\mathbb{R}^m$. Der ganze Satz bleibt gültig, falls $D(f)$ bzw. $D(g)$ Teilmengen eines metrischen Raumes sind.)

Beispiel 4.47
Rationale Funktionen $r(x) := \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i x^i}{\sum\limits_{j=0}^{l} b_j x^j}$ $(a_i, b_j \in \mathbb{R}, i, j \in \mathbb{N}_o)$ sind definiert und stetig auf $D(r) := \{x \in \mathbb{R} : \sum\limits_{j=0}^{l} b_j x^j \neq 0\}$.

Bws.: *Polynome sind stetig $\rightsquigarrow$ $f = \sum\limits_{j=0}^{l} b_j x^j$ und $g = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i x^i$ sind stetig $\rightsquigarrow$ $h := \frac{1}{f}$ und $g \cdot h = r$ sind stetig.* □

Definition 4.48
Eine Funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, heißt (streng) monoton wachsend [fallend], wenn für alle $x_1, x_2 \in D(f)$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2))$$
$$[f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))].$$

Trifft eine von beiden Eigenschaften zu, so sagt man allgemeiner, daß f (streng) monoton ist.

Satz 4.49
Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) =: I$ sei ein Intervall.

a) *Ist f stetig und injektiv, so ist f streng monoton.*

b) *Ist f streng monoton, so ist f injektiv und $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton.*

Beweis:

a) Es seien $a, b \in I$ mit $a < b$ bel. gewählt. Da f injektiv ist, gilt $f(a) \neq f(b)$. Es gelte o.B.d.A. $f(a) < f(b)$. Da f stetig ist, existiert $c \in [a, b[$ mit $f(c) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

<u>*Annahme:*</u> $c \neq a$.
$\rightsquigarrow f(c) \leq f(a) < f(b)$ und nach dem Zwischenwertsatz (Satz 4.9):
$\rightsquigarrow [f(c), f(b)] \subseteq f([c, b])$
$\rightsquigarrow \exists \bar{x} \in [c, b] : f(\bar{x}) = f(a) \rightsquigarrow f$ ist nicht injektiv.
<u>Also:</u> $c = a$.
Wäre nun f nicht streng monoton wachsend auf $[a, b]$, so gäbe es $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) \geq f(x_2)$.
$\rightsquigarrow$ $f(a) \leq f(x_2) \leq f(x_1)$.
$\rightsquigarrow$ nach Satz 4.9 folgt analog zu oben: $\exists \tilde{x} \in [a, x_1] : f(\tilde{x}) = f(x_2)$.
$\rightsquigarrow$ Widerspruch zur Injektivität von f!
$\rightsquigarrow$ f ist streng monoton wachsend auf $[a, b]$ bei bel. gewählten $a, b \in I$, $a < b$.
$\rightsquigarrow$ f ist streng monoton.

b) O.B.d.A. sei f streng monoton wachsend. Dann gilt also für bel. $x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$.
$\rightsquigarrow f$ ist injektiv und f^{-1} ist streng monoton wachsend auf $f(I)$.
Wir zeigen noch: f^{-1} ist stetig auf $f(I)$.
Sei $\bar{y} \in f(I)$ bel. und $\bar{x} := f^{-1}(\bar{y}) \in I$.
Wir unterscheiden 2 Fälle:

(i) $\bar{x}$ ist kein Randpunkt von I.
$\rightsquigarrow \exists r > 0 : [\bar{x} - r, \bar{x} + r] \subseteq I$.
Sei $\varepsilon \in]0, r]$ beliebig gewählt.
$\rightsquigarrow \bar{x} - \varepsilon < \bar{x} < \bar{x} + \varepsilon$ und alle Zahlen gehören zu I.
$\rightsquigarrow f(\bar{x} - \varepsilon) < \bar{y} < f(\bar{x} + \varepsilon)$.
$\rightsquigarrow \exists \delta > 0 : B(\bar{y}, \delta) \subseteq]f(\bar{x} - \varepsilon), f(\bar{x} + \varepsilon)[$.
d.h. $f(\bar{x} - \varepsilon) < y < f(\bar{x} + \varepsilon)$, $\forall y \in B(\bar{y}, \delta)$.
$\rightsquigarrow$ $\bar{x} - \varepsilon < f^{-1}(y) < \bar{x} + \varepsilon$, $\forall y \in B(\bar{y}, \delta)$.
$\rightsquigarrow |f^{-1}(y) - \bar{x}| = |f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y})| < \varepsilon$, $\forall y : |y - \bar{y}| < \delta$.
Dies ist aber die Stetigkeit von f^{-1} in $\bar{y}$.

(ii) $\bar{x}$ ist (o.B.d.A. linker) Randpunkt von I.
$\rightsquigarrow \exists r > 0 : [\bar{x}, \bar{x} + r] \subseteq I$.
Sei $\varepsilon \in]0, r[$ wieder bel. gewählt.
$\rightsquigarrow \bar{y} < f(\bar{x} + \varepsilon)$, da f streng monoton wachsend.
$\rightsquigarrow \exists \delta > 0 : \forall y \in B(\bar{y}, \delta) \cap f(I)$ gilt: $f(\bar{x}) < y < f(\bar{x} + \varepsilon)$.
$\rightsquigarrow f(\bar{x}) < y < f(\bar{x} + \varepsilon)$, $\forall y \in B(\bar{y}, \delta) \cap f(I)$.
$\rightsquigarrow \bar{x} < f^{-1}(y) < \bar{x} + \varepsilon$.
d.h. $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y})| < \varepsilon$, $\forall y \in B(\bar{y}, \delta) \cap f(I)$. $\square$

Folgerung 4.50
Die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus sind auf $I\!R$ bzw. $]0, +\infty[$ streng monoton wachsend (und stetig).

<u>**Beweis:**</u>
Da exp auf $I\!R$ stetig und injektiv ist, ist exp nach 4.50 a) streng monoton. Wegen $\exp(0) = 1$ und $\exp(x) > 1$, $\forall x > 0$, muß exp streng monoton wachsend sein.
Aus 4.50 b) folgt dann dasselbe für ln. $\square$

Wir untersuchen im folgenden auch Funktionen, die nicht stetig sind, und werden die Art der "Unstetigkeit" klassifizieren. Dazu führen wir sog. "einseitige Grenzwerte" ein (vgl. auch Def. 4.23 für die Definition eines Grenzwertes).
Wir betrachten $f : D(f) \to I\!R$, $D(f) \subseteq I\!R$ und folgende Mengen bzw. Funktionen für fixiertes $a \in I\!R$:

$$D_l := D(f) \cap]-\infty, a[\quad , \quad D_r := D(f) \cap]a, +\infty[,$$
$$f_l := f|_{D_l} \quad , \quad f_r := f|_{D_r}.$$

Definition 4.51

a) *Sei $a \in D_l'$ (d.h. a sei Häufungspunkt von D_l). Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f_l(x) =: y_l$ existiert, so heißt y_l <u>linksseitiger Grenzwert</u> von f in a.*

b) *Sei $a \in D_r'$. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f_r(x) =: y_r$ existiert, so heißt y_r <u>rechtsseitiger Grenzwert</u> von f in a.*

<u>*Schreibweise:*</u> $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a-) := y_l$ *bzw.* $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a+) := y_r$.

Satz 4.52
Sei $f : D(f) \to I\!R$, $D(f) \subseteq I\!R$, und es gelte $a \in D_l' \cap D_r'$.

a) *Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und ist gleich y gdw. die beiden einseitigen Limites $f(a-)$ und $f(a+)$ existieren und gleich y sind.*

b) *f ist in $a \in D(f)$ stetig gdw. die einseitigen Grenzwerte $f(a-)$ und $f(a+)$ existieren und gleich $f(a)$ sind.*

<u>**Beweis:**</u>

a) Die Richtung ($\Longrightarrow$) ist klar nach Definition. Für die Umkehrung mögen nun die einseitigen Grenzwerte $f(a-)$ und $f(a+)$ existieren und gleich t sein.
Es sei nun (x_n) eine Folge in $D(f)$ mit $x_n \to a$ (o.B.d.A. gelte $x_n \neq a$,

$\forall n \in I\!N$; sonst Folge zerlegen). Dann kann die Folge zerlegt werden in zwei Teilfolgen
$(x_n^{(1)})$ mit $x_n^{(1)} < a$ und $(x_n^{(2)})$ mit $x_n^{(2)} > a$.
$\rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_l(x_n^{(1)}) = f(a-) = y = f(a+) = \lim\limits_{n\to\infty} f_r(x_n^{(2)})$.
$\rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(1)}) = y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(2)})$.
$\rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$, d.h. y ist der Grenzwert von f in a.

b) folgt aus a), der Definition des Grenzwertes und der Stetigkeit. □

Definition 4.53
Sei $f : D(f) \to I\!R$, $D(f) \subseteq I\!R$ und $a \in I\!R$.

a) *f heißt linksseitig (rechtsseitig) stetig in $a \in D(f)$, falls*

$$f(a) = f(a-) \quad (f(a) = f(a+)).$$

b) *Man sagt, f besitzt in $a \in D_l' \cap D_r'$ eine Sprungstelle (Unstetigkeitsstelle erster Art), falls die einseitigen Grenzwerte $f(a-)$ und $f(a+)$ existieren und verschieden sind.*
In diesem Fall heißt $\sigma := f(a+) - f(a-)$ Sprung von f in a.
Man sagt, f besitzt in $a \in D_l' \cap D_r'$ eine Unstetigkeitsstelle zweiter Art, falls wenigstens einer der beiden einseitigen Grenzwerte nicht existiert.
Man sagt, f besetzt in $a \in D(f)$ eine hebbare Unstetigkeit, falls f in a nicht stetig stetig ist und $\lim\limits_{x\to a}$ existiert.

Beispiele 4.54

a) $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.
$x = 0$ ist Unstetigkeitsstelle erster Art von f mit $f(0+) = 1$ und $f(0-) = -1$, d.h. Sprung $\sigma = 2$ von f in $x = 0$.
f ist rechtsseitig stetig in $x = 0$.

b) *Die Dirichlet–Funktion (vgl. 4.5 a) (iii)) hat in jedem Punkt in $I\!R$ eine Unstetigkeitsstelle zweiter Art (gegen jeden Punkt aus $I\!R$ konvergieren Folgen aus nur rationalen bzw. nur irrationalen Zahlen)!*

c) *Für die Funktion $f :]0, +\infty[\to I\!R$, $f(x) := \sin \frac{1}{x}$, $\forall x \in]0, +\infty[$, existiert der Grenzwert $f(0+)$ nicht!*
<u>Bew.:</u> *Wir betrachten die Folge (x_n), $x_n := \frac{1}{\pi(n+\frac{1}{2})}$, $\forall n \in I\!N$.*
Es gilt: $x_n > 0$, $\forall n \in I\!N$, $x_n \to 0$ und
$\sin \frac{1}{x_n} = \sin(\pi n + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$, $\forall n \in I\!N$.
D.h. die Folge $(\sin \frac{1}{x_n})$ besitzt keinen Grenzwert! □

Satz 4.55
Eine monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt in jedem Punkt alle (sinnvollen) einseitigen Grenzwerte. Es gilt z.B. für wachsendes f

$$\begin{aligned} f(x-) &= \sup\{f(y) : y \in [a,x[\} \quad (\forall x \in]a,b]), \\ f(x+) &= \inf\{f(y) : y \in]x,b]\} \quad (\forall x \in [a,b[), \end{aligned}$$

$f(a) \leq f(a+)$, $f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$, $\forall x \in]a,b[$, $f(b-) \leq f(b)$.
f besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen (erster Art).

Beweis:
Für den ersten Teil der Aussagen beschränken wir uns o.B.d.A. auf den Fall: f ist monoton wachsend. Es genügt ferner, den Fall linksseitiger Grenzwerte zu betrachten.
Es sei also $x \in]a,b]$ und $z := \sup\{f(y) : y \in [a,x[\} \leq f(x)$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
$\rightsquigarrow \exists x_o \in]a,b[: z - \varepsilon < f(x_o) \leq z$.
$\rightsquigarrow \forall y \in]x_o, x[: z - \varepsilon < f(x_o) \leq f(y) \leq z$.
$\rightsquigarrow |f(y) - z| \leq \varepsilon$, $\forall y : 0 < x - y < \delta := |x - x_o|$.
$\rightsquigarrow \exists f(x-) = z$ (ε–δ–Schreibweise für linksseitigen Grenzwert).
Analog argumentiert man für $x \in [a,b[$ und $z := \inf\{f(y) : y \in]x,b]\}$. Die nachfolgenden Ungleichungen sind dann ebenfalls klar!
Wir zeigen noch den letzten Teil der Aussage.
Sei U die Menge der Unstetigkeitspunkte von f in $]a,b[$, d.h.

$$U := \{x \in]a,b[: f(x-) < f(x+)\}.$$

Ferner sei $U_\varepsilon := \{x \in]a,b[: \sigma(x) := f(x+) - f(x-) \geq \varepsilon\}$, $\forall \varepsilon > 0$.
Da generell gilt, daß

$$\sigma(x) \leq f(b) - f(a), \quad \forall x \in]a,b[,$$

ist für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge U_ε endlich.
$\rightsquigarrow U = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$ ist höchstens abzählbar (Satz 1.28). □

Satz 4.55 berechtigt uns zu folgender Definition:

Definition 4.56
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so heißt die Funktion $s(f;\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$, $s(f;a) := 0$, und

$$s(f;x) := [f(a+) - f(a)] + \sum_{\substack{y \in U \\ y < x}} [f(y+) - f(y-)] + [f(x) - f(x-)] \ (x \in]a,b]).$$

<u>Sprungfunktion von f</u>. Hierbei ist U die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f in $]a,b[$.

Satz 4.57
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monoton wachsend und* $s(f;\cdot)$ *die Sprungfunktion von* f. *Dann ist die Funktion* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := f(x) - s(f;x), \quad \forall x \in [a,b],$$

monoton wachsend und stetig.

<u>**Beweis:**</u>
Seien $x, \tilde{x} \in [a,b]$ mit $x < \tilde{x}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s(f;\tilde{x}) - s(f;x) &= [f(x+) - f(x)] + \sum_{\substack{y \in U \\ x<y<\tilde{x}}} [f(y+) - f(y-)] + [f(\tilde{x}) - f(\tilde{x}-)] \\ &\leq f(\tilde{x}) - f(x), \quad \text{da } f \text{ monoton wachsend ist.} \end{aligned}$$

$\leadsto g(x) \leq g(\tilde{x})$, d.h. g ist monoton wachsend.
Wir zeigen noch: g ist stetig.
Aus der obigen Ungleichung und der Definition von $s(f;\cdot)$ folgt für beliebiges $x \in [a,b[$ und eine bel. Folge (x_n) mit $x_n > x$ und $x_n \to x$:
$g(x_n) - g(x) = f(x_n) - f(x) - (s(f;x_n) - s(f,x))$
ferner gilt $s(f;x_n) - s(f,x) \leq f(x_n) - f(x)$ (siehe eben), und $s(f;x_n) - s(f;x) \geq f(x+) - f(x)$, es gilt also:

$$f(x+) - f(x) \leq s(f;x_n) - s(f;x) \leq f(x_n) - f(x), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Durch Grenzübergang $n \to \infty$ erhält man daraus:

$$f(x+) - f(x) \leq s(f;x+) - s(f;x) \leq f(x+) - f(x).$$

$\leadsto s(f,x+) - s(f,x) = f(x+) - f(x)$
$\leadsto g(x-n) - g(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x+) - g(x) = 0$, d.h. g ist rechtsseitig stetig.
Ganz analog zeigt man schließlich für bel. $x \in]a,b] : g(x-) = g(x)$. $\square$

Definition 4.58
Sei $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A'$.

a) *Man sagt,* f *hat in* a *den <u>uneigentlichen Grenzwert</u>* $+\infty$ *(bzw.* $-\infty$*), falls für jede Folge* (x_n) *in* A *mit* $x_n \to a$ *die Folge* $(f(x_n))$ *bestimmt gegen* $+\infty$ *(bzw.* $-\infty$*) divergiert (vgl. 3.8).*
<u>Schreibweise:</u> $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$

b) *Analog wird definiert:* $\lim\limits_{x\to a\pm} f(x) = \pm\infty$ *(einseitige uneigentliche Grenzwerte)*

c) a *heißt <u>Unendlichkeitsstelle</u> von* f*, falls* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$.

Definition 4.59
Sei $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

a) *Sei* A *nach rechts unbeschränkt. Man sagt,* f *besitzt den (uneigentlichen) Grenzwert* $y \in \mathbb{R}$ *(*$y = +\infty$ *bzw.* $y = -\infty$*) für* $x \to +\infty$*, falls für jede Folge* (x_n) *in* $\mathbb{R}$ *mit* $x_n \to +\infty$ *die Folge* $(f(x_n))$ *gegen* y *konvergiert (bzw. bestimmt divergiert).*

b) *Ist* A *nach links unbeschränkt, so definiert man analog alles für* $x \to -\infty$.

<u>*Schreibweise:*</u> $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y$.

Beispiele 4.60

a) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty \quad (\forall \alpha > 0)$ *(vgl. Bsp. 3.11 b))*
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, *d.h.* $a = 0$ *ist Unendlichkeitsstelle von* $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0 \quad (\forall \alpha > 0)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{3x+4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{3-\frac{4}{x}} = \frac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty$ *(wegen* $\exp(x) \geq 1 + x, \forall x \geq 0$*)*
$\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$ *(wegen* $\exp(-x) \leq (1+x)^{-1}, \forall x \geq 0$*)*

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-k} \exp(x) = +\infty$ *(wegen* $\exp(x) \geq 1 + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, $\forall x \geq 0$*)*
$\lim\limits_{x\to -\infty} x^k \exp(x) = 0$ *(aus dem ersten Teil von f)).*
($\forall k \in \mathbb{N}$*)*

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ *(da* $\ln$ *streng monoton wachsend und wegen* $\ln(\exp x) = x$ *nicht beschränkt)*
$\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$ *(wegen* $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$*)*

5 Differentialrechnung

In diesem Kapitel entwickeln wir die Grundlagen der "Differentialrechnung" für Funktionen, deren Definitions– und Wertebereiche Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^m$ sind. Zentraler Begriff ist der der Ableitung einer Funktion, die wesentlich das lokale Änderungsverhalten derselben beschreibt. Mit solchen Veränderungsphänomenen haben wir uns auch bereits im letzten Kapitel beschäftigt: Stetigkeit, Monotonie.(Jetzt kommen wir zu einer neuen Qualität, indem wir das Änderungsverhalten einer Funktion f mit dem der Funktion $g(x) := x$ $(x \in \mathbb{R}^m)$ lokal vergleichen.)
Wir beginnen mit dem Fall $m = 1$, d.h. mit reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen, und setzen mit dem mehrdimensionalen Fall fort (vgl. Kap. 5.2).

5.1 Differentialrechnung reeller Funktionen einer reellen Veränderlichen

Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ und $x_o \in \operatorname{int}(D(f))$.
Dann heißt die Funktion $\varphi : \{h \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : x_o + h \in D(f)\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi(h) := \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}, \quad \forall h \in D(\varphi),$$

<u>Differenzenquotient</u> von f in x_o.

Definition 5.1
Falls der Grenzwert von φ in $h = 0$ existiert, d.h.

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} =: f'(x_o) =: \frac{df}{dx}(x_o),$$

so heißt $f'(x_o)$ die <u>Ableitung</u> (oder: der Differentialquotient) von f in x_o. Man sagt dann, daß f <u>differenzierbar</u> in x_o ist.
Ist $D(f)$ offen, so heißt f differenzierbar, falls f in jedem $x_o \in D(f)$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f' : D(f) \to \mathbb{R}$, wobei $f'(x_o)$ für jedes $x_o \in D(f)$ wie oben definiert ist, die Ableitung von f.

Bemerkung 5.2
Da nach Voraussetzung gilt, daß $x_o \in \operatorname{int}\,(D(f))$, existiert $\varepsilon > 0$, so daß $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subseteq D(f) \rightsquigarrow [-\varepsilon, \varepsilon]\backslash\{0\} \subseteq D(\varphi)$. Also ist 0 Häufungspunkt von $D(\varphi)$ und der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h)$ ist definiert gemäß Def. 4.22.
Folglich ist also f differenzierbar in x_o mit Ableitung $f'(x_o)$, falls für jede Folge (h_n) mit $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$ und $x_o + h_n \in D(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_o + h_n) - f(x_o)}{h_n} = f'(x_o).$$

Diese Definition geht auf Cauchy (1821) zurück. Der Differentialkalkül war jedoch bereits von Newton und Leibniz entwickelt worden, allerdings nicht auf exakter Grundlage, da ohne Limesbegriff. Ist $D(f)$ ein Intervall und x_o ein Randpunkt von $D(f)$, so gilt $D(\varphi) \subseteq]0, +\infty[$ bzw. $D(\varphi) \subseteq]-\infty, 0[$, und es lassen sich einseitige Ableitungen von f in x_o als einseitige Grenzwerte von φ in $h = 0$, d.h.,

$$\lim_{h\to 0-} \varphi(h) = f'(x_o-), \quad \lim_{h\to 0+} \varphi(h) = f'(x_o+),$$

im Sinne von Def. 4.51 definieren.
Ist $D(f)$ ein abgeschlossenes Intervall, so werden wir f differenzierbar auf $D(f)$ nennen, falls f in allen inneren Punkten differenzierbar ist und in den Randpunkten die einseitigen Ableitungen existieren. Natürlich lassen sich einseitige Ableitungen auch in inneren Punkten von $D(f)$ definieren.

Bemerkung 5.3
Geometrische und analytische Interpretation der Ableitung: Zu gegebenem $f: D(f) \to \mathbb{R}$ und $x_o \in \operatorname{int}(D(f)) \subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir die beiden folgenden Funktionen:
$S(x) := f(x_o) + \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}(x - x_o)$,
$T(x) := f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ *(falls $f'(x_o)$ existiert).*
S ist die "Sekante" und T die "Tangente" an
f (in x_o und $x_o + h$ bzw. in x_o), d.h.
$f'(x_o)$ ist der Anstieg der Tangente, $\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ der der Sekante.

Analytisch bedeutet die Differenzierbarkeit von f:

$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \omega(f, x - x_o)$ *("Restglied")*

d.h. die Funktion f läßt sich lokal durch eine lineare Funktion approximieren (die "Tangente"),d.h. $\exists a \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_o) + a(x - x_o) + \omega(f; x - x_o), \quad \forall x \in D(f)$$

wobei $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{\omega(f;x-x_o)}{x-x_o} = 0$.
Diese Formulierung der Definition der Differenzierbarkeit ist verallgemeinerbar auf den mehrdimensionalen Fall! (Kap. 5.2)

Bemerkung 5.4
Die Definition der Ableitung in 5.1 kann natürlich auf Funktionen $f: D(f) \to \mathbb{R}^m$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, verallgemeinert werden, indem der Grenzwert in $\mathbb{R}^m$ (was gleichbedeutend ist mit "komponentenweise", vgl. Kap. 3.2) gebildet wird, d.h. $f'(x_o) \in \mathbb{R}^m$.
Eine direkte Verallgemeinerung auf den Fall $D(f) \subseteq \mathbb{R}^k$, $k > 1$, ist wegen der nicht erklärten Division aber unmöglich (Ausnahme $D(f) \subseteq \mathbb{C}$, siehe später in Kap. 8)! Jedoch zeigt sich, daß die "Linearisierungs"–Idee aus Bem. 5.3 zur Definition einer Ableitung in diesem Fall geeignet ist (vgl. Kap. 5.2, 5.3).

Satz 5.5
Es seien $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, f sei in x_o differenzierbar.

a) *Dann ist f in x_o stetig.*

b) *Sei weiterhin $g : D(g) \to \mathbb{R}$, $D(g) \subseteq \mathbb{R}$, $x_o \in \operatorname{int}(D(f) \cap D(g))$ und g in x_o differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen (von $D(f) \cap D(g)$ in $\mathbb{R}$) $\alpha f + \beta g$, fg und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_o) \neq 0$) in x_o differenzierbar, und es gelten die Regeln:*

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)'(x_o) &= \alpha f'(x_o) + \beta g'(x_o) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),\\
(fg)'(x_o) &= f(x_o)g'(x_o) + f'(x_o)g(x_o) \quad (\text{"Produktregel"}),\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) &= \frac{f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o))^2} \quad (\text{"Quotientenregel"}).
\end{aligned}$$

__**Beweis:**__

a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gilt nach Voraussetzung:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} |f(x_o + h) - f(x_o)| = |f'(x_o)|,$$

$\rightsquigarrow \exists \delta_o > 0 : \frac{1}{|h|}|f(x_o + h) - f(x_o)| \leq |f'(x_o)| + 1$, falls $|h| < \delta_o$,
$\rightsquigarrow |f(x_o + h) - f(x_o)| \leq (|f'(x_o)| + 1)|h|$, falls $|h| < \delta_o$,
Wir wählen $0 < \delta \leq \delta_o$ so, daß aus $|h| < \delta$ folgt:
$(|f'(x_o)| + 1)|h| < \varepsilon$
$\rightsquigarrow \forall x \in D(f)$ mit $|x - x_o| < \delta$ ist $|f(x) - f(x_o)| \leq (|f'(x_o)| + 1)|h| < \varepsilon$
$\rightsquigarrow f$ ist stetig in x_o (Satz 4.3!).

b) Mit $h \neq 0$, so daß $x_o + h \in D(f) \cap D(g)$, erhält man aus den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 3.7):

$$\frac{\alpha f(x_o + h) + \beta g(x_o + h) - \alpha f(x_o) - \beta g(x_o)}{h} =$$

$$= \alpha \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} + \beta \frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \alpha f'(x_o) + \beta g'(x_o),$$

$$\frac{f(x_o + h)g(x_o + h) - f(x_o)g(x_o)}{h} =$$

$$= f(x_o + h)\frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h} + g(x_o)\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

$$\underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x_o)g'(x_o) + g(x_o)f'(x_o) \quad (\text{nach Vor. bzw. aus b)}).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f(x_o+h)}{g(x_o+h)}-\frac{f(x_o)}{g(x_o)}}{h} &= \frac{1}{h}\frac{f(x_o+h)g(x_o)-f(x_o)g(x_o+h)}{g(x_o+h)g(x_o)} \\
&= \frac{1}{h}\frac{(f(x_o+h)-f(x_o))g(x_o)-f(x_o)(g(x_o+h)-g(x_o))}{g(x_o+h)g(x_o)} \\
&= \frac{\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}g(x_o)-\frac{g(x_o+h)-g(x_o)}{h}f(x_o)}{g(x_o+h)g(x_o)} \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{g(x_o)f'(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o))^2}
\end{aligned}$$

(nach Vor. bzw. aus a), wobei noch angemerkt werden muß, daß wegen $g(x_o) \neq 0$ und der Stetigkeit von g in x_o, auch $g(x_o+h) \neq 0$ für hinreichend kleines $|h|$ gilt). □

Satz 5.6 *(Ableitung der inversen Funktion)*
Sei $f : D(f) \to I\!R$ injektiv, stetig und in $x_o \in \operatorname{int}(D(f))$ differenzierbar. Dann ist die inverse Funktion $f^{-1} : R(f) \to I\!R$ in $y_o = f(x_o)$ differenzierbar, wenn $f'(x_o) \neq 0$ ist, und es gilt

$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}.$$

Beweis:
Nach Satz 4.49 ist f auf $[x_o-\varepsilon, x_o+\varepsilon] \subseteq D(f)$ ($\varepsilon > 0$ geeignet gewählt) streng monoton (o.B.d.A. wachsend) und f^{-1} auf $f([x_o-\varepsilon, x_o+\varepsilon])$ stetig. Es gilt also:

$$y_o \in]f(x_o-\varepsilon), f(x_o+\varepsilon)[\subseteq R(f),$$

d.h. y_o ist innerer Punkt von $R(f)$. Es sei nun (y_n) eine Folge in $R(f)$ mit $y_n \neq y_o$, $y_n \to y_o$.
$\rightsquigarrow$ $x_n := f^{-1}(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(y_o) = x_o$ und $x_n \neq x_o$.

$$\rightsquigarrow \frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_o)}{y_n-y_o} = \frac{x_n-x_o}{f(x_n)-f(x_o)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_o)}{x_n-x_o}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_o)}$$

$\rightsquigarrow$ f^{-1} ist in y_o differenzierbar, und die angegebene Formel gilt. □

Beispiele 5.7

a) *$f(x) := x^k$, $\forall x \in I\!R$ ($k \in I\!N$). Dann gilt für $x_o \in I\!R$, $h \neq 0$ bel.:*

$$\begin{aligned}
\frac{(x_o+h)^k - x_o^k}{h} &= \frac{1}{h}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x_o^{k-i}h^i - x_o^k\right) = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}x_o^{k-i}h^{i-1} \qquad (1.11!) \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \binom{k}{1}x_o^{k-1} = k\, x_o^{k-1}
\end{aligned}$$

Also ist f differenzierbar in x_o mit $f'(x_o) = kx_o^{k-1}$.
Als Konsequenz aus Satz 5.5 b) sind alle Polynome auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.
Aus demselben Resultat folgt für $g(x) := x^{-k}$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $(k \in \mathbb{N})$:

$$g'(x_o) = (\frac{1}{f})'(x_o) = -\frac{f'(x_o)}{(f(x_o))^2} = -k\frac{x_o^{k-1}}{x_o^{2k}} = -kx_o^{-k-1}.$$

Als Konsequenz aus Satz 5.5 a) sind alle rationalen Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches (vgl. Bsp. 4.47) differenzierbar.

b) $f(x) := \exp(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Seien* $x_o \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ *bel.*

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \frac{1}{h}(\exp(x_o+h) - \exp(x_o)) &= \exp(x_o)\left[\frac{1}{h}(\exp(h)-1)\right] \qquad (3.47!) \\ &= \exp(x_o)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!}\right) \end{aligned}$$

und $\lim\limits_{h\to 0}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!} = 1$ *(analog zu Bsp. 4.5 b)!).*
$\rightsquigarrow f'(x_o) = \exp(x_o)$.
Als Konsequenz aus Satz 5.6 ergibt sich, da $\exp$ *injektiv, stetig und differenzierbar ist (vgl. 3.47, 4.5):*

$$(f^{-1})'(y_o) = \ln'(y_o) = \frac{1}{\exp(\ln(y_o))} = \frac{1}{y_o}, \quad \forall y_o > 0,$$

d.h. $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *ist ebenfalls differenzierbar.*
$g(x) := \exp(ix)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Seien* $x_o \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ *bel.*
Analog zu oben erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(g(x_o+h) - g(x_o)) &= g(x_o)\left[\frac{1}{h}\exp(ih) - 1\right] \\ &= g(x_o)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k h^{k-1}}{k!}\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} g(x_o)\cdot i. \end{aligned}$$

Also gilt: $g'(x_o) = i\exp(ix_o)$.

Da gilt: $g(x) = \cos x + i\sin x$ *erhalten wir daraus:*

$$\begin{aligned} (\cos)'(x_o) &= \frac{d}{dx}(\mathrm{Re}(\exp(i\cdot)))(x_o) = \mathrm{Re}(i\exp(ix_o)) \\ &= \mathrm{Re}(i(\cos x_o + i\sin x_o)) = -\sin x_o \end{aligned}$$

und analog $(\sin)'(x_o) = \cos x_o$.

c) *$f(x) := |x|$, $\forall x \in I\!R$.*
f ist nicht differenzierbar in $x_o = 0$, da gilt:

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = 1, \quad \frac{f(-\frac{1}{n}) - f(0)}{-\frac{1}{n} - 0} = -1, \quad \forall n \in I\!N.$$

Es gilt: $f'(0+) = 1$, $f'(0-) = -1$ (Die einseitigen Ableitungen existieren also).

d) *Wir konstruieren eine Funktion $f : I\!R \to I\!R$, die stetig, aber nirgends differenzierbar ist.*
Dazu betrachten wir zunächst die folgende "Sägezahn"–Funktion:

$$g : I\!R \to I\!R \quad , \quad g(x) := |x|, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \text{und}$$
$$g(x+1) = g(x), \forall x \in I\!R.$$

g ist nach c) nicht differenzierbar in den Stellen $\frac{j}{2}$, $\forall j \in Z\!\!Z$, aber stetig.
"Verdichtete" Sägezahn–Funktionen:

$$g_k : I\!R \to I\!R, \quad g_k(x) := \frac{1}{2^k} g(2^k x), \quad \forall x \in I\!R, \; \forall k \in I\!N_o.$$

g_k ist stetig und nicht differenzierbar an den Stellen $\frac{j}{2^{k+1}}$, $\forall j \in Z\!\!Z$.
Wir definieren nun $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k(x)$, $\quad \forall x \in I\!R$.
Wegen $0 \leq g_k(x) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$, $\forall x \in I\!R \; \forall K \in I\!N$, ist die Funktionenreihe nach Satz 4.41 gleichmäßig konvergent. Da alle g_k $(k \in I\!N)$ stetig sind, ist also auch f stetig. (Satz 4.34 !).

Man kann nun zeigen, daß f in keinem $x_o \in I\!R$ differenzierbar ist (Übung; Barner/Flohr, Kap. 8.1, S. 263).

Satz 5.8
Es sei $f : D(f) \to I\!R$ in $x_o \in \operatorname{int}(D(f))$ differenzierbar, und f besitze in x_o ein lokales Extremum, d.h. es existiert eine Umgebung U von x_o, so daß

$$\forall x \in U \cap D(f) : f(x) \leq f(x_o) \text{ bzw. } f(x_o) \leq f(x).$$

Dann gilt $f'(x_o) = 0$.

Beweis:
Wir können U so klein wählen, daß $x_o \in U \subseteq D(f)$ und o.B.d.A.

$$f(x) \leq f(x_o), \quad \forall x \in U.$$

Deshalb gilt:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \quad \begin{array}{ll} \leq 0, & \text{falls} \quad x > x_o, \quad \text{und} \\ \geq 0, & \text{falls} \quad x < x_o. \end{array}$$

Da aber f in x_o differenzierbar ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o) \quad \text{und muß gleich 0 sein.} \qquad \square$$

Satz 5.9 *(Rolle)*
Es sei $f : [a,b] \to I\!R$ stetig, f sei auf $]a,b[$ differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$.
Dann existiert $\tilde{x} \in]a,b[$ mit $f'(\tilde{x}) = 0$.

Beweis:
Ist f eine konstante Funktion, so ist die Aussage trivial.
Es sei also f nicht konstant. Dann existiert ein $x_o \in]a,b[$ mit o.B.d.A. $f(x_o) > f(a)$. Nach Satz 4.13 existiert $\tilde{x} \in [a,b]$ mit $f(\tilde{x}) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.
$\leadsto f(\tilde{x}) \geq f(x_o) > f(a) = f(b) \leadsto \tilde{x} \in]a,b[$ und $f(x) \leq f(\tilde{x}), \quad \forall x \in [a,b]$
$\leadsto f'(\tilde{x}) = 0$ nach Satz 5.8. $\square$

Satz 5.10 *(Mittelwertsatz)*
Es sei $f : [a,b] \to I\!R$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\tilde{x} \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\tilde{x}).$$

Beweis:
Wir betrachten die Funktion $g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \forall x \in [a,b]$.
$\leadsto g$ ist stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf $]a,b[$ und es gilt

$$g(a) = f(a) = g(b).$$

$\leadsto$ aus dem Satz von Rolle folgt: $\exists \tilde{x} \in]a,b[: g'(\tilde{x}) = 0$.
Wegen $g'(\tilde{x}) = f'(\tilde{x}) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist damit alles gezeigt. $\square$

Folgerung 5.11
Es sei $I \subseteq I\!R$ ein Intervall, $f : I \to I\!R$ stetig und auf $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar.

a) *Gilt $L := \sup\limits_{x\in I} |f'(x)| < +\infty$, so ist f Lipschitzstetig mit Konstante L.*

b) *f ist [streng] monoton wachsend (fallend), wenn*
$$\forall x \in \overset{\circ}{I}: \quad f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0) \; [f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)].$$

Beweis:

a) Es seien $x, y \in I$, $x < y$ bel. gewählt. Dann sind die Vor. von Satz 5.10 auf $[x, y]$ erfüllt, und es existiert $\tilde{x} \in]x, y[$, so daß

$$f(y) - f(x) = f'(\tilde{x})(y - x),$$

$\rightsquigarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

b) Alles folgt wie in a) sofort aus der Gleichung

$$f(y) - f(x) = f'(\tilde{x})(y - x)$$

für bel. $x, y \in I$, $x < y$ ($\rightsquigarrow y - x > 0$)
z.B. $f'(\tilde{x}) \geq 0$, $\forall \tilde{x} \in \overset{\circ}{I} \rightsquigarrow f(y) - f(x) \geq 0$, d.h. $f(x) \leq f(y) \rightsquigarrow f$ ist monoton wachsend.
(die anderen Fälle betrachtet man analog.) □

Satz 5.12 *(verallgem. Mittelwertsatz)*
Seien $f, g : [a, b] \to I\!R$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert $\tilde{x} \in]a, b[$ mit

$$[f(b) - f(a)]g'(\tilde{x}) = [g(b) - g(a)]f'(\tilde{x}).$$

Gilt überdies $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$, so gilt auch:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})}.$$

Beweis:
Analog zum Beweis von Satz 5.10 wendet man Satz 5.9 an, jetzt aber auf die Funktion:

$$h(x) := [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Gilt: $h(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = h(b)$.
5.9 $\rightsquigarrow \exists \tilde{x} \in]a, b[$: $h(\tilde{x}) = 0 = [g(b) - g(a)]f'(\tilde{x}) - [f(b) - f(a)]g(\tilde{x})$
Ist noch $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$, so muß $g(a) \neq g(b)$ gelten (5.9!), und die letztere Aussage folgt durch Division. □

In Kap. 5.3 werden wir die Mittelwertsätze auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern und sehen, daß eine direkte Übertragung nicht möglich ist.

Satz 5.13 *(Regel von de l'Hospital)*
Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall $]a,b[$ mit $a,b \in I\!R \cup \{-\infty,+\infty\}$, $a<b$ und es gelte $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Ferner sei eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:
(V1) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0,$
(V2) $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = +\infty$ *bzw.* $= -\infty.$
Dann ist

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Limes auf der rechten Seite im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert.
Ein analoges Resultat gilt für den Fall $x \to b-$.

Beweis:

(i) Es sei zunächst $y := \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty,+\infty[$ und wir wählen $\tilde{y} > y$ beliebig. Ferner sei $y_1 \in I\!R$ so gewählt, daß $y < y_1 < \tilde{y}$.
Nach Voraussetzung existiert dann ein $x_1 \in]a,b[$, so daß

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < y_1, \quad \forall x \in]a,x_1[.$$

Aus Satz 5.12 schlußfolgern wir nun, daß für alle $x,u \in]a,x_1[, u<x$ ein $\tilde{x}$ zwischen x und u existiert, so daß

$$\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} = \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x}) < y_1 < \tilde{y}}$$

Im Fall (V1) folgt daraus durch Grenzübergang $u \to a+$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq y_1 < \tilde{y}, \quad \forall x \in]a,x_1[.$$

Im Fall (V2) gehen wir wie folgt vor: Zu fixiertem $u \in]a,x_1[$ existiert $x_2 \in]a,u[$, so daß für alle $x \in]a,x_2[$ gilt:

$$g(x) > \max\{0,g(u)\} \quad \text{bzw.} \quad g(x) < \min\{0,g(u)\},$$

$$\rightsquigarrow \frac{g(x)-g(u)}{g(x)} > 0, \quad \forall x \in]a,x_2[,$$

$$\rightsquigarrow \frac{f(x)-f(u)}{g(x)} < y_1 \frac{g(x)-g(u)}{g(x)}, \quad \forall x \in]a,x_2],$$

$$\rightsquigarrow \frac{f(x)}{g(x)} < y_1 - y_1\frac{g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)}, \quad \forall x \in]a, x_2].$$

Strebt nun $x \to a$, so konvergiert wegen (V2) die rechte Seite der Ungleichung gegen y_1. Wegen $y_1 < \tilde{y}$ existiert deshalb $x_3 \in]a, x_2[$, so daß

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \tilde{y}, \quad \forall x \in]a, x_3[.$$

Wir erhalten also insgesamt in beiden Fällen:
$\forall \tilde{y} \in I\!R$ mit $\tilde{y} = \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} > y \exists \bar{x} \in]a, b[$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \tilde{y}, \quad \forall x \in]a, \bar{x}[.$$

(ii) Es sei nun $y \in]-\infty, +\infty]$. Dann schlußfolgert man analog zu Teil (i) des Beweises, indem man jetzt alles nach unten abschätzt, daß zu jedem $\tilde{\tilde{y}} > y$ ein $\bar{\bar{x}} \in]a, b[$ existiert, so daß

$$\tilde{\tilde{y}} < \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in]a, \bar{x}[.$$

(iii) Man unterscheidet jetzt folgende Fälle:
1. Fall: $y = -\infty : \rightsquigarrow \forall \tilde{y} \in I\!R \exists \tilde{x} \in]a, b[: -\infty < \frac{f(x)}{g(x)} < \tilde{y}$
$\rightsquigarrow \exists \lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty = y$
2. Fall: $y = +\infty :$ analog $\exists \lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty = y$
3. Fall: y endlich: durch Kombination von i) und ii) folgt:
$\forall \tilde{y}, \tilde{\tilde{y}} \in I\!R, \tilde{y} < y < \tilde{\tilde{y}}\ \exists \tilde{x} \in]a, b[: \tilde{\tilde{y}} < \frac{f(x)}{g(x)} < \tilde{y}\, \forall x \in]a, \tilde{x}[$
$\rightsquigarrow \lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = y = \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$ □

Beispiele 5.14

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ *(Satz 5.13 mit $a = 0$, $b = +\infty$. bzw. $a = -\infty$, $b = 0$ und (V1); Anwendung von Satz 4.52)*

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^k} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{kx^{k-1}} = \ldots = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{k!} = +\infty$
(wiederholte Anwendung von Satz 5.13; vgl. auch 4.60 e)).

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ *(5.13 mit $a = 0$, $b = +\infty$),*
$\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0+} (-x) = 0.$

d) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} \exp(x\ln(x)) = \exp(\lim\limits_{x\to 0+} x\ln(x)) = 1$
(wegen der Stetigkeit von exp *und c)).*

Definition 5.15
Es sei $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : D(f) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Ableitung $g := f' : D(f) \to \mathbb{R}$.
Ist g in $x_o \in D(f)$ differenzierbar, so heißt $g'(x_o)$ die zweite Ableitung von f in x_o. Bezeichnung: $f''(x_o) := g'(x_o)$.
Induktiv definiert man $f^{(n)}(x_o) := (f^{(n-1)})'(x_o)$, die n–te Ableitung von f in x_o. Man sagt dann, daß f n–mal differenzierbar in x_o ist. Schreibweise: *$f^{(0)} := f$, $f^{(1)} = f'$ etc.*

Wir kommen nun zu einer Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes:

Satz 5.16 *(Taylor)*
Es sei $D(f)$ ein offenes Intervall, $f : D(f) \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$–mal differenzierbar für ein $n \in \mathbb{N}_o$.
Dann existiert für alle $x, x_o \in D(f)$ ein $\Theta \in]0,1[$, so daß

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_o + \Theta(x-x_o))}{(n+1)!}(x-x_o)^{(n+1)}.$$

Beweis:
Wir betrachten die beiden folgenden Funktionen $g, h : D(f) \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(x) &:= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k, \\ h(x) &:= (x-x_o)^{n+1}, \end{aligned} \qquad (\forall x \in D(f); x_o \in D(f) \text{ fest})$$

g und h sind $(n+1)$–mal differenzierbar (g nach Vor.!) und es gilt
$\forall x \in D(f)$, $j = 0, \ldots, n+1$:

$$\begin{aligned} g^{(j)}(x) &= f^{(j)}(x) - \sum_{k=j}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_o)}{(k-j)!}(x-x_o)^{k-j}, \\ h^{(j)}(x) &= (n+1)\cdots(n+2-j)(x-x_o)^{n+1-j}, \end{aligned}$$

Es sei nun $x \in D(f)$ ebenfalls fixiert, und wir betrachten das Intervall
$I := [\min\{x, x_o\}, \max\{x, x_o\}]$.
5.12 $\leadsto \exists \tilde{x}_1 \in \text{int}(I) : \frac{g(x)-g(x_o)}{h(x)-h(x_o)} = \frac{g'(\tilde{x})}{h'(\tilde{x})}$
Allgemein existiert nach Satz 5.12 für jedes $j = 1, \ldots, n+1$ ein $\tilde{x}_j \in I$, so daß

$$\frac{g^{(j+1)}(\tilde{x}_{j+1})}{h^{(j+1)}(\tilde{x}_{j+1})} = \frac{g^{(j)}(\tilde{x}_j) - g^{(j)}(x_o)}{h^{(j)}(\tilde{x}_j) - h^{(j)}(x_o)}, \ \forall j = 0, \ldots, n, \ \tilde{x}_o := x.$$

(Dies erfolgt sukzessive und ist möglich wegen $h^{(j)}(x) \neq 0$, $\forall x \neq x_o$ und $\forall j = 1, \ldots, n+1$!)
Insgesamt ergibt sich daraus wegen $g^{(j)}(x_o) = h^{(j)}(x_o) = 0$ für alle $j = 0, \ldots, n$:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(\tilde{x}_1)}{h'(\tilde{x}_1)} = \frac{g^{(n+1)}(\tilde{x}_{n+1})}{h^{(n+1)}(\tilde{x}_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x}_{n+1})}{(n+1)!}.$$

$$\rightsquigarrow g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x}_{n+1})}{(n+1)!}(x - x_o)^{n+1},$$

und es gilt $\frac{\tilde{x}_{n+1} - x_o}{x - x_o} =: \Theta \in]0, 1[$. Damit ist alles bewiesen. □

Bemerkung 5.17
Spezialfall von Satz 5.16 für $n = 0$ ist der Mittelwertsatz 5.10.
Das Polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x - x_o)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

heißt das <u>*n–te Taylor–Polynom*</u> *von f an der Stelle x_o, und der Term*

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) \quad (x \in D(f))$$

heißt <u>*Taylorsches Restglied*</u>.
Satz 5.16 besagt dazu folgendes: $\forall x \in D(f)$ existiert $\Theta \in]0, 1[$, so daß

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_o + \Theta(x - x_o))}{(n+1)!}(x - x_o)^{n+1}.$$

Dabei ist klar, daß Θ von x, x_o und n abhängt! (vgl. Beweis von 5.16)
Ist also $f^{(n+1)}$ auf einer Kugel $B(x_o, \delta)$ um x_o beschränkt (mit Konstante M_{n+1}), so gilt

$$|f(x) - T_n(x)| \leq M_{n+1} \frac{|x - x_o|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in B(x_o, \delta),$$

d.h. f kann für hinreichend kleines δ in $B(x_o, \delta)$ durch ein Polynom n–ten Grades approximiert werden! Diese Überlegung bauen wir nun weiter aus:

Definition 5.18
Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$ in $x_o \in \mathrm{int}\,(D(f))$ beliebig oft differenzierbar, d.h. es existiert $f^{(n)}(x_o)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_o)(x - x_o)^k$ heißt <u>*Taylorreihe*</u> *von f in x_o.*
Man sagt, f ist um x_o <u>*in eine Taylorreihe entwickelbar*</u>*, wenn ein $\rho > 0$ existiert, so daß $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_o)(x - x_o)^k, \quad \forall x \in B(x_o, \rho)$.*

Folgerung 5.19
Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a < b$, und $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ sei beliebig oft differenzierbar. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiere M_n, so daß

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in]a, b[.$$

Dann ist f um jedes $x_o \in]a, b[$ in eine Taylorreihe entwickelbar (in $B(x_o, \rho) \subset]a, b[$), wenn

$$\lim_{n\to\infty} M_n \frac{\rho^n}{n!} = 0.$$

Falls $M_n = \alpha C^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, mit geeigneten $\alpha > 0$ und $C > 0$, so ist die letztere Bedingung erfüllt.

Beweis:
Aus der Ungleichung in Bem. 5.17 erhalten wir für alle $x \in B(x_o, \rho)$:

$$|f(x) - T_n(x)| = |f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x - x_o)^k| \leq M_{n+1} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mit $M_n = \alpha C^n$ gilt $\alpha \frac{(C\rho)^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (vgl. Bsp. 3.11 f)). $\square$

Beispiele 5.20

a) *Taylorreihe von $f(x) := \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ um $x_o = 0$.*
Die Voraussetzungen von Folg. 5.19 sind erfüllt mit $M_n := 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a := -\infty$, $b := +\infty$ und es folgt für bel. $\rho > 0$, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sin)^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(da $\sin^{(2k)} = (-1)^k \sin$ und $\sin^{(2k+1)} = (-1)^k \cos$) Man erhält also gerade die Reihendarstellung aus Folg. 3.52.
(Analoges gilt für exp, cos, sinh, cosh.*)*

b) $\ln(1 + x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad \forall x \in] - 1, 1]$ *(Übung).*

c) *Taylorreihe von* $f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & , \ x \neq 0, \\ 0 & , \ x = 0, \end{cases}$ *um $x_o = 0$.*
f ist auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $\forall n \in \mathbb{N}$ hat $f^{(n)}(x)$ für $x \neq 0$ die Darstellung:

$$f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2}), \quad f^{(n)}(0) = 0,$$

wobei p_n ein geeignetes Polynom ist.
Man kann nun zeigen, daß die Taylorreihe von f in $x_o = 0$ auf $I\!R$ konvergent ist (alle Partialsummen sind $0 \; \forall x \in I\!R$), aber mit Ausnahme von $f(0)$ in $x = 0$ nicht mit $f(x)$ übereinstimmt (vgl. Übungen).

Bemerkung 5.21
Zur Untersuchung von Taylorreihen steht das Instrumentarium aus Kap. 3.4 bereit! Taylorreihen von Funktionen finden insbesondere Anwendung bei der näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten in Computern!

5.2 Fréchet–Ableitung und partielle Ableitungen

Vereinbarung:
Die Elemente von Euklidischen Räumen fassen wir im folgenden als Spalten auf, und eine Matrix mit m Zeilen und k Spalten nennen wir kurz (m,k)–Matrix (vgl. auch Kap. 4.1).

Definition 5.22
Sei $f : D(f) \to I\!R^m$, $D(f) \subseteq I\!R^k$ und $x_o \in \operatorname{int}(D(f))$.
f heißt differenzierbar (oder: Fréchet–differenzierbar) in x_o, wenn es eine (m,k)–Matrix A gibt, so daß

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|} \|f(x_o + h) - f(x_o) - Ah\| = 0.$$

$f'(x_o) := A$ heißt Ableitung (oder: Fréchet–Ableitung) von f in x_o;
$f'(x_o)h$ heißt Differential von f in x_o bez. $h \in I\!R^k$.
Ist $D(f)$ offen, so heißt f ist differenzierbar (auf $D(f)$), falls f in jedem $x_o \in D(f)$ diffenerenzierbar ist.

Bemerkung 5.23
Differenzierbarkeit von f in x_o bedeutet, daß für jedes $h \in I\!R^k$ mit $\|h\|$ "hinreichend klein" eine Darstellung der Form

$$f(x_o + h) = f(x_o) + Ah + r(x_o, h)$$

gültig ist, wobei

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|r(x_o, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Dies ist wie auch in Bem. 5.3 der Gedanke der "lokalen Linearisierung". Für $k = m = 1$ entsteht der Ableitungsbegriff aus Kap. 5.1!

Satz 5.24
Es sei $f : D(f) \to I\!R^m$, $D(f) \subseteq I\!R^k$, differenzierbar in $x_o \in \operatorname{int}(D(f))$.

a) *Die Fréchet–Ableitung von f in x_o ist eindeutig bestimmt.*

b) *f ist in x_o stetig.*

c) *Ist $g : D(g) \to I\!R^m$, $D(g) \subseteq I\!R^k$, ebenfalls differenzierbar in $x_o \in \operatorname{int}(D(f) \cap D(g))$, so gilt:*
$(\alpha f + \beta g)'(x_o) = \alpha f'(x_o) + \beta g'(x_o) \quad (\alpha, \beta \in I\!R)$.

<u>**Beweis:**</u>

a) Seien A_1 und A_2 Fréchet–Ableitungen von f in x_o.

$$\rightsquigarrow \lim_{\|h\| \to 0} \|f(x_o + h) - f(x_o) - A_i h\| = 0, \quad i = 1, 2$$

Dann gilt für beliebiges $x \in I\!R^k$ und $t \in I\!R$, so daß $x_o + tx \in D(f)$:

$$\begin{aligned}
\|A_1 x - A_2 x\| &= \|\frac{1}{t}(A_1(tx) - a_2(tx)\| = \frac{1}{|t|\|x\|}\|A_1(tx) - A_2(tx)\|\|x\| \\
&= \frac{1}{\|tx\|}\|A_1(tx) - A_2(tx)\|\|x\| \\
&= \frac{1}{\|tx\|}\|A_1(tx) - (f(x_o + tx) - f(x_o)) + \\
&\qquad (f(x_o + tx) - f(x_o)) - A_2(tx)\|\|x\| \\
&\leq \frac{1}{\|tx\|}\Big[\|A_1(tx) - (f(x_o + tx) - f(x_o))\| + \\
&\qquad \|(f(x_o + tx) - f(x_o)) - A_2(tx)\|]\|x\|]\Big] \\
&= \Big[\frac{1}{\|tx\|}\|f(x_o + tx) - f(x_o) - A_1(tx)\| + \\
&\qquad \frac{1}{\|tx\|}\|f(x_o + tx) - f(x_o) - A_2(tx)\|\Big] \|x\| \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow A_1 x = A_2 x$, $\forall x \in I\!R^k$.
$\rightsquigarrow$ beide (m, k)–Matrizen stimmen überein.

b) Für bel. $x \in D(f)$ mit $x \neq x_o$ gilt:
$\|f(x) - f(x_o)\| \leq \|f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x - x_o)\| + \|f'(x_o)(x - x_o)\|$.
Nach Vor. existiert $\delta > 0$, so daß

$$\frac{1}{\|x - x_o\|}\|f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x - x_o)\| \leq 1, \quad \forall x \in B(x_o, \delta).$$

$$\rightsquigarrow \|f(x) - f(x_o)\| \leq \|x - x_o\| + \|f'(x_o)(x - x_o)\| \quad , \forall x \in B(x_o, \delta).$$

$$\underset{x \to x_o}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(vgl. auch Kap. 4.1)}$$

c) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bel., $h \in \mathbb{R}^k : x_o + h \in D(f), h \neq 0$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{\|h\|}\|\alpha f(x_o+h)+\beta g(x_o+h)-\alpha f(x_o)-\beta g(x_o)-(\alpha f'(x_o)+\beta g'(x_o))h\|$$

$$\leq \ |\alpha| \underbrace{\frac{1}{\|h\|}\|f(x_o+h)-f(x_o)-f'(x_o)h\|}_{\underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0}$$

$$+ \ |\beta| \underbrace{\frac{1}{\|h\|}\|g(x_o+h)-g(x_o)-g'(x_o)h\|}_{\underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0}$$

$\rightsquigarrow \alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in x_o, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_o) = \alpha f'(x_o) + \beta g'(x_o). \qquad \square$$

Beispiele 5.25

a) *$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $f(x) := Ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}^k$; A (m,k)–Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$.*
$\rightsquigarrow f(x_o+h) - f(x_o) = A(x_o+h) - Ax_o = Ah + 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^k$.
$\rightsquigarrow$ *f ist differenzierbar in jedem $x_o \in \mathbb{R}^k$, und $f(x_o) = A$.*

b) *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) := x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$, $\forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.*

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow f(x+h) - f(x) &= (x_1+h_1)^2 + (x_2+h_2)^2 + (x_1+h_1)(x_2+h_2) \\ &\quad -x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 \\ &= 2x_1h_1 + h_1^2 + 2x_2h_2 + h_2^2 + x_1h_2 + x_2h_1 + h_1h_2 \\ &= (2x_1+x_2)h_1 + (2x_2+x_1)h_2 + (h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) \\ &= \underbrace{(2x_1+x_2, 2x_2+x_1)}_{=:A}\underbrace{\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}_{=h} + r(h),\end{aligned}$$

und es gilt:

$$\frac{|r(h)|}{\|h\|} = \frac{|h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2|}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}} \leq |h_1| + |h_1| + |h_2| \underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

$\rightsquigarrow$ *f ist differenzierbar und $f'(x) = (2x_1 + x_2, 2x_2 + x_1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.*

Definition 5.26
Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}^m$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}^k$, $x_o \in \operatorname{int}(D(f))$.

a) *Existiert der Grenzwert*

$$f'(x_o;h) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_o+th) - f(x_o)) \quad (\text{in } \mathrm{R^m}),$$

so heißt er *<u>Richtungsableitung</u>* *von f in x_o in Richtung $h \in \mathbb{R}^k$.*

b) *Es bezeichne e_j, $j = 1, \dots, k$, den j–ten kanonischen Einheitsvektor in $I\!R^k$ (vgl. Bem. 1.38).*
Existiert nun die Richtungsableitung von f in x_o in Richtung e_j, so heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) := f'(x_o; e_j) \in I\!R^m \quad (j = 1, \dots, k)$$

die partielle Ableitung von f nach x_j in $x_o \in I\!R^k$.

c) *Falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)$ $\quad (j = 1, \dots, k)$ von f in x_o existieren, so heißt die (m, k)–Matrix*

$$J_f(x_o) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_o), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_o) \right)$$

Jacobi–Matrix (oder: Funktionalmatrix) von f in x_o. Für $m = 1$ heißt $\nabla f(x_o) := J_f(x_o)$ Gradient von f in x_o.

Bemerkung 5.27
Im Unterschied zum Differential $f'(x_o)h$ in Def. 5.22 werden zur Definition der Richtungsableitung $f'(x_o; h)$ nur gegen x_o konvergierende Folgen auf der Geraden $\{x_o + th : t \in I\!R\}$ "zur Konkurrenz zugelassen".
Für $h := e_j$ bdeutet dies, daß nur gegen x_o konvergierende Folgen zugelassen werden, bei denen sich nur die j–te Komponente verändert. Alle anderen Komponenten bleiben fest!

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) &= \lim_{t \to 0}(f(x_o + te_j) - f(x_o)) \quad \left(x_o = \begin{pmatrix} x_{o1} \\ \vdots \\ x_{ok} \end{pmatrix} \in \text{int }(D(f))\right) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_{o1}, \dots, x_{oj} + t, \dots, x_{ok}) - f(x_{o1}, \dots, x_{oj}, \dots, x_{ok})).\end{aligned}$$

Deshalb also der Begriff "partielle Ableitung" von f nach der j–ten Komponente x_j!
Schreibt man die Funktion $f : D(f) \to I\!R^m$ in der Form
$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$, *$f_i : D(f) \to I\!R$, $(i = 1, \dots, m)$ sind also die Komponenten von f, so hat die Jacobi–Matrix von f in x die Form:*

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k})x) \end{pmatrix}.$$

Satz 5.28
Es sei $f : D(f) \to I\!R^m$, $D(f) \subseteq I\!R^k$, in $x_o \in \text{int}\,(D(f))$ differenzierbar. Dann existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)$, $j = 1, \ldots, k$, und es gilt

$$f'(x_o) = J_f(x_o).$$

Allgemeiner existieren auch alle Richtungsableitungen $f'(x_o; h)$, $\forall h \in I\!R^k$, und es gilt $f'(x_o)h = f'(x_o; h)$, $\forall h \in I\!R^k$.

Beweis:
Es sei $h \in I\!R^k$ bel. gewählt. Dann gilt:

$$\|\frac{1}{t}(f(x_o + th) - f(x_o)) - f'(x_o)h\| = \underbrace{\frac{1}{\|th\|}\|f(x_o + th) - f(x_o) - f'(x_o)(th)\|}_{\underset{t\to 0}{\to} 0}\|h\|$$

und $f'(x_o; h) = f'(x_o)h$.
Speziell existieren alle Richtungsableitungen $f'(x_o; e_j)$, $j = 1, \ldots, k$, und es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) = f'(x_o; e_j) = f'(x_o)e_j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Es sei nun $x \in I\!R^k$ bel. $\rightsquigarrow x = \sum_{j=1}^{k} x_j e_j$ (vgl. Bem. 1.38).

$$\rightsquigarrow f'(x_o)x = \sum_{j=1}^{k} x_j f'(x_o)e_j = \sum_{j=1}^{k} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) = J_f(x_o)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = J_f(x_o)x.$$

$\rightsquigarrow f'(x_o) = J_f(x_o)$. $\square$

Die Fréchet–Ableitung einer Funktion erweist sich also gerade als ihre Jacobi–Matrix. Diese Erkenntnis stellt gleichzeitig einen neuen Einzigkeitsbeweis für die Ableitung dar.

Beispiele 5.29

a) $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$, $\forall (x_1, x_2) \in I\!R^2$ *(vgl. Bsp. 5.25 b)).*

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((x_1 + t)^2 + x_2^2 + (x_1 + t)x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_1 x_2) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(2x_1 t + t^2 + x_2 t) = 2x_1 + x_2, \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= 2x_2 + x_1. \\
\rightsquigarrow J_f(x_1, x_2) &= (2x_1 + x_2, 2x_2 + x_1).
\end{aligned}$$

b) *Dieses Beispiel zeigt, daß aus der Existenz aller partiellen Ableitungen i.a. nicht die Existenz aller Richtungsableitungen folgt!*

$$f : I\!R^2 \to I\!R, \quad f(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 & , \text{ falls } x_2 = 0, \\ x_2 & , \text{ falls } x_1 = 0, \\ 1 & \text{ sonst.} \end{cases}$$

f besitzt in $(0,0)$ alle partiellen Ableitungen, denn:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0)) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1. \end{aligned}$$

<u>*Aber:*</u> *f ist nicht stetig in $(0,0)$, und es existiert auch nicht die Richtungsableitung von f in $(0,0)$ in Richtung $h := (1,1)$.*

<u>*Beweis:*</u> *$\frac{1}{t}(f(t,t) - f(0,0)) = \frac{1}{t}$, d.h. der zugehörige Limes existiert nicht! Ebenso sieht man, daß f nicht stetig in $(0,0)$ ist, da $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1 \not\to 0 = f(0,0)$.* $\square$

c) *Dieses Beispiel zeigt nun, daß selbst aus der Existenz aller Richtungsableitungen in einem Punkt nicht die Stetigkeit in diesem Punkt, also erst recht nicht die Fréchet–Differenzierbarkeit, folgt!*

$$f : I\!R^2 \to I\!R, \quad f(x_1, x_2) := \begin{cases} 0 & x_1 = x_2 = 0 \\ \frac{x_1^4 x_2^2}{x_1^8 + x_2^4} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es sei $h \in I\!R^2$, $h \neq (0,0)$, bel. gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(0 + th_1, 0 + th_2) - f(0,0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^6 h_1^4 h_2^2}{t^8 h_1^8 + t^4 h_2^4} \\ &= \lim_{t\to 0} t \frac{h_1^4 h_2^2}{t^4 h_1^8 + h_2^4} = 0, \quad \text{d.h. } \exists f'((0,0); h) = 0, \end{aligned}$$

also existieren alle Richtungsableitungen von f in $(0,0)$.
<u>*Aber:*</u> *f ist nicht stetig in $(0,0)$.*
<u>*Bew.:*</u> *Wir betrachten die Folge $((\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}))_{n\in I\!N}$. Es gilt: $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0)$.* $\square$
(Ursache: Bei Richtungsableitungen werden nur Folgen auf Geraden zugelassen; bei Stetigkeiten alle!)

<u>Problem:</u> Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung folgt nun aus der Existenz der partiellen Ableitungen die Differenzierbarkeit?

Definition 5.30
Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}^m$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}^k$, $x_o \in \operatorname{int}(D(f))$.
f heißt stetig differenzierbar in x_o, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so daß alle partiellen Ableitungen von f in jedem $x \in B(x_o, \delta) \subseteq D(f)$ existieren und in x_o stetig sind.

Bemerkung 5.31
Bezeichnet $\mathcal{M}_{m,k}$ die Menge aller (m,k)–Matrizen, so läßt $\mathcal{M}_{m,k}$ kanonisch mit einer linearen Struktur und einer Norm versehen:
Sei $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,k}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,k}$,

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

wobei die Normen auf der rechten Seite die entsprechenden Euklidischen Normen in $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^k$ sind.
Man kann nun zeigen, daß diese Norm auf $\mathcal{M}_{m,k}$ die üblichen Norm–Eigenschaften (vgl. Satz 1.40) besitzt, d.h. es gilt:

(i) $\|A\| \geq 0$ *und* $\|A\| = 0$ *gdw. A ist die Nullmatrix,*

(ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,k})$.

Insbesondere ist
$d(A,B) := \|A - B\|, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,k}$, eine Metrik auf $\mathcal{M}_{m,k}$.
Hat ferner $A \in \mathcal{M}_{m,k}$ die Elemente a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k$, so ist die folgende Ungleichung gültig:

$$(\star) \qquad \max_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,k}} |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \right)^{1/2} .$$

<u>**Beweis:**</u>

$$\max_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,k}} |a_{ij}| \leq \max_{j=1,\ldots,k} \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \max_{j=1,\ldots,k} \|Ae_j\| \leq \|A\| \text{ und}$$

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left(\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \right]^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \right] \left[\sum_{j=1}^k x_j^2 \right] \right)^{1/2} \quad \text{(Satz 1.39!)} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k \text{ mit } \|x\| = 1. \qquad \square \end{aligned}$$

Weiterhin ist die folgende Ungleichung nach Definition der Matrix–Norm gültig:

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|, \quad \forall x \in I\!R^k.$$

(Bew.: Für $x \in I\!R^k$, $x \neq 0$, bel. ist $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$ und deshalb

$$\|A(\frac{x}{\|x\|})\| \le \|A\|. \quad \Box)$$

Existieren nun wie in Def. 5.30 alle partiellen Ableitungen von f in $B(x_o, \delta)$, so ist die Abbildung $J_f : B(x_o, \delta) \to \mathcal{M}_{m,k}$ wohldefiniert. Betrachtet man nun die obige Metrik d auf $\mathcal{M}_{m,k}$, so ist wegen ($\star$) die Stetigkeit aller partiellen Ableitungen von f im Punkt x_o äquivalent mit der Bedingung: J_f ist stetig in x_o.
Also bedeutet die <u>stetige Differenzierbarkeit</u> von f in x_o <u>äquivalent:</u> in einer Kugel um x_o existiert die Jacobi–Matrix von f und ist stetig in x_o!

Satz 5.32
Sei $f : D(f) \to I\!R^m$, $D(f) \subseteq I\!R^k$, in $x_o \in \operatorname{int}(D(f))$ stetig differenzierbar. Dann ist f in x_o Fréchet–differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x_o) = J_f(x_o).$$

<u>**Beweis:**</u>
Es genügt, die Fréchet–Differenzierbarkeit von f in x_o zu beweisen. Der Rest folgt aus Satz 5.28. Nach Def. 5.22 genügt es, den Fall $m = 1$ zu betrachten (sonst argumentiert man komponentenweise). Wir führen den Beweis außerdem nur für $n = 2$, da er für $n > 2$ bis auf mehr Schreibarbeit völlig analog verläuft.
Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach Def. 5.22 genügt es nun zu zeigen, daß ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß

$$\frac{|f(x) - f(x_o) - J_f(x_o)(x - x_o)|}{\|x - x_o\|} < \varepsilon, \quad \forall x \in B(x_o, \delta).$$

(Hierbei ist $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm im $I\!R^2$.)
Nach Voraussetzung existiert zunächst ein $\delta > 0$, so daß $B(x_o, \delta) \subseteq D(f)$, in $B(x_o, \delta)$ die partiellen Ableitungen von f existieren und daß

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in B(x_o, \delta),\ \forall j = 1, 2.$$

Es sei nun $x_o = (x_{o1}, x_{o2})$, und wir betrachten die Funktion
$f(\cdot, x_{o2}) :]x_{o1} - \delta, x_{o1} + \delta[\to I\!R$.
Diese Funktion ist auf dem angegebenen Intervall differenzierbar mit der Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot, x_{o2})$.

Ist $x = (x_1, x_2) \in B(x_o, \delta)$ bel. gewählt, so folgt aus dem Mittelwertsatz 5.10, daß ein $\Theta_1 \in]0,1[$ existiert, so daß

$$\frac{f(x_1, x_{o2}) - f(x_{o2}, x_{o2})}{x_1 - x_{o1}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{o1} + \Theta_1(x_1 - x_{o1}), x_{o2}).$$

Analog erhält man: $\exists \Theta_2 \in]0,1[$ mit

$$\frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_{o2})}{x_2 - x_{o2}} = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_{o2} + \Theta_2(x_2 - x_{o2})).$$

Daraus erhält man insgesamt:

$$\begin{array}{rcl} f(x) - f(x_o) & = & f(x_1, x_2) - f(x_{o1}, x_{o2}) \\ & = & f(x_1, x_2) - f(x_1, x_{o2}) + f(x_1, x_{o2}) - f(x_{o1}, x_{o2}) \\ & = & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_{o2} + \Theta_2(x_2 - x_{o2}))(x_2 - x_{o2}) + \\ & & \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_{o1} + \Theta_1(x_1 - x_{o1}), x_{o2})(x_1 - x_{o1}), \\ \rightsquigarrow f(x) - f(x_o) & = & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_o), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_o)\right) \begin{pmatrix} x_1 - x_{o1} \\ x_2 - x_{o2} \end{pmatrix} + r_f(x, x_o) \\ & & (\forall x \in B(x_o, \delta)), \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{rcl} r_f(x, x_o) & := & [\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_{o1} + \Theta_1(x_1 - x_{o1}), x_{o2}) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_{o1}, x_{o2})](x_1 - x_{o1}) + \\ & & [\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_{o2} + \Theta_2(x_2 - x_{o2})) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_{o1}, x_{o2})](x_2 - x_{o2}). \end{array}$$

$\rightsquigarrow |r_f(x, x_o)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x_1 - x_{o1}| + \frac{\varepsilon}{2}|x_2 - x_{o2}| \leq \varepsilon \|x - x_o\|, \ \forall x \in B(x_o, \delta)$.
(wegen $\left.\begin{array}{l} (x_{o1} + \Theta_1(x_1 - x_{o1}), x_{o2}) \in B(x_o, \delta) \\ (x_1, x_{o2} + \Theta_2(x_2 - x_{o2})) \in B(x_o, \delta) \end{array}\right\}. \ \forall x \in B(x_o, \delta)$)
Damit ist alles bewiesen! □

Abschließend für dieses Kapitel kommen wir jetzt zu partiellen Ableitungen höherer Ordnung.

Definition 5.33
Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}^m$, und $D(f) \subseteq \mathbb{R}^k$ sei offen. f besitze auf $D(f)$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j} : D(f) \to \mathbb{R}^m$ $(j \in \{1, \ldots, k\})$.
Existiert nun die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}))(x_o)$, für $x_o \in D(f)$, so heißt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_o) := \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)$ <u>partielle Ableitung zweiter Ordnung</u> von f in x_o nach x_j und x_i $(i \in \{1, \ldots, k\})$.
Im Fall $i = j$ verwenden wir die Schreibweise: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_o)$.

Ist $\alpha := (\alpha_1, \ldots, a_k)$ ein sog. Multi–Index und bezeichnet $|\alpha| := \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_o$, $\forall i = 1, \ldots, k$, so definiert man auf die obige Weise sukzessive eine <u>*partielle Ableitung $|\alpha|$–ter Ordnung*</u>

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_k^{\alpha_k}}(x_o) \text{ von } f \text{ in } x_o.$$

(Dabei bedeutet $\alpha_i = 0$, daß nach der Variablen x_i nicht abgeleitet wird.)

Ist $G \subset \mathbb{R}^k$ nichtleer und offen, $p \in \mathbb{N}$, so bezeichne <u>$C^p(G)$</u> die Menge aller Funktionen $f : G \to \mathbb{R}$, deren partielle Ableitungen <u>bis zur</u> Ordnung p alle auf G existieren und dort stetig sind.

Beispiele 5.34

a) $f(x_1, x_2) := (x_1^2 + x_2^2) \exp(x_1 x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= 2x_1 \exp(x_1 x_2) + (x_1^2 + x_2^2) x_2 \exp(x_1 x_2), \\ &= (x_1^2 x_2 + 2x_1 + x_2^3) \exp(x_1 x_2), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_1 x_2^2 + 2x_2) \exp(x_1 x_2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) &= (x_1^2 + 3x_2^2) \exp(x_1 x_2) + (x_1^2 x_2 + 2x_1 + x_2^3) x_1 \exp(x_1 x_2) \\ &= (3x_1^2 + 3x_2^2 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3) \exp(x_1 x_2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) &= (3x_1^2 + x_2^2) \exp(x_1 x_2) + (x_1^3 + x_1 x_2^2 + 2x_2) x_2 \exp(x_1 x_2) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

d.h. bei dieser Funktion kann die Reihenfolge der Ableitungen vertauscht werden.

b) $f(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad , & (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + x_1 x_2 \frac{2x_1(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 - x_2^2) 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{x_2(x_1^4 - x_2^4) + 4x_1^2 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x_2) = -x_2 \text{ und analog : } \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0) = x_1.$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = -1 \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = 1.$$

Wann sind die partiellen Ableitungen einer Funktion unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen?

Satz 5.35
Es sei $f : D(f) \to I\!R$, $D(f) \subseteq I\!R^2$, $x_o \in \operatorname{int}(D(f))$. *Existieren die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

auf einer Umgebung U *von* x_o *und sind in* x_o *stetig, so sind sie in* x_o *gleich.*

Beweis:
Wir wählen zunächst $\varepsilon > 0$ so klein, daß

$$x_o + h = (x_{o1} + h_1, x_{o2} + h_2) \in U, \text{ falls } |h_1|, |h_2| < \varepsilon.$$

Es sei $h = (h_1, h_2)$ beliebig, aber fixiert, so gewählt, daß

$$0 \neq |h_1| < \varepsilon,\ i = 1, 2.$$

Wir betrachten die folgenden Funktionen

$$\varphi(x) := f(x, x_{o2} + h_2) - f(x, x_{o2}), \quad \forall x \in]x_{o1} - \varepsilon, x_{o1} + \varepsilon[,$$
$$\psi(y) := f(x_{o1} + h_1, y) - f(x_{o1}, y), \quad \forall y \in]x_{o2} - \varepsilon, x_{o2} + \varepsilon[.$$

Nach dem Mittelwertsatz 5.10 existieren dann $\tilde{x}_1$ (zwischen x_{o1} und $x_{o1} + h_1$) und $\tilde{y}_2$ (zwischen x_{o2} und $x_{o2} + h_2$), so daß

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{o1} + h_1) - \varphi(x_{o1}) = h_1 \varphi'(\tilde{x}_1) &= h_1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, x_{o2} + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, x_{o2}) \right], \\
\psi(x_{o2} + h_2) - \psi(x_{o2}) = h_2 \psi'(\tilde{y}_2) &= h_2 \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{o1} + h_1, \tilde{y}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{o1}, \tilde{y}_2) \right].
\end{aligned}$$

Wendet man auf die beiden Ausdrücke in den eckigen Klammern wiederum den Mittelwertsatz an, so erhalten wir die Existenz von $\tilde{x}_2$ (zwischen x_{o2} und $x_{o2} + h_2$) und von $\tilde{y}_1$ (zwischen x_{o1} und $x_{o1} + h_1$), so daß gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{o1} + h_1) - \varphi(x_{o1}) &= h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \text{ und} \\
\psi(x_{o2} + h_2) - \psi(x_{o2}) &= h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2).
\end{aligned}$$

Ferner ist die folgende Identität offensichtlich:

$$\begin{aligned}\varphi(x_{o1}+h_1)-\varphi(x_{o1}) &= f(x_{o1}+h_1,x_{o2}+h_2)-f(x_{o1}+h_1,x_{o2})\\ &\quad -f(x_{o1},x_{o2}+h_2)+f(x_{o1},x_{o2})\\ &= \psi(x_{o2}+h_2)-\psi(x_{o2}).\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2)$.
Da beide Ableitungen nach Voraussetzung in $x_o=(x_{o1},x_{o2})$ stetig sind, folgt durch Grenzübergang $(h_1,h_2)\to(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_o)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_o). \qquad \square$$

Folgerung 5.36 *(Satz von Schwarz)*
Für jedes $f \in C^p(G)$ ($G \subseteq \mathbb{R}^k$ offen) sind die partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq p$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.

Beweis:
folgt nach Def. von $C^p(G)$ und durch wiederholte Anwendung von 5.35. $\square$

5.3 Kettenregel, Mittelwertsatz und Taylorformel

Wir beginnen mit der Kettenregel als der fundamentalen Differentiationsregel.

Satz 5.37 *(Kettenregel)*
Es seien $f: D(f)\to \mathbb{R}^l$, $g: D(g)\to\mathbb{R}^m$, $D(f)\subseteq\mathbb{R}^k$, $D(g)\subseteq\mathbb{R}^l$, und wir betrachten die Abbildung

$$F := g\circ f : D(g\circ f)\to\mathbb{R}^m, \quad D(g\circ f)\subseteq D(f)\subseteq\mathbb{R}^k.$$

Es seien $x_o \in \operatorname{int}(D(g\circ f))$ und $f(x_o)\in\operatorname{int}(D(g))$, f sei in x_o und g sei in $f(x_o)$ Fréchet–differenzierbar.
Dann ist $F=g\circ f$ in x_o Fréchet–differenzierbar, und es gilt

$$F'(x_o)=g'(f(x_o))f'(x_o).$$

Beweis:
Nach Vor. und Def. 5.22 bzw. Bem. 5.23 gilt:

$$f(x_o+h)=f(x_o)+f'(x_o)h+r_f(x_o,h), \quad \forall h\in\mathbb{R}^k \text{ mit } x_o+h\in D(f),$$

wobei $\displaystyle\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|r_f(x_o,h)\|}{\|h\|}=0,$ und

$g(f(x_o)+y) = g(f(x_o)) + g'(f(x_o))y + r_g(f(x_o),y), \quad \forall y \in I\!R^l$ mit $f(x_o)+y \in D(g)$, wobei $\lim\limits_{\|y\|\to 0} \frac{\|r_g(f(x_o),y)\|}{\|y\|} = 0$.

Daraus folgt für alle $h \in I\!R^k$ mit $x_o + h \in D(F) = D(g \circ f)$:

$$\begin{aligned} F(x_o+h)-F(x_o) &= g(f(x_o)+(f(x_o+h)-f(x_o)))-g(f(x_o)) \\ &= g'(f(x_o))(f(x_o+h)-f(x_o))+r_g(f(x_o),f(x_o+h)-f(x_o)) \\ &= g'(f(x_o))f'(x_o)h+r_F(x_o,h), \end{aligned}$$

wobei $r_F(x_o,h) := g'(f(x_o))r_f(x_o,h) + r_g(f(x_o), f(x_o+h) - f(x_o))$.

Wir zeigen: $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \frac{\|r_F(x_o,h)\|}{\|h\|} = 0$.

Da $\frac{\|g'(f(x_o))r_g(x_o;h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|g'(f(x_o))\|\|r_g(x_o;h)\|}{\|h\|} \underset{\|h\|\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

genügt es, zu zeigen: $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \frac{\|r_g(f(x_o),f(x_o+h)-f(x_o))\|}{\|h\|} = 0$.

Es sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt. Dann existiert zunächst ein $\delta_1(\varepsilon) > 0$ so, daß

$$\frac{\|r_g(f(x_o),y)\|}{\|y\|} < \frac{\varepsilon}{\|f'(x_o)\|+1}, \quad \forall y \in I\!R^l \text{ mit } 0 \neq \|y\| < \delta_1(\varepsilon).$$

(Hierbei ist $\|f'(x_o)\|$ die Norm der (l,k)–Matrix $f'(x_o)$ gemäß 5.31 !)

$\rightsquigarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0$ so, daß für alle $h \in I\!R^k$ mit $0 \neq \|h\| < \delta(\varepsilon)$ gilt:

$$\|f(x_o+h) - f(x_o)\| < \delta_1(\varepsilon) \quad \text{(vgl. 5.24 b)) und}$$
$$\frac{\|r_f(x_o,h)\|}{\|h\|} \leq 1.$$

Dann gilt für alle $h \in I\!R^k$ mit $0 \neq \|h\| < \delta(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \frac{\|r_g(f(x_o),f(x_o+h)-f(x_o))\|}{\|h\|} &= \frac{\|r_g(f(x_o),f(x_o+h)-f(x_o))\|}{\|f(x_o+h)-f(x_o)\|} \frac{\|f'(x_o)h+r_f(x_o,h)\|}{\|h\|} \\ &< \frac{\varepsilon}{\|f'(x_o)\|+1}(\|f'(x_o)\frac{h}{\|h\|}\|+\frac{\|r_f(x_o,h)\|}{\|h\|}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|f'(x_o)\|+1}(\|f'(x_o)\|+1) = \varepsilon. \qquad \Box \end{aligned}$$

Folgerung 5.38
Es seien alle Voraussetzungen von Satz 5.37 erfüllt mit der Ausnahme, daß f in x_o lediglich eine Richtungsableitung in Richtung $h \in I\!R^k$ besitze.
Dann besitzt auch $F := g \circ f$ in x_o eine Richtungsableitung in Richtung $h \in I\!R^k$ und es gilt:

$$F'(x_o;h) = g'(f(x_o))f'(x_o;h).$$

Beweis:
Man wiederholt den prinzipiellen Ablauf des Beweises von 5.37 und ersieht aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(F(x_o+th)-F(x_o)) &= g'(f(x_o))\frac{1}{t}(f(x_o+th)-f(x_o)) \\ &\quad +\frac{1}{t}r_g(f(x_o),f(x_o+th)-f(x_o))\end{aligned}$$

und indem man analog zu 5.37 beweist $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}r_g(f(x_o),f(x_o+th)-f(x_o))=0$, daß die behauptete Formel für die Richtungsableitungen gültig ist. □

Bemerkung 5.39
Unter den Voraussetzungen von Satz 5.37/Folg. 5.38 ergeben sich aus Satz 5.28 folgende Formeln für die Jacobi–Matrizen bzw. Richtungsableitungen:

$$\begin{aligned}J_F(x_o) &= J_g(f(x_o))J_f(x_o) \quad \textit{(nach 5.37)}, \\ F'(x_o;h) &= J_g(f(x_o))f'(x_o;h) \quad \textit{(nach 5.38)}.\end{aligned}$$

Für den Spezialfall $h:=e_j$ $(j=1,\ldots,k)$ erhalten wir daraus:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_o)=J_g(f(x_o))\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) \quad (j=1,\ldots,k).$$

Haben ferner F, f bzw. g die folgende Gestalt

$$F(x)=\begin{pmatrix}F_1(x)\\ \vdots\\ F_m(x)\end{pmatrix}, \quad f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_m(x)\end{pmatrix}, \quad g(y)=\begin{pmatrix}g_1(y)\\ \vdots\\ g_m(y)\end{pmatrix},$$

$(\forall x\in D(F))$ $\qquad$ $(\forall x\in D(f))$ $\qquad$ $(\forall y\in D(g))$

so ergeben sich folgende Kettenregeln für partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial F_r}{\partial x_j}(x_o)=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial g_r}{\partial y_i}(f(x_o))\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o) \quad (r=1,\ldots,m;j=1,\ldots,k).$$

Spezialfälle:

$$\begin{aligned}m=1:\ \tfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_o) &= \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(x_o))\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o) \quad (j=1,\ldots,k), \\ l=1:\ \tfrac{\partial F_r}{\partial x_j}(x_o) &= \frac{\partial g_r}{\partial y}(f(x_o))\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) \quad \begin{array}{l}(r=1,\ldots,m;\\ j=1,\ldots,k),\end{array} \\ k{=}l{=}m{=}1:\ F'(x_o) &= g'(f(x_o))f'(x_o).\end{aligned}$$

Ausdrücklich vermerkt werden muß aber, daß die angegebenen Beziehungen für die partiellen Ableitungen von $F := g \circ f$ nur unter den Voraussetzungen von 5.37 bzw. 5.38 abgeleitet werden können! Insbesondere ist die Fréchet–Differenzierbarkeit von g in $f(x_o)$ unverzichtbar! (hinreichende Bedingungen dafür siehe Satz 5.32)

Das nachfolgende Resultat zeigt, daß die Differentiationsregeln für Produkte und Quotienten von Funktionen (mit Wertebereich in $I\!R$) einfache Schlußfolgerungen aus der Kettenregel sind.

Beispiel 5.40

$$\begin{array}{lll} f : I\!R^2 \to I\!R, & f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2, & \forall (x_1, x_2) \in I\!R^2, \\ g : I\!R \to I\!R, & g(y) := \exp(y), & \forall y \in I\!R. \end{array}$$

Nach Bsp. 5.25 b) bzw. Satz 5.32 sind beide Funktionen Fréchet–differenzierbar auf ihren Definitionsbereichen.
Nach Satz 5.37 ist deshalb $g \circ f$ Fréchet–differenzierbar auf $I\!R^2$ und es gilt für die partiellen Ableitungen nach Bem. 5.39:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_1}(x_1, x_2) = g'(f(x_1, x_2))\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2)\exp(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2),$$
$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (2x_2 + x_1)\exp(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2),$$

und damit $(g \circ f)' = \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$.

Folgerung 5.41
Es seien $f : D(f) \to I\!R$, $g : D(g) \to I\!R$, $D(f) \subseteq I\!R^k$, $D(g) \subseteq I\!R^k$, in $x_o \in \operatorname{int}(D(f) \cap D(g))$ Fréchet–differenzierbar. Dann gilt:

a) *$f \cdot g$ ist in x_o Fréchet–differenzierbar und es gilt*

$$(f \cdot g)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + g'(x_o)f(x_o) \quad \text{("Produktregel")}.$$

b) *Ist $g(x_o) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x_o Fréchet–differenzierbar und es gilt*

$$(\frac{f}{g})'(x_o) = \frac{1}{(g(x_o))^2}(f'(x_o)g(x_o) - g'(x_o)f(x_o)) \quad \text{("Quotientenregel")}.$$

<u>Beweis:</u>

a) Wir definieren

$$G : D(f) \cap D(g) \to I\!R^2, G(x) := \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix},$$
$$H : I\!R^2 \to I\!R, H(y_1, y_2) := y_1y_2, \forall (y_1, y_2) \in I\!R^2.$$

Damit gilt: $f \cdot g = H \circ G$.
Ziel ist die Anwendung von 5.37! Überprüfung der Voraussetzungen: G ist Fréchet–differenzierbar in x_o, da dies für f und g erfüllt ist.
H ist Fréchet–differenzierbar auf $I\!R^2$, da H stetig differenzierbar ist und nach Satz 5.32! Ferner gilt:

$$H'(y_1, y_2) = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}(y_1, y_2), \frac{\partial H}{\partial y_2}(y_1, y_2) \right) = (y_2, y_1).$$

$$\begin{aligned} \text{Satz 5.37} \rightsquigarrow (f \cdot g)'(x_o) &= (H \circ G)'(x_o) = H'(G(x_o))G'(x_o) \\ &= (g(x_o), f(x_o)) \begin{pmatrix} f'(x_o) \\ g'(x_o) \end{pmatrix} \\ &= g(x_o)f'(x_o) + f(x_o)g'(x_o). \end{aligned}$$

b) Man verfährt im Prinzip wie in a), definiert aber nun H wie folgt:

$$H : I\!R^2 \backslash \{(y, 0) : y \in I\!R\} \to I\!R, \quad H(y_1, y_2) := \frac{y_1}{y_2}.$$

Da $g(x_o) \neq 0$, existiert eine offene Umgebung U von $G(x_o)$ in $I\!R^2$, so daß H stetig differenzierbar auf U mit $\frac{\partial H}{\partial y_1}(y_1, y_2) = \frac{1}{y_2}$ und $\frac{\partial H}{\partial y_2}(y_1, y_2) = \frac{-y_1}{y_2^2}$, und damit (Satz 5.32!) Fréchet–differenzierbar in $G(x_o)$ ist.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow (\frac{f}{g})'(x_o) = (H \circ G)'(x_o) &= \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}(G(x_o)), \frac{\partial H}{\partial y_2}(G(x_o)) \right) \begin{pmatrix} f'(x_o) \\ g'(x_o) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{g(x_o)}, -\frac{f(x_o)}{g(x_o)^2} \right) \begin{pmatrix} f'(x_o) \\ g'(x_o) \end{pmatrix} \\ &= \frac{f'(x_o)}{g(x_o)} - \frac{f(x_o)g'(x_o)}{g(x_o)^2}. \qquad \Box \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun der Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes zu.

Definition 5.42
Für beliebige $x, y \in I\!R^k$ bezeichne $[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$ ein K–dimensionales Intervall.
$C \subseteq I\!R^k$ heißt <u>konvex</u>, falls für alle $x, y \in C$ gilt: $[x, y] \subseteq C$.

Satz 5.43 *(1. Mittelwertsatz)*
Sei $D(f) \subseteq I\!R^k$ offen und konvex, $f : D(f) \to I\!R^m$ sei Fréchet–differenzierbar. Dann existiert für alle $x, x_o \in D(f)$ eine (m, k)–Matrix $J(x, x_o)$, so daß

$$f(x) - f(x_o) = J(x, x_o)(x - x_o).$$

Im Fall $m = 1$ hat diese Matrix die Gestalt $J(x, x_o) = f'(x_o + \Theta(x - x_o))$ mit einem geeigneten $\Theta \in]0, 1[$.

Beweis:
Für $i = 1, \ldots, m$ bezeichne $f_i : D(f) \to I\!R$ die i–te Komponente von f.
Nach Voraussetzung sind dann die f_i, $i = 1, \ldots, m$, Fréchet–differenzierbar.
Seien $x, x_o \in D(f)$ beliebig gewählt, sei $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Wir definieren $g : [0,1] \to I\!R^k$, $g(t) := x_o + t(x - x_o)$, $\forall t \in [0,1]$.
$\rightsquigarrow$ g ist stetig und differenzierbar auf $]0,1[$ mit $g'(t) = x - x_o$, $\forall t \in]0,1[$.
$\rightsquigarrow$ nach Satz 5.37 ist $f_i \circ g : [0,1] \to I\!R^m$ differenzierbar auf $]0,1[$ mit der Ableitung

$$(f_i \circ g)'(t) = f_i'(x_o + t(x - x_o))g'(t), \quad \forall t \in]0,1[.$$

Da $f_i \circ g$ auch stetig auf $[0,1]$ ist, ist der Mittelwertsatz 5.10 anwendbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \exists \Theta_i \in]0,1[: f_i(x) - f_i(x_o) &= (f_i \circ g)(1) - (f_i \circ g)(0) = (f_i \circ g)'(\Theta_i) \\ &= f_i'(x_o + \Theta_i(x - x_o))(x - x_o). \end{aligned}$$

Wir definieren nun die Matrix $J(x, x_o)$ wie folgt:

$$J(x, x_o) = \begin{pmatrix} f_1'(x_o + \Theta_1(x - x_o)) \\ \cdots \\ f_m'(x_o + \Theta_m(x - x_o)) \end{pmatrix} \quad (m \text{ Zeilen, } k \text{ Spalten}).$$

Dann gilt: $f(x) - f(x_o) = J(x, x_o)(x - x_o)$. □

Beispiel 5.44
Für $m > 1$ hat die Matrix $J(x, x_o)$ i.a. nicht die Gestalt $f'(x_o + \Theta(x - x_o))$ mit einem geeigneten $\Theta \in]0,1[$!
Sei $k := m := 2$, $f : I\!R^2 \to I\!R^2$, $f(x_1, x_2) := (x_1^3, x_2^2)$, $\forall (x_1, x_2) \in I\!R^2$.
$\rightsquigarrow$ *f ist stetig differenzierbar auf $I\!R^2$;*
$\rightsquigarrow$ *f ist Fréchet–differenzierbar auf $I\!R^2$ nach Satz 5.32, und es gilt:*

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \forall (x_1, x_2) \in I\!R^2.$$

<u>Annahme:</u> $\exists \Theta \in]0,1[$*:* $f(1,1) - f(0,0) = f'((0,0)) + \Theta(1,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow f(1,1) = f'(\Theta, \Theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\Theta^2 \\ 2\Theta \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ *Widerspruch!*

<u>Problem:</u> *Existieren (wenigstens) Abschätzungen für $\|f(x) - f(x_o)\|$ mit Hilfe der Fréchet–Ableitung f'?*

Lemma 5.45
Es seien $g : D(g) \to I\!R^m$, $D(g) \subseteq I\!R$, $[0,1] \subseteq \operatorname{int}(D(g))$, und g sei differenzierbar auf $]0,1[$. Dann gilt:

$$\|g(1) - g(0)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|g'(t)\|.$$

Beweis:
Wir setzen $M := \sup\limits_{t\in[0,1]} \|g'(t)\|$ und nehmen an, daß $M < +\infty$ (ansonsten ist die Aussage trivial!). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.
Wir zeigen: $\|g(1) - g(0)\| \leq M + \varepsilon$.
Dazu definieren wir die folgende Menge:
$I := \{t \in [0,1] : \|g(s) - g(0)\| \leq (M+\varepsilon)s, \quad \forall s \in [0,t]\}$
<u>*Beh.:*</u> I ist ein abgeschlossenes Intervall mit $0 \in I$.
<u>*Bew.:*</u> $0 \in I$ ist klar nach Definition. Sei $t \in I$ bel. und $s \in [0,t[$.
$\rightsquigarrow \|g(\tau) - g(0)\| \leq (M+\varepsilon)\tau \quad \forall \tau \in [0,s]$, da $s < t$
$\rightsquigarrow s \in I \rightsquigarrow I$ ist ein Intervall der Gestalt $[0,\gamma[$ oder $[0,\gamma]$.
sei $s \in [0,\gamma] \rightsquigarrow \|g(s) - g(0)\| \leq (M+\varepsilon)s$
$s \to \gamma : \|g(\gamma) - g(0)\| \leq (M+\varepsilon)\gamma \rightsquigarrow \gamma \in I$
$\rightsquigarrow I$ ist auch abgeschlossen (da g stetig ist).
Folglich hat I die Gestalt $I = [0,\gamma]$ mit $\gamma \in [0,1]$.
<u>*Annahme:*</u> $\gamma < 1 \rightsquigarrow \exists \delta > 0 : \gamma + \delta < 1$.
Nach Voraussetzung kann δ noch so klein gewählt werden, daß

$$\left\| \frac{g(\gamma+h) - g(\gamma)}{h} - g'(\gamma) \right\| \leq \varepsilon, \quad \text{falls } h \in]0,\delta].$$

$\rightsquigarrow$ für $h \in]0,\delta]$ gilt:

$$\|g(\gamma+h) - g(\gamma)\| \leq \|g'(\gamma)\|h + \varepsilon h \leq (M+\varepsilon)h$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \|g(\gamma+h) - g(0)\| &\leq \|g(\gamma+h) - g(\gamma)\| + \|g(\gamma) - g(0)\| \\ &\leq (M+\varepsilon)h + (M+\varepsilon)\gamma = (M+\varepsilon)(h+\gamma). \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \gamma + \delta \in I \rightsquigarrow$ Widerspruch!
$\rightsquigarrow I = [0,1]$ und $\|g(1) - g(0)\| \leq M + \varepsilon$.
Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ist alles gezeigt. $\square$

Satz 5.46 *(2. Mittelwertsatz)*
Es sei $D(f) \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und konvex, $f : D(f) \to \mathbb{R}^m$ sei Fréchet–differenzierbar. Dann gilt für alle $x, x_o \in D(f)$:

$$\|f(x) - f(x_o)\| \leq \sup_{f\in[0,1]} \|f'(x_o + t(x - x_o))\| \|x - x_o\|.$$

Beweis:
Wir betrachten wie im Beweis von Satz 5.43 zu bel. gewählten $x, x_o \in D(f)$:
$g : D(g) \to \mathbb{R}^m$, $D(g) := \{t \in \mathbb{R} : x_o + t(x - x_o) \in D(f)\}$,
$g(t) := x_o + t(x - x_o)$, $\forall t \in D(g)$, d.h. $[0,1] \subseteq$ *int* $(D(g)$
$F := f \circ g : D(g) \to \mathbb{R}^n$, d.h. $F(t) = f(x_o + t(x - x_o))$, $\forall t \in D(g)$.
Nach der Kettenregel 5.37 gilt dann analog zu Satz 5.43:

F ist differenzierbar auf $[0,1]$ und es gilt

$$F'(t) = f'(x_o + t(x - x_o))(x - x_o), \quad \forall t \in [0,1].$$

Es resultiert:

$$\begin{aligned} \|F(1) - F(0)\| = \|f(x) - f(x_o)\| &\le \sup_{t\in[0,1]} \|F'(t)\| \quad \text{(Lemma 5.45)} \\ &\le \sup_{t\in[0,1]} \|f'(x_o + t(x - x_o))\| \|x - x_o\|. \qquad \square \end{aligned}$$

Folgerung 5.47
Es sei $D(f) \subseteq I\!R^k$ offen und konvex, $f : D(f) \to I\!R^m$ sei Fréchet–differenzierbar.

a) *Ist $M \subseteq D(f)$ konvex und gilt $\|f'(x)\| \le L$, $\forall x \in M$, so ist f Lipschitz-stetig auf M (mit Konstante $L > 0$).*

b) *Für eine beliebige (m,k)–Matrix A und alle $x, x_o \in D(f)$ gilt:*

$$\|f(x) - f(x_o) - A(x - x_o)\| \le \sup_{t\in[0,1]} \|f'(x_o + t(x - x_o)) - A\| \|x - x_o\|$$

c) *Gilt zusätzlich $\|f'(x) - f'(y)\| \le L_1 \|x - y\|$, $\forall x, y \in D(f)$, mit einer gewissen Konstante $L_1 > 0$, so haben wir*

$$\|f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x - x)\| \le L_1 \|x - x_o\|^2.$$

Beweis:

a) Seien $x, y \in M$ beliebig gewählt. Dann gilt nach Satz 5.46:

$$\|f(x) - f(y)\| \le \sup_{t\in[0,1]} \|f(x + t(y - x))\| \|x - y\| \le L\|x - y\|.$$

b) Wir betrachten die Abbildung $F : D(f) \to I\!R^m$, $F(x) := f(x) - Ax$, $\forall x \in D(f)$.
Offenbar ist F Fréchet–differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = f'(x) - A, \quad \forall x \in D(f) \quad \text{(vgl. 5.24 c), 5.25a))}.$$

Wendet man nun Satz 5.46 auf F an, so ergibt sich die Behauptung.

c) folgt aus b) indem man $A := f'(x_o)$ setzt und weiter abschätzt. $\square$

Abschließend für Kap. 5.3 behandeln wir nun eine Verallgemeinerung des Satzes von Taylor (5.16) auf den mehrdimensionalen Fall. Jedoch beschränken wir uns der Einfachheit halber auf eine Entwicklung nur bis einschließlich der zweiten partiellen Ableitungen.
Für eine Funktion $f \in C^2(G), G \subseteq I\!R^k$ offen, wird definiert:

$$\nabla f(x_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_o), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_o)\right) \text{ "Gradient von } f \text{ in } x_o\text{"}$$

und die sog. Hesse–Matrix $\nabla^2 f(x_o)$

$$\nabla^2 f(x_o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_o) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(x_o) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(x_o) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_o) \end{pmatrix}$$

(die also eine symmetrische (5.35!) (k,k)–Matrix ist)

Satz 5.48
Sei $G \subseteq I\!R^k$ offen und konvex, und es gelte $f \in C^2(G)$.
Dann gilt für alle $x_o \in G$ und $h \in I\!R^k$ derart, daß $x_o + h \in G$:

a) *Es existiert ein $\Theta \in]0,1[$ so, daß*

$$f(x_o + h) = f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x_o + \Theta h), h\rangle$$

b) $f(x_o + h) = f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x_o)h, h\rangle + \|h\|^2 \rho(h)$

wobei $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \rho(h) = 0.$

Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $I\!R^k$ (vgl. 1.37), und $\| \cdot \|$ die euklidische Norm.

Beweis:

a) Sei $x_o \in G, h \in R^k, x_o + h \in G$ beliebig, und wir betrachten $\varphi : D(\varphi) \to I\!R$, $\varphi(t) := f(x_o + th)$, $\forall t \in D(\varphi) := \{t \in I\!R : x_o + th \in D(f)\}$. Dann ist φ nach Satz 5.37 differenzierbar auf $D(\varphi)$, und es gilt nach 5.38:

$$\varphi'(t) = f'(x_o + th)h = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o + th)h_i,$$

$$\varphi''(t) = \frac{d}{dt}\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o + th)\right)h_i = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_o + th)h_j\right)h_i,$$

$(\forall t \in D(\varphi))$.

Es gilt also: $\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_o + th), h\rangle$ und $\varphi''(t) = \langle \nabla^2 f(x_o + th)h, h\rangle$.
Wegen $[0,1] \subseteq D(\varphi)$ folgt aus dem Satz von Taylor für $n = 1$:
$\exists \Theta \in]0,1[: \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\Theta)$.

$$\rightsquigarrow f(x_o + h) = f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x_o + \Theta h), h\rangle$$

b) leiten wir aus a) ab und definieren dazu:

$$\rho(h) := \frac{1}{2\|h\|^2}(\langle \nabla^2 f(x_o + \Theta h)h, h\rangle - \langle \nabla^2 f(x_o)h, h\rangle).$$

Damit folgt:

$$f(x_o + h) = f(x_o) + \rangle \nabla f(x_o), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x_o)h, h\rangle + \|h\|^2 \rho(h)$$

Es bleibt zu zeigen: $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \rho(h) = 0$

$$\begin{aligned} |\rho(h)| &= \frac{1}{2\|h\|^2} |\rangle \nabla^2 f(x_o + \Theta h) - \nabla^2 f(x_o)h, h\rangle| \\ &\leq \frac{1}{2\|h\|^2} \|\nabla^2 f(x_o + \Theta h) - \nabla^2 f(x_o)h\| \|h\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla^2 f(x_o + \Theta h) - \nabla^2 f(x_o)\|. \end{aligned}$$

Wegen $f \in C^2(G)$ sind die zweiten partiellen Ableitungen von f in x_o stetig und es folgt analog zur Argumentation in 5.31 die Stetigkeit von $\nabla^2 : G \to \mathcal{M}_{m,k}$ bzgl. der Matrixnorm, d.h. $\|\nabla^2 f(x_o + \Theta h) - \nabla^2 f(x_o)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
$\rightsquigarrow \rho(h) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

□

Bemerkung 5.49
Mit derselben Beweistechnik wie in Satz 5.48 ist eine Erweiterung auf den allgemeinen Fall einer Entwicklung bis einschließlich der n–ten partiellen Ableitungen für $f \in C^n(G)$ möglich! (vgl. Heuser Bd. II, Satz 168.1) Für $k = 1$, $n = 1$ ist Satz 5.48 eine Erweiterung des Satzes von Taylor, da hier eine genauere Auskunft über das Restglied gegeben wird, falls die zweite Ableitung zusätzlich stetig ist!

5.4 Extremalaufgaben

Aufgabenstellung: gegeben: $f : I\!R^m \to I\!R$, $C \subset I\!R^m$

gesucht: $x_o \in C : f(x_o) = infl_{x\in C} f(x)$

Die Sätze 5.13/5.15 besagten, daß ein solches x_o existiert, wenn f (unterhalb) stetig und C kompakt ist.

Zielstellung ist im folgenden, "Minima" von f (auf C) mit Hilfsmitteln der Differentialrechnung zu charakterisieren.

Definition 5.50

Es seien $f : I\!R^m \to I\!R$, $C \subset I\!R^m$, $x_o \in C$:

a) *x_o heißt globales Minimum (von f auf C), falls $f(x_o) \leq f(x)$, $\forall x \in C$,*

b) *x_o heißt lokales Minimum (von f auf C), falls $\exists \varepsilon > 0 : f(x_o) \leq f(x)$, $\forall x \in B(x_o, \varepsilon) \cap C$,*

c) *besitzt f alle m partiellen Ableitungen in x_o, und $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) = 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$, so heißt x_o stationärer Punkt von f.*

(Nach Definition sind globale Minima auch stets lokale, die Umkehrung gilt jedoch i.a. nicht!)

Satz 5.51 *(notwendige Optimalitätsbedingung)*

$f : I\!R^m \to I\!R$ besitze in $x_o \in C$ alle Richtungsableitungen, $C \subseteq I\!R^m$ sei konvex und x_o lokales Minimum von f auf C. Dann gilt:

$$f'(x_o, x - x_o) \geq 0, \quad \forall x \in C,$$

ist außerdem $x_o \in int(C)$, so ist x_o stationärer Punkt von f.

Beweis:

Annahme: $\exists \bar{x} \in C : f(x_o, \bar{x} - x_o) < 0$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, daß $f(x_o) \leq f(x)$, $\forall x \in B(x_o, \varepsilon) \cap C$.

Da C konvex ist, gilt: $x_o + t(\bar{x} - x_o) \in B(x_o, \varepsilon) \cap C$ für hinreichend kleines $t \in]0, 1[$. Für solches t gilt aber:

$$\frac{1}{t}(f(x_o + t(\bar{x} - x_o)) - f(x_o)) - f'(x_o; \bar{x} - x_o) \geq -f'(x_o; \bar{x} - x_o) > 0$$

Die linke Seite konvergiert für $t \to 0+$ gegen $0 \rightsquigarrow$ Widerspruch!

Sei nun x_o innerer Punkt von C.

Wir wissen: $f'(x_o; x - x_o) \geq 0$, $\forall x \in C$

Zu zeigen: x ist stationärer Punkt, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) = 0$, $\forall i = 1 \ldots, m$.

Sei $h \in I\!R^m$ beliebig $\rightsquigarrow x_o + \alpha h \in C$ für $|\alpha|$ hinreichend klein.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow 0 \leq f'(x_o; x_o + \alpha h - x_o) &= f'(x_o; \alpha h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_o + t\alpha h) - f(x_o)) \\ &= \alpha \lim_{\alpha t\to 0} \frac{1}{t\alpha}(f(x_o + t\alpha h) - f(x_o)) = \alpha f'(x_o; h) \\ \rightsquigarrow 0 \leq \alpha f'(x_o; h) & \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow f'(x_o;h) = 0$, da α positiv oder negativ gewählt werden kann.
(Man überlege sich, was passiert, wenn $f'(x_o;h) \neq 0$!)
Wir setzen nun speziell $h := e_j$, $j = 1, \ldots, m$ und erhalten
$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) = f'(x_o, e_j) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, m$ □

Bemerkung 5.52
Setzt man in 5.51 (schwächer) voraus, daß f in einem Punkt $x_o \in C$ alle partiellen Ableitungen besitzt und x_o ein lokales Minimum von f auf C ist, so folgt analog zum letzten Teil des Beweises, daß die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, m,$$

d.h. x_o ist als stationärer Punkt Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0,\ j = 1, \ldots, m \ (m \text{ Gleichungen mit } m \text{ Unbekannten})$$

Ein statiomärer Punkt ist i.a. kein lokales Minimum von f auf C!
Beispiel: $m := 1, C := \mathbb{R}, f(x) := x^3,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow f'(x) = 3x^2 \rightsquigarrow x_o = 0$ *ist einziger stationärer Punkt, aber $x_o = 0$ ist kein lokales Minimum (bzw. Maximum).*

Ziel: hinreichende Bedingungen an f und $x_o \in C$, so daß aus notwendigen Optimalitätsbedingungen (vgl. 5.51) geschlußfolgert werden kann, daß x_o ein lokales Minimum (von f auf C) ist.

Satz 5.53 *(hinreichende Optimalitätsbedingung)*
Seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und konvex,$f \in C^2(G)$, $C \subseteq G$ konvex, und es gelte für $x_o \in C$: $\langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle \geq 0$, $\forall x \in C$, $\langle \nabla^2 f(x_o)h, h \rangle > 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, dann ist x_o lokales Minimum von f auf C.

Beweis:
Idee: Anwendung der mehrdimensionalen Taylorformel 5.48
Die Voraussetzung über die Hesse–Matrix $\nabla^2 f(x_o)$ ist äquivalent zu folgender Bedingung:

$\inf\{\langle \nabla^2 f(x_o)h, h \rangle : h \in S\} > 0$, wobei $S := \{h \in \mathbb{R}^m : \|h\| = 1\}$

Da S kompakt ist, existiert $h^* \in S$ mit $\langle \nabla^2 f(x_o)h^*, h^* \rangle = \inf\{\langle \nabla^2 f(x_o)h, h \rangle : h \in S\}$ (5.13)
Beh.: $\exists \varepsilon > 0 : \inf\{\langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle : h \in S\} > 0 \quad \forall x \in B(x_o, \varepsilon)$
Bew.: Annahme: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in B(x_o, \frac{1}{n}) : \inf\{\langle \nabla^2 f(x_n)h, h \rangle : h \in S\} \leq 0$
$\rightsquigarrow$ da S kompakt, existieren $h_n \in S : \langle \nabla^2 f(x_o)h_n, h_n \rangle \leq 0$
es gilt: $x_n \to x_o$ und o.B.d.A. (h_n) ist konvergent gegen $h \in S$
(sonst wähle man eine konvergente Teilfolge aus)
wir zeigen: $\langle \nabla^2 f(x_n)h_n, h_n \rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \nabla^2 f(x_o)h, h \rangle$
($\rightsquigarrow \langle \nabla^2 f(x_o)h, h \rangle \leq 0 \rightsquigarrow$ Widerspruch!)

$|\langle \nabla^2 f(x_n)h_n, h_n \rangle - \langle \nabla^2 f(x_o)h, h \rangle| \ \leq\ |\langle \nabla^2 f(x_n)h_n, h_n \rangle - \langle \nabla^2 f(x_o)h_n, h_n \rangle$

$$
\begin{aligned}
& +\langle\nabla^2 f(x_o)h_n, h_n\rangle - \langle\nabla^2 f(x_o)h_n, h\rangle \\
& +\langle\nabla^2 f(x_o)h_n, h\rangle - \langle\nabla^2 f(x_o)h, h\rangle| \\
= \; & |\langle(\nabla^2 f(x_n) - \nabla^2 f(x_o))h_n, h_n\rangle| \\
& +|\langle\nabla^2 f(x_o)h_n, h_n - h\rangle| \\
& +|\langle\nabla^2 f(x_o)(h_n - h), h\rangle| \\
\leq \; & \|(\nabla^2 f(x_n) - \nabla^2 f(x_o))h_n\|\|h_n\| \\
& +\|\nabla^2 f(x_o)h_n\|\|h_n - h\| \\
& +\|\nabla^2 f(x_o)(h_n - h)\|\|h\| \\
& \quad \text{(Cauchy–Schwarzsche Ungleichung)} \\
\leq \; & \underbrace{\|\nabla^2 f(x_n) - \nabla^2 f(x_o)\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \underbrace{\|h_n\|^2}_{=1} \\
& +2\|\nabla^2 f(x-o)\|\|h-n\| \underbrace{\|h_n - h\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \\
& \to 0 \\
& \text{wegen } f \in C^2(G), \text{ vgl. } 5.31
\end{aligned}
$$

also gilt:$\exists\varepsilon > 0 : \inf\{\langle\nabla^2 f(x_)h, h\rangle : h \in S\} > 0, \quad \forall x \in B(x_o, \varepsilon)$
oder:$(\star)\langle\nabla^2 f(x)h, h\rangle > 0 \quad \forall h \in I\!R^m\backslash\{0\}, \forall x \in B(x_o, \varepsilon\}.$
Sei jetzt $x \in B(x_o, \varepsilon) \cap C$ beliebig, $x \neq x_o$. Nach 5.48 a) ist dann

$$f(x) = f(x_o) + \underbrace{\langle\nabla f(x_o), x - x_o\rangle}_{\geq 0 \text{ nach Vor.}} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle\nabla^2 f(x_o + \Theta(x - x_o))(x - x_o), x - x_o\rangle}_{>0 \text{ nach } (\star)}$$

($\Theta \in]0, 1[$ geeignet gewählt)
$\rightsquigarrow f(x) > f(x_o), \quad \forall x \in B(x_o, \varepsilon) \cap C\backslash\{x_o\}$
$\rightsquigarrow x_o$ ist lokales Minimum von f auf C. $\square$

Bemerkung 5.54
Eine symmetrische (m, m)–Matrix A heißt positiv definit, falls $\langle Ah, h\rangle > 0$ $\forall h \in I\!R^m\backslash\{0\}$
Satz 5.53 besagt deshalb im Fall $C = G = I\!R^m$, $f \in C^2(I\!R^m)$:
Ist x_o ein Punkt mit den Eigenschaften $\nabla f(x_o) = 0$, $\nabla^2 f(x_o)$ positiv definit, so ist x_o ein lokales Minimum von f auf $I\!R^m$.
In 5.53 wurde sogar gezeigt, daß x_o ein isoliertes lokales Minimum ist, d.h. $f(x) < f(x_o), \quad \forall x \in B(x_o, \varepsilon) \cap C, x \neq x_o$.
Im allgemeinen ist aber x_o kein globales Minimum von f.

Folgerung 5.55
Seien die Voraussetzungen von Satz 5.53 erfüllt, wobei die Bedingung für die Hesse–Matrix $\nabla^2 f(x_o)$ ersetzt wird durch:
$\langle\nabla^2 f(y)(x - x_o), x - x_o\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C$.
Dann ist x_o sogar globales Minimum von f auf C.

$\underline{\text{Bew.:}}$ *folgt aus* $f(x) \geq f(x_o) + \frac{1}{2} \underbrace{\langle \nabla^2 f(x_o + \Theta(x - x_o))(x - x_o), x - x_o \rangle}_{\geq 0}$

(wie in 5.53) mit $y = x_o + \Theta(x - x_o)$

$\rightsquigarrow f(x) \geq f(x_o), \quad \forall x \in C \rightsquigarrow x_o$ *ist globales Minimum*

Lemma 5.56

Eine symmetrische (m, m)*–Matrix* $A = (a_{ij})$ *ist positiv definit gdw.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Für $m = 2$ *bedeutet das:* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $(a_{12} = a_{21})$ *ist positiv definit gdw.* $a_{11} > 0$ *und* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

(vgl. Heuser Bd. 2, Sätze 172.5, 172.6)

Beispiel 5.57

Wir betrachten $f(x_1, x_2) := x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, \quad \forall (x_1, x_2) \in I\!R^2 = C$

Ziel: lokale Minima von f *auf* $I\!R^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2 - 3x_1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 6x_1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 6x_2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -3$

$\rightsquigarrow \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3x_2 \\ 3x_2^2 - 3x_1 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x_1, x_2) = 0$ *gdw.* $x_1^2 = x_2, \, x_2^2 = x_1$

gdw. $(x_1, x_2) = (0, 0)$ *oder* $(x_1, x_2) = (1, 1)$

$$f(0,0) = 0, f(x_1, 0) = x_1^3 \begin{array}{l} > 0 : x_1 > 0 \\ < 0 : x_1 < 0 \end{array}$$

$\rightsquigarrow (0, 0)$ *ist kein lokales Minimum!*

$\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{vmatrix} = 27 > 0, \; 6 > 0$

$\rightsquigarrow \nabla^2 f(x_1, x_2)$ *ist positiv definit (5.56)*

5.53 $\rightsquigarrow (1, 1)$ *ist lokales Minimum von* f, $\quad f(1, 1) = -1$

$$f(t, t) = 2t^3 - 3t^2 \begin{array}{l} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty \\ \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\infty \end{array}$$

$\rightsquigarrow (1, 1)$ *ist kein globales Minimum!*

Wir kommen nun zu einer Anwendung der allgemeinen Theorie: der sog. "konvexen Projektion"

Satz 5.58
Es sei $\emptyset \neq C \subseteq I\!R^m$ *konvex und abgeschlossen. Dann existiert* $\forall z \in I\!R^m$ *genau ein* $x_* \in C$ *mit* $\|x_* - z\| = \inf\limits_{x \in C} \|x - z\|$ *und es gilt:*

$$\langle x_* - z, x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C \quad \text{"Variationsungleichung"}$$

Beweis:
Wir können dazu auch $f(x) := \|x - z\|^2$, ($z \in I\!R^m$ beliebig), auf C minimieren.
$\rightsquigarrow f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - z_i)^2 \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2(x_j - z_j)$, $j = 1, \ldots, m$.
$\rightsquigarrow \nabla f(x) = 2(x - z)$
$\rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$, $(i \neq j)$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 2, \quad \forall x \in I\!R^m$
$\rightsquigarrow f \in C^2(I\!R^m), \quad \nabla^2 f(x) = 2 \cdot I$ ($I = m$–dimensionale Einheitsmatrix)

$$\begin{aligned} 5.48 \rightsquigarrow \forall x, x_o \in I\!R^m : f(x) &= f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_o + \Theta(x - x_o))(x - x_o), (x - x_o) \rangle \\ &\quad f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle + \|x - x_o\|^2. \end{aligned}$$

(Diese Formel wäre auch elementar ableitbar gewesen!)
Existenz eines globalen Minimums:
f ist stetig, C i.a. <u>nicht</u> kompakt $\rightsquigarrow$ 4.13 ist nicht direkt anwendbar.
Sei $\bar{x} \in C$ beliebig,
$\rightsquigarrow C_r := \{x \in C : f(x) \leq f(\bar{x})\} \subseteq C$
$\rightsquigarrow C_r = C \cap f^{-1}(] - \infty, f(\bar{x})])$ ist, wegen f stetig, abgeschlossen.
<u>Beh.:</u> C_r ist auch beschränkt.
<u>Bew.:</u> Sei $x \in C_r$, $\|x\|^2 \leq (\|x - z\| + \|z\|)^2 \leq 2(\|x - z\|^2 + \|z\|^2)$

$$\begin{aligned} &= 2(f(x) + \|z\|^2) \\ &\leq 2(f(\bar{x}) + \|z\|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \exists x_* \in C_r \subseteq C : f(x_*) = \|x_* - z\|^2 &= \min_{x \in C_r} f(x) \\ &= \min_{x \in C_r} \|x - z\|^2 = \min_{x \in C} \|x - z\|^2 \end{aligned}$$

(nach Definition von C_r)
Eindeutigkeit von x_*:
Es gilt: $f(x) = f(x_*) + \underbrace{\langle \nabla f(x_*), x - x_* \rangle}_{\geq 0\, \forall x \in C \text{ (5.51)}} + \|x - x_*\|^2, \quad \forall x \in C$
$\rightsquigarrow f(x) \geq f(x_*) = \min\limits_{x \in C} f(x) + \|x - x_*\|^2, \quad \forall x \in C$
$\rightsquigarrow$ Einzigkeit von x_* als globales Minimum (wenn nicht: $\|x - x_*\|^2 \neq 0$).
Die Variationsungleichung gilt nach 5.51:
$0 \leq \langle \nabla f(x_*), x - x_* \rangle = \langle 2(x_* - z, x - x_* \rangle, \quad \forall x \in C$
$\rightsquigarrow \langle x_* - z, x - x* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$

Bemerkung 5.59
Durch 5.58 wird eine konvexe Projektion(sabbildung)

$P_C : \mathbb{R}^m \to C\,(auf\, C), \|P_C z - z\| = \inf\limits_{x\in C} \|x - z\|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^m,$

definiert. $P_C z$ *heißt konvexe Projektion von* $z \in \mathbb{R}^m$ *auf* C. *Natürlich gilt:*

$P_C z = z, \quad \forall z \in C.$

Ist C *nicht konvex, existiert das globale Minimum noch, ist aber nicht mehr eindeutig bestimmt. (Satz 5.51 gilt nicht mehr!)* P_C *wird dann i.a. eine mengenwertige Abbildung.*
Spezialfall: $C =: L$ *ist linearer Teilraum von* $\mathbb{R}^m$.
$\overline{5.58} \rightsquigarrow \langle P_L z - z, x - P_L z\rangle \geq 0, \quad \forall x \in L \quad (L = \{x - P_L z\})$
$\rightsquigarrow \langle P_L z - z, y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in L, \quad x := -y \rightsquigarrow \langle P_L z - z, -y\rangle \geq 0$
$\rightsquigarrow \langle P_L z - z, y\rangle = 0, \quad \forall y \in L,$ *da mit* y *auch* $-y \in L$
$\rightsquigarrow z = P_L z + w, \langle w, y\rangle = 0, \quad \forall y \in L.$
(Das bedeutet: $w = z - P_L z$ *ist orthogonal zu* L. *Deshalb nennt man* P_L *auch orthogonale Projektion auf* L*!)*

Übung 5.60

a) *Sei* $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^m$ *abgeschlossen und konvex. Dann ist die konvexe Projektion* $P_C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *Lipschitz–stetig mit* $L = 1$.
(Hinweis: verwende die Projektionsungleichung)

b) $C := \bar{B}(0, r) \subseteq \mathbb{R}^m$.
Zu zeigen: $P_C z = \frac{z}{\|z\|} r, \quad \forall z \in \mathbb{R}^m \backslash C.$

5.5 Implizite Funktionen

Häufig sind "interessierende" Funktionen f aus $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^m$ nicht in expliziter Form, sondern in Form von definierenden impliziten Gleichungen der Form

$$F(x, y) = 0,$$

wobei $F : D(F) \to \mathbb{R}^m$, $D(F) \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, gegeben.
Gesucht ist dann eine Funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}^m$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}^k$, so daß

$$F(x, f(x)) = 0, \forall x \in D(f).$$

Anders formuliert bedeutet dies, daß die Gleichung $F(x, y) = 0$ in Abhängigkeit von x nach y aufgelöst werden kann!
Natürlich wird dies i.a. nur lokal möglich sein und starke Voraussetzungen an F erfordern. Unser zentraler Existenzsatz für eine solche Funktion f wird gleichzeitig weitere Eigenschaften, wie z.B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit, von f liefern.

Beispiele 5.61 *(für implizite Funktionen)*

a) $F(x, y) := x^2 + y^2 - 1$, $D(F) := I\!R \times I\!R$.
Offenbar ist $f(x) := \sqrt{1 - x^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$, *Lösung der Gleichung*

$$F(x, y) = 0, \forall x \in [-1, 1].$$

f *ist auch stetig differenzierbar auf* $]-1, 1[$.
<u>Aber:</u> f *ist nicht die einzige Lösung und für* $|x| > 1$ *ist die Gleichung* $F(x, y) = 0$ *unlösbar!*
$\rightsquigarrow$ *maximal ist die lokale eindeutige Auflösbarkeit zu erwarten.*

b) *Die* (x, y)*–Ebene sei die Landkarte eines gebirgigen Gebietes und* $F(x, y)$ *bedeute die Höhe des Punktes* (x, y) *über NN. Auflösung der Gleichung* $F(x, y) = c \quad (c > 0)$ *bedeutet dann die Bestimmung der "Höhenlinien" zur Höhe c!*

c) *Ist* $g : D(g) \to I\!R^m$, $D(g) \subseteq I\!R^m$, *und* $F(x, y) := g(y) - x$, *so bedeutet die Auflösung der Gleichung* $F(x, y) = 0$ *die Bestimmung der inversen Abbildung* $f = g^{-1}$.

d) *Parameterabhängige Gleichungen: Bei Modellierung von Anwendungsaufgaben ergeben sich nichtlineare Gleichungssysteme, die eine bestimmte Anzahl von Modellparametern enthalten* $(x \in I\!R^k)$, *wobei die Abhängigkeit der Lösung von diesen Parametern interessiert (z.B. in Modellen elektrischer Netzwerke).*

Im folgenden betrachten wir $I\!R^k$, $I\!R^m$ *und* $I\!R^k \times I\!R^m = I\!R^{k+m}$ *jeweils mit der zugehörigen Euklidischen Norm. Dann gilt insbesondere*

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad \forall x \in I\!R^k, \forall y \in I\!R^m.$$

Ist $(x_o, y_o) \in \text{int } D(F)$ *und ist* F *in* (x_o, y_o) *Fréchet–differenzierbar mit Fréchet–Ableitung* $F'(x_o, y_o)$, *so spalten wir die* $(m, k + m)$*–Matrix* $f'(x_o, y_o)$ *auf in eine* (m, k)*–Matrix* $\partial_1 F(x_o, y_o)$ *und eine* (m, m)*–Matrix* $\partial_2 F(x_o, y_o)$, *d.h.*

$$F'(x_o, y_o) = (\partial_1 F(x_o, y_o), \partial_2 F(x_o, y_o)).$$

Dann gilt also

$$F'(x_o, y_o) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \partial_1 F(x_o, y_o)x + \partial_2 F(x_o, y_o)y, \quad \forall x \in I\!R^k, \forall y \in I\!R^m.$$

($\partial_1 F$ *bzw.* $\partial_2 F$ *entsprechen also den Jacobi–Matrizen von* F *bez. der Komponenten von* x *bzw. der Komponenten von* y*.)*

Satz 5.62 *(Satz über implizite Funktionen)*
$F : D(F) \to \mathbb{R}^m$, $D(F) \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, sei in einer Umgebung von $(x_o, y_o) \in \operatorname{int}(D(F))$ Fréchet–differenzierbar. Es gelte $F(x_o, y_o) = 0$, die Matrix $\partial_2 F(x_o, y_o)$ sei regulär (und damit invertierbar), und F' sei in (x_o, y_o) bez. der Matrixnorm stetig.
Dann existieren Konstanten $C > 0$ und $r_1, r_2 > 0$, so daß

(i) *die Gleichung $F(x, y) = 0$ für jedes $x \in X_o := \bar{B}(x_o, r_1)$ genau eine Lösung*
$f(x) \in Y_o := \bar{B}(y_o, r_2)$ besitzt, wobei $f(x_o) = y_o$.

(ii) *die Funktion $f : X_o \to \mathbb{R}^m$ Lipschitzstetig und in x_o Fréchet–differenzierbar mit der Ableitung*

$$f'(x_o) = -[\partial_2 F(x_o, y_o)]^{-1} \partial_1 F(x_o, y_o) \quad \text{ist.}$$

(iii) *gilt: $\|y - f(x)\| \le C \|F(x, y)\|$, $\forall (x, y) \in X_o \times Y_o$.*

Beweis:
Zunächst einige Vorbetrachtungen:
Wir wählen in einem ersten Schritt $r_o > 0$ so, daß $U := \bar{B}(x_o, r_o) \times \bar{B}(y_o, r_o) \subseteq \operatorname{int}(D(F))$ und daß F auf U Fréchet–differenzierbar ist. Als nächstes wählen wir Konstanten $C_1 > 0$, $C_2 > 0$:

$$C_1 > \|\partial_1 F(x_o, y_o)\|, \quad C_2 := \|[\partial_2 F(x_o, y_o)]^{-1}\|$$

Nun wird $\alpha \in]0, 1[$ beliebig, aber fixiert, gewählt. Wegen der Stetigkeit von F und F' in (x_o, y_o) existieren $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$, so daß mit $X_o := \bar{B}(x_o, r_1)$, $Y_o := \bar{B}(y_o, r_2)$ gilt:

$$\|\partial_2 F(x, y) - \partial_2 F(x_o, y_o)\| \le \frac{\alpha}{C_2}, \quad \forall (x, y) \in X_o \times Y_o,$$

$$\|\partial_1 F(x, y)\| \le C_1, \quad \forall (x, y) \in X_o \times Y_o, \text{ und}$$

$$\|F(x, y_o)\| \le \frac{1 - \alpha}{C_2} r_2, \quad \forall x \in X_o.$$

Nun kommen wir zu Teil (i) des Beweises.

(i) Unser Ziel besteht hierfür in der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes (vgl. Satz 2.28).
Zunächst ist klar, daß die Gleichung $F(x, y) = 0$ äquivalent ist zur Fixpunktgleichung

$$y = y - [\partial_2 F(x_o, y_o)]^{-1} F(x, y).$$

Für jedes $x \in X_o$ definieren wir die folgende Abbildung

$$F_x(y) := y - [\partial_2 F(x_o, y_o)]^{-1} F(x, y), \quad \forall y \in Y_o.$$

Wir zeigen: $F_x : Y_o \to Y_o$ ist kontraktiv (mit $\alpha \in]0, 1[$), $\forall x \in X_o$.
Wir beginnen mit der Kontraktivität von F_x:
Seien $x \in X_o$, $y, \tilde{y} \in Y_o$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|F_x(y) - F_x(\tilde{y})\| &= \|y - \tilde{y} - [\partial_2 F(x_o, y_o)]^{-1}(F(x, y) - F(x, \tilde{y}))\| \\
&\leq \|[\partial_2 F(x_o, y_o)]^{-1}\| \|F(x, y) - F(x, \tilde{y}) - \partial_2 F(x_o, y_o)(y - \tilde{y})\| \\
&\leq C_2 \sup_{t \in [0,1]} \|\partial_2 F(x, y + t(\tilde{y} - y)) - \partial_2 F(x_o, y_o)\| \|y - \tilde{y}\| \\
&\quad \text{(nach Folg. 5.47 b) mit } A := \partial_2 F(x_o, y_o),\ f := F(x, \cdot)) \\
&\leq C_2 \cdot \frac{\alpha}{C_2} \|y - \tilde{y}\| = \alpha \|y - \tilde{y}\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|F_x(y) - y_o\| &\leq \|F_x(y) - F_x(y_o)\| + \|F_x(y_o) - y_o\| \\
&\leq \alpha \|y - y_o\| + \|[\partial_2 F(x_o, y_o)]^{-1} F(x, y_o)\| \\
&\leq \alpha \|y - y_o\| + C_2 \frac{1 - \alpha}{C_2} r_2 \leq \alpha r_2 + (1 - \alpha) r_2 = r_2.
\end{aligned}$$

Also bildet F_X (Für jedes $x \in X_o$) die abgeschlossene Kugel Y_o in $I\!R^m$ (d.h. Y_o ist ein vollständiger metrischer Raum!) in sich ab und ist kontraktiv (mit $\alpha \in]0, 1[$).
Nach Satz 2.28 besitzt deshalb F_x für jedes $x \in X_o$ genau einen Fixpunkt $f(x) \in Y_o$, d.h.

$$\begin{aligned}
f(x) &= F_x(f(x)), \quad \forall x \in X_o. \\
\rightsquigarrow \quad F(x, f(x)) &= 0, \quad \forall x \in X_o.
\end{aligned}$$

Wegen $y_o = F_{x_o}(y_o)$ und der Einzigkeit des Fixpunktes von F_{x_o} in Y_o muß schließlich auch $f(x_o) = y_o$ gelten.

(iii) Es sei $(x, y) \in X_o \times Y_o$ bel. gewählt. Dann gilt nach Teil (i):

$$\begin{aligned}
\alpha \|y - f(x)\| &\geq \|F_x(y) - F_x(f(x))\| = \|F_x(y) - f(x)\| = \\
&= \|y - f(x) - [\partial_2 F(x_o, y_o)]^{-1} F(x, y)\| \\
&\geq \|y - f(x)\| - C_2 \|F(x, y)\|.
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow (1 - \alpha)\|y - f(x)\| \leq C_2 \|F(x, y)\| \rightsquigarrow$ wähle $C := \frac{C_2}{1 - \alpha}$.

(ii) Wir zeigen zuerst: $F : X_o \to I\!R^m$ ist Lipschitzstetig. Es seien $x, \tilde{x} \in X_o$ bel. gewählt. Dann gilt nach Teil (iii):

$$\begin{aligned}
\|f(\tilde{x}) - f(x)\| &\leq C \|F(x, f(\tilde{x}))\| = C \|F(x, f(\tilde{x})) - F(\tilde{x}, f(\tilde{x}))\| \\
&\leq C C_1 \|x - \tilde{x}\|
\end{aligned}$$

(nach Folgerung 5.47 a), da $\|\partial_1 F(x, f(\tilde{x}))\| \leq C_1$, $\forall x \in X_o$).
$\rightsquigarrow$ f ist Lipschitzstetig auf X_o mit Konstante $C_1C_2/(1-\alpha)$.

Es bleibt zu zeigen: f ist Fréchet–differenzierbar in x_o mit Ableitung

$$f'(x_o) = -[\partial_2 F(x_o, y_o)]^{-1}\partial_1 F(x_o, y_o).$$

Es sei $h \in I\!R^k$ mit $\|h\| \leq r_1$. Dann gilt:

$$\frac{1}{\|h\|}\|f(x_o+h)-f(x_o)-(-[\partial_2 F(x_o,y_o)]^{-1}\partial_1 F(x_o,y_o)h)\| \leq$$

$$\leq \frac{C_2}{\|h\|}\|\partial_2 F(x_o,y_o)(f(x_o+h)-f(x_o))+\partial_1 F(x_o,y_o)h\|$$

$$\leq \frac{C_2}{\|h\|}(\|F(x_o+h,f(x_o+h))-F(x_o+h,f(x_o))-\partial_2 F(x_o,y_o)(f(x_o+h)-f(x_o))\|$$
$$+\|F(x_o+h,f(x_o))-F(x_o,f(x_o))-\partial_1 F(x_o,y_o)h\|)$$

$$\underset{(5.47)}{\leq} \frac{C_2}{\|h\|}(\sup_{t\in[0,1]}\|\partial_2 F(x_o+h,f(x_o)+t(f(x_o+h)-f(x_o)))-\partial_2 F(x_o,y_o)\| *$$
$$*\|f(x_o+h)-f(x_o)\|+\sup_{t\in[0,1]}\|\partial_1 F(x_o+th,y_o)-\partial_1 F(x_o,y_o)\|\|h\|)$$

$$\leq C_2(CC_1\sup_{t\in[0,1]}\|\partial_2 F(x_o+h,y_o+t(f(x_o+h)-y_o))-\partial_2 F(x_o,y_o)\|$$
$$+\sup_{t\in[0,1]}\|\partial_1 F(x_o+th,y_o)-\partial_1 F(x_o.y_o)\|)\underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Letzteres folgt aus der Stetigkeit von F', und damit von $\partial_1 F$ und $\partial_2 F$, in (x_o, y_o).
Also ist f in x_o Fréchet–differenzierbar und es gilt die behauptete Formel für $f'(x_o)$. Damit ist alles bewiesen. $\square$

Folgerung 5.63 *(Satz über die inverse Funktion)*
$g : D(g) \to I\!R^m$, $D(g) \subseteq I\!R^m$, sei in einer Umgebung von $y_o \in$ int $(D(g))$ Fréchet–differenzierbar, g' sei in y_o stetig und die Matrix $g'(y_o)$ sei regulär. Dann existiert ein $r > 0$, so daß mit $g(z_o) = x_o$ folgendes gilt:

(i) *Für alle $x \in \bar{B}(x_o, r)$ hat die Gleichung $g(y) = x$ genau eine Lösung $f(x) = g^{-1}(x)$; und*

(ii) *die Funktion* $g^{-1} : \bar{B}(x_o, r) \to I\!\!R^m$ *ist Lipschitzstetig, sowie in* x_o *Fréchet–differenzierbar mit der Ableitung*

$$(g^{-1})'(x_o) = [g'(y_o)]^{-1}.$$

Beweis:
Wir definieren $F : I\!\!R^m \times D(g) \to I\!\!R^m$, $F(x, y) := g(y) - x$, $\forall y \in D(g)$, $\forall x \in I\!\!R^m$. Nach Voraussetzung ist F in einer Umgebung U von $(x_o, y_o) = (g(y_o), y_o)$ Fréchet–differenzierbar mit der Ableitung

$$F'(x, y)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \partial_1 F(x, y)u + \partial_2 F(x, y)v = -u + g'(y)v.$$

d.h. $\partial_1 F(x, y) = -I$ (I Identität), $\partial_2 F(x, y) = g'(y)$, $\forall (x, y) \in U$. Deshalb ist nach Voraussetzung Satz 5.62 anwendbar, und die Aussagen (i) und (ii) folgen aus denen von 5.62. □

Bemerkung 5.64
Satz 5.62 ist eine Aussage über die lokale *Existenz und Eindeutigkeit einer Funktion* f *mit* $f(x_o) = y_o$ *und* $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in D(f)$ *(d.h. in hinreichend kleinen Kugeln um* x_o *bzw.* y_o*).*
Neben den "Glattheits"–Voraussetzungen an F *ist dafür die Bedingung, daß* $\partial_2 F(x_o, y_o)$ *regulär ist, entscheidend. Ist diese Bedingung verletzt, d.h. ist* $\partial_2 F(x_o, y_o)$ *singulär, so ist die Situation i.a. nicht mehr überschaubar. Z.B. sind folgende Situationen denkbar:*

(Wendepunkt) (Verzweigung) (Kontinuum von Lösungen) (keine Lösung)

Dies ist Ansatzpunkt für moderne Entwicklungen in der (nichtlinearen) Analysis, z.B. für die sog. Verzweigungstheorie.

Die Lipschitzkonstante der nach Satz 5.62 existierenden impliziten Funktion $f : X_o \to I\!R^m$ wird im wesentlichen bestimmt durch die Konstante

$$\|[\partial_2 F(x_o, y_o)]^{-1}\| \|\partial_1 F(x_o, y_o)\|!$$

Setzt man in Satz 5.62 etwas stärker voraus, daß F' (sogar) in einer Umgebung von (x_o, y_o) stetig ist, so ist, bei hinreichend kleiner Wahl von r_2, f auch Fréchet–differenzierbar auf $B(x_o, r_2)$, und es folgt aus der Gleichung

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in B(x_o, r_2),$$

nach der Kettenregel

$$\partial_1 F(x, f(x)) + \partial_2 F(x, f(x)) f'(x) = 0, \quad \forall x \in B(x_o, r_2).$$

Beispiele 5.65

a) $F : I\!R^k \times I\!R \to I\!R$, $F(x, y) := y^k + \sum_{j=1}^{k} x_j y^{k-j}$, $\forall x \in I\!R^k \forall y \in I\!R$,

d.h. die Koeffizienten eines Polynoms werden als Parameter betrachtet. Die Anwendung von Satz 5.62 auf die Gleichung $F(x, y) = 0$ ist dann die Frage nach der Abhängigkeit von Nullstellen des Polynoms bez. seiner Koeffizienten (Differenzierbarkeit?).
Klar ist, daß alle partiellen Ableitungen von F existieren und stetig sind auf $I\!R^k \times I\!R$. Also ist F nach Satz 5.32 Fréchet–differenzierbar und F' ist stetig (auf $I\!R^k \times I\!R$). Es gilt:

$$\partial_1 F(x, y) = (y^{k-1}, \ldots, y, 1), \quad \partial_2 F(x, y) = k y^{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} x_j (k-j) y^{k-j-1}$$

$$(\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in I\!R^k, \quad \forall y \in I\!R).$$

Es sei nun y_o eine Nullstelle des Polynoms $F(x_o, y)$ (für einen gegebenen Koeffizientenvektor x_o) mit der Eigenschaft $\partial_2 F(x_o, y_o) \neq 0$ (man nennt y_o dann eine "einfache Nullstelle" des Polynoms $F(x_o, y)$), so existiert nach Satz 5.62 eine Lipschitzstetige Funktion
$f : \bar{B}(x_o, r_1) \to I\!R$ ($r_1 > 0$ hinreichend klein), so daß
f in x_o Fréchet–differenzierbar ist, $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in \bar{B}(x_o, r_1)$,
und $f(x_o) = y_o$.

Fazit: *Einfache Nullstellen hängen Fréchet–differenzierbar von den Koeffizienten des zugehörigen Polynoms ab!*

b) *Läßt sich Satz 5.62 globalisieren (d.h. globale Existenz der impliziten Funktion f), falls alle Voraussetzungen global gültig sind?*
Anwort: Nein, i.a. nicht!
Wir zeigen dies am in Folgerung 5.63 behandelten Spezialfall, indem wir für $m > 1$ eine Funktion $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ angeben mit den Eigenschaften: g ist Fréchet–differenzierbar, g' ist stetig und $g'(x)$ is regulär für alle $x \in \mathbb{R}^m$, aber g ist nicht injektiv!
(Für $m = 1$ würde g streng monoton und folglich injektiv (4.49)!)

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) := \exp(x_1) \begin{pmatrix} \cos & x_2 \\ \sin & x_2 \end{pmatrix}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$\rightsquigarrow g \in C^1(\mathbb{R}^2)$
$\rightsquigarrow g'(x_1, x_2) = J_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \exp(x_1)\cos(x_2) & -\exp(x_1)\sin(x_2), \\ \exp(x_1)\sin(x_2) & \exp(x_1)\cos(x_2) \end{pmatrix},$
$\rightsquigarrow \det(g'(x_1, x_2)) = \exp(2x_1)(\cos^2(x_2) + \sin^2(x_2)) = \exp(2x_1) > 0,$
$\rightsquigarrow$ *lokal um jeden Punkt in $\mathbb{R}^2$ existiert die inverse Funktion g^{-1}!*
Aber: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist nicht injektiv, wegen $g(x_1, x_2 + 2\pi) = g(x_1, x_2)$!

6 Integralrechnung

Für den Integralbegriff gibt es zwei wesentliche Motivationen:

(1) Berechnung von Flächen- bzw. Rauminhalten von Körpern, und

(2) die "Umkehrung" der Differentiation, d.h. die Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer Ableitung.

Beide Modivationen hängen eng zusammen. Wir beginnen mit (1) und der Definition des sog. Riemann-Integrals. Später zeigen wir, daß es enge Zusammenhänge zwischen dem Riemann-Integral und der Umkehrung der Differentiation gibt. Anschließend gehen wir noch auf Erweiterungen der bis dahin dargelegten Integralrechnung ein: das uneigentliche Integral und das Riemann-Stieltjes-Integral.

6.1 Das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^m$

Wir betrachten Funktionen $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}^m$, und definieren (schrittweise) Riemann-Integrale über immer komplizierteren Mengen, beginnend mit m-dimensionalen kompakten Intervallen $I \subseteq D(f)$ (oder "Quadern")

Definition 6.1

a) *Für beliebige a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, m$, heißt die Menge $I := \bigtimes_{i=1}^{m} [a_{i,i}]$ $\underline{m\text{-dimensionales kompaktes Intervall}}$.*
$\mu(I) := \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$ heißt $\underline{\text{Maß}}$ (bzw. Inhalt) von I.

b) *Ist $I := \bigtimes_{i=1}^{m}$ ein m-dimensionales kompaktes Intervall und sind $Z_i := \{x_{i0}, x_{i1}, \ldots, x_{i,n(i)}\}$ Zerlegungen von $[a_i, b_i]$ $(i = 1, \ldots, m)$, d.h. $a_i = x_{i0} < x_{i1} < \ldots < x_{i,n(i)} = b_i$, so heißt*
$Z := \bigtimes_{i=1}^{m} Z_i$ $\underline{\text{Zerlegung}}$ von I.
$\underline{\mathcal{Z}(I)}$ bezeichne die Menge aller Zerleugngen von I.

Bemerkung 6.2
Ist $Z = \bigtimes_{i=1}^{m} Z_i \in \mathcal{Z}(I)$, so kann man alle möglichen kartesischen Produkte von m Intervallen, die aus jeweils zwei aufeinanderfolgenden Punkten der Zerlegungen $Z_1, \ldots, Z_m$ gebildet werden, erzeugen. Man erhält dadurch eine gewisse Anzahl M (kleinerer) m-dimensionaler Intervalle $I_1, \ldots, I_M$, d.h.

$$I_k = \bigtimes_{i=1}^{m} [x_{i,k_i}, x_{i,k_i+1}],\ k_i = k_i(j) \in \{0, \ldots, n(i) - 1\}, i = 1, \ldots, m.$$

Für diese Intervalle gilt: $I = \bigcup\limits_{j=1}^{M} I_j$, $\overset{\circ}{I}_j \cap \overset{\circ}{I}_k = \emptyset$, $k \neq j$, *und*

$$\mu(I) = \sum_{j=1}^{M} \mu(I_j).$$

Eine Zerlegung $\tilde{Z} \in \mathcal{Z}(I)$ *heißt* *<u>Verfeinerung</u>* *von* Z, *falls* $\tilde{Z} \supseteq Z$.
Hat $\tilde{Z}$ *dabei die Gestalt* $\tilde{Z} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} \tilde{Z}_i$, *so bedeutet Verfeinerung:* $\tilde{Z}_i \supseteq Z_i$, $\forall i = 1, \ldots, m$.

Definition 6.3
Es sei I *ein* m*-dimensionaler kompaktes Intervall und* $f : I \to I\!R$ *beschränkt, d.h.* $f \in B(I, I\!R)$. *Für jede Zerlegung* $Z \in \mathcal{Z}(I)$ *mit den "Teilintervallen"* I_j, $j = 1, \ldots, M$ *(vgl. 6.2) heißen*

$$s(Z; f) := \sum_{j=1}^{M} \inf_{x \in I_j} f(x)\mu(I_j) \quad \text{bzw.} \quad S(Z; f) := \sum_{j=1}^{M} \sup_{x \in I_j} f(x)\mu(I_j)$$

die *<u>Darboux'sche Untersumme</u>* *bzw.* *<u>Obersumme</u>* *bez.* f *und* Z.
Wir nennen weiterhin

$$J_u := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(I)} s(Z; f) \quad \text{bzw.} \quad J_o := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(I)} S(Z; f)$$

das *<u>Unter-Integral</u>* *bzw.* *<u>Ober-Integral von f über I.</u>*

Lemma 6.4
Es sei I *ein* m*-dimensionales kompaktes Interval und* $f \in B(I, I\!R)$. *Dann gilt für jedes* $Z \in \mathcal{Z}(I)$:
$-\infty < \inf\limits_{x \in I} f(x) \cdot \mu(I) \leq s(Z; f) \leq J_u \leq J_o \leq S(Z; f) \leq \sup\limits_{x \in I} f(x)\mu(I) < +\infty.$

<u>Beweis:</u>
Nach Definition und Konstruktion sind die folgenden Ungleichungen klar:

$S(Z; f) \leq J_u, \quad J_o \geq S(Z; f), \quad s(Z; f) \leq S(Z; f)$

$$-\infty < \inf_{x \in I} f(x) \cdot \mu(I) \leq \inf_{x \in I} f(x) \sum_{j+1}^{M} \mu(I_j) \leq \sum_{j=1}^{M} \inf_{x \in I_j} f(x)\mu(Ij) = s(Z; f)$$

und analog die beiden rechten Ungleichungszeichen in der Kette.
Es bleibt zu zeigen: $J_u \leq J_o$.
Sind zunächst Z und $\tilde{Z}$ Zerlegungen von I und ist $\tilde{Z}$ eine Verfeinerung von Z. Dann setzt sich jedes Teilintervall I_j von A evtl. aus mehreren Teilintervallen $\tilde{I}j$ von $\tilde{Z}$ zusammen, d.h. es gilt z.B.

$$\inf_{x \in I_j} f(x)\mu(I_j) \leq \sum_{j} \inf_{x \in \tilde{I}_{j_i}} f(x)\mu(\tilde{I}_{j_i}),$$

was (durch aufsummieren über j) zur Ungleichung

$s(Z;f) \leq s(\tilde{Z},f) \leq S(\tilde{Z};f) \leq S(Z;f)$ führt.

Sind ferner Z und $\bar{Z}$ zwei beliebige Zerlegungen von I und ist $\tilde{Z}$ eine "gemeinsame Verfeinerung" von Z und $\bar{Z}$, d.h. eine Zerlegung von I, die sowohl die Zerlegungspunkte zon Z als auch die von $\bar{Z}$ enthält. Dann gilt:

$s(Z;f) \leq s(\tilde{Z};f) \leq S(\tilde{Z};f) \leq S(\bar{Z};f)$.

Daraus folgt: $J_u = \sup\limits_{Z\in\mathcal{Z}(I)} s(Z;f) \leq S(\tilde{Z};f)$, $J_u \leq \inf\limits_{Z\in\mathcal{Z}(I)} S(\tilde{Z};f) = J_o$
Also gilt: $J_u \leq J_o$. □

Definition 6.5
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^m$ ein m-dimensionales Intervall und $f \in B(I,\mathbb{R})$. J_u und J_o seien das Unter-Integral bzw. das Ober-Integral von f über I. Falls $J_u = J_o$, so heißt f über I Riemann-integrierbar und $\int\limits_I f(x)dx := J_u = J_0$ heißt Riemann-Integral von f über I.
Das soeben definierte Integral heißt manchmal auch Darboux-Integral (z.B. im Heuser, wo aber später gezeigt wird, daß es mit dem dort etwas anders eingeführten Riemann-Integral übereinstimmt).

Ehe wir zu Eigenschaften und zur Berechnung des Riemann-Integrals kommen, wenden wir uns der Frage nach der Charakterisierung Riemann-integrierbarer Funktionen zu. Unser erstes Beispiel zeigt, daß nicht alle beschränkten Funktionen Riemann-integrierbar sind. Anschließend kommen wir zu einer ersten positiven Antwort.

Beispiel 6.6
Wir setzen $m := 1$, $I := [0,1]$ und $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 1, & x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$, d.h. f ist die Dirichlet-Funktion auf $[0,1]$.
Wir wissen: f ist nirgends stetig (vgl. Bsp. 4.5a)).
Ist nun Z eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$, so folgt nach Definition:
$s(Z;f) = 0$, $S(Z;f) = 1$.
$\rightsquigarrow$ $J_u = 0$ *und* $J_0 = 1$
$\rightsquigarrow$ *f ist nicht Riemann-integrierbar über I!*

Satz 6.7 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^m$ ein m-dimensionales kompaktes Intervall. Dann ist jede Funktion $f \in C(I)$ Riemann-integrierbar.*

Beweis:
Wir wählen $\varepsilon > 0$ beliebig und zeigen: $0 \leq J_o - J_u < \varepsilon$.

Nach Voraussetzung ist f auf I gleichmäßig stetig (Satz 4.20). Folglich existiert $\delta > 0$, so daß

$$|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{\mu(I)}, \quad \text{falls } x, \tilde{x} \in I \text{ mit } \|x - \tilde{x}\| < \delta.$$

Wir wählen nun $Z \in \mathcal{Z}(I)$ so, daß $\max\limits_{j=1,\ldots,M} \operatorname{diam}(I_j) < \delta$. Weiter gilt $\forall j \in \{1, \ldots, M\} \exists \bar{x}_j, \tilde{x}_j \in I_j$, so daß

$f(\bar{x}_j) = \inf\limits_{x \in I_j} f(x), \quad f(\tilde{x}_j) = \sup\limits_{x \in I_j} f(x) \quad$ (Satz 4.13).

$$\rightsquigarrow 0 \le J_o - J_u \le S(Z; f) - s(Z; f) = \sum_{j=1}^{M} (\sup_{x \in J_i} f(x) - \inf_{x \in J_i} f(x)) \mu(I_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{M} (f(\tilde{x}_j) - f(\bar{x}_j)) \mu(I_j) < \frac{\varepsilon}{\mu(I)} \sum_{j=1}^{M} \mu(I_j) = \varepsilon$$

(wegen $\|\bar{x}_j - \tilde{x}_j\| \le \operatorname{diam}(I_j) < \delta$, $\forall j = 1, \ldots, M$). □

Unser nächstes Ziel besteht nun darin, die Klasse aller Riemann-integrierbaren Funktionen genau zu charakterisieren. Es wird sich zeigen, daß Riemann-integrierbare Funktionen "im wesentlichen" stetig sind. Dazu benötigen wir aber noch einige Vorbereitungen.

Definition 6.8
$A \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt Nullmenge (oder "Menge vom Maß 0"), wenn $\forall \varepsilon > 0$ eine höchstens abzählbare Menge $\{I_j : j \in \mathcal{J}\}$ von m-dimensionalen kompakten Intervallen existiert, so daß

$$A \subseteq \bigcup_{j \in \mathcal{J}} I_j \quad \textit{und} \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu(I_j) < \varepsilon.$$

Lemma 6.9

a) *Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.*

b) *Endliche oder abzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ sind Nullmengen.*

c) *Die Vereinigung höchstens abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.*

d) *Eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^m$ ist eine Nullmenge gdw. $\forall \varepsilon > 0$ existiert eine endliche Menge $\{I_j : j = 1, \ldots, r\}$ von m-dim. kompakten Intervallen, so daß*

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} I_j \quad \textit{und} \quad \sum_{j=1}^{r} \mu(I_j) < \varepsilon.$$

Beweis:

a) ist offensichtlich nach Def. 6.8.

b) Es sei $\{x_j : j \in \mathcal{J}\}$ eine höchstens abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dabei o.B.d.A. $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{N}$.
Wir definieren $I_j := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_j\|_\infty \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)^{\frac{1}{m}}\}$, $\forall j \in \mathcal{J}$ (wobei $\|y\|_\infty := \max\limits_{i=1,\dots,m} |y_i|$, vgl. 1.41).

$$\rightsquigarrow \{x_j : j \in \mathcal{J}\} \subseteq \bigcup_{j \in \mathcal{J}} I_j \quad \text{und} \mu(I_j) = \prod_{i=1}^{m} (\frac{\varepsilon}{2^{j+1}})^{\frac{1}{m}} = \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu(I_j) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Seien $\{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ höchstens abzählbar viele Nullmengen, wobei o.B.d.A. $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$.
Wir setzen $A := \bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i$ und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.
$\rightsquigarrow$ $\exists$ höchstens abzählbare Mengen $\{I_{ij} : j \in \mathcal{J}_i\}$ (o.B.d.A. $\mathcal{J}_i \subseteq \mathbb{N}$) von m-dimensionalen kompakten Intervallen, so daß
$$A_i \subseteq \bigcup_{j \in \mathcal{J})_i} I_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \mu(I_{ij}) < \tfrac{\varepsilon}{2^i}, \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$
$\rightsquigarrow$ $\{I_{ij} : j \in \mathcal{J}_i, i \in \mathcal{I}\}$ ist höchstens abzählbar (vgl. Kap. 1.3) und es gilt
$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \bigcup_{j \in \mathcal{J}_i} I_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \mu(I_{ij}) < \varepsilon \sum_{i \in \mathcal{I}} \tfrac{1}{2^i} \leq \varepsilon.$$
$\rightsquigarrow$ A ist Nullmenge.

d) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ eine kompakte Nullmenge und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt
$\rightsquigarrow$ $\exists$ höchstens abzählbare Menge $\{I_j : j \in \mathcal{J}\}$ von m-dim. kompakten Invervallen, so daß

$$K \subseteq \bigcup_{j \in \mathcal{J}} I_j \quad \text{und} \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu(I_j) < \varepsilon.$$

O.B.d.A. seien I_j, $j \in \mathcal{J}$, so groß gewählt, daß $K \subseteq \bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}} \mathring{I}_j$.
Da K kompakt ist, existieren nach Satz 2.43 (Heine/Borel) bereits endlich viele dieser I_j ($j \in \mathcal{J}$), so daß K von ihnen überdeckt wird. Die umgekehrte Richtung ist trivial.

$\square$

Beispiel 6.10
Jede Hyperebene $H := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_s = c\}$ *(*$s \in \{1, \dots, m\}$ *und* $c \in \mathbb{R}$ *fixiert) ist eine Nullmenge.*

Bew.: *Sei* $\varepsilon > 0$ *beliebig gewählt und wir definieren* $I_j := \bigtimes_{i=1}^{s} [a_{ij}, b_{ij}]$
wobei $a_{ij} := -j$, $b_{ij} := j$, $\forall i \neq s$, $\forall j \in \mathbb{N}$,
$a_{sj} := c - \frac{\varepsilon}{2^{j+2}(2j)^{m-1}}$, $b_{sj} := c + \frac{\varepsilon}{2^{j+2}(2j)^{m-1}}$.

$$\rightsquigarrow H \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (2j)^{m-1} \frac{2\varepsilon}{2^{j+2}(2j)^{m-1}} = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \square$$

Im folgenden verwenden wir den in Kapitel 4.1 eingeführten Begriff der Oszillation einer Funktion: $f : D(f) \to \mathbb{R}$ in $x \in D(f)$ (vgl. Def. 4.24):

$$\begin{aligned} \omega(f;x) \; &;= \; \inf\{\mathrm{diam} f(U \cap D(f)) : U \text{ ist Umgebung von } x \in D(f)\} \\ &= \; \inf\{\sup_{\bar{x},\tilde{x} \in U} |f(\bar{x}) - f(\tilde{x})| : U \text{ ist Umgebung von } x \in D(f)\} \end{aligned}$$

Lemma 6.11
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^m$ *ein m-dimensionales kompaktes Intervall und* $f \in B(I, \mathbb{R})$. *Dann gilt:*

a) *Ist* $\varepsilon > 0$ *und gilt* $\sup_{x \in I} \omega(f;x) < \varepsilon$, *so existiert ein* $Z \in \mathcal{Z}(I)$, *so daß* $S(Z;f) - s(Z;f) < \varepsilon\mu(I)$.

b) *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *ist die Menge* $D_\varepsilon := \{x \in I : \omega(f;x) \geq \varepsilon\}$ *kompakt.*

Beweis:

a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und es gelte $\omega(f;x) < \varepsilon' < \varepsilon$, $\forall x \in I$. Dann existiert für jedes $x \in I$ ein $\delta(\varepsilon, x) > 0$, so daß
$|f(\bar{x}) - f(\tilde{x})| < \varepsilon'$, falls $\bar{x}, \tilde{x} \in \bar{B}_\infty(x, \delta(\varepsilon, x)) := \{y : \|x-y\|_\infty \leq \delta(\varepsilon, x)\}$.
$\rightsquigarrow$ $(B_\infty(x, \delta(\varepsilon, x)))_{x \in I}$ ist eine Überdeckung für die kompakte Menge I.
$\rightsquigarrow$ nach Satz 2.43 existieren $x_1, \dots, x_r \in I$ mit der Eigenschaft
$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B_\infty(x_i, \delta(\varepsilon, x_i))$.

Wir definieren $\tilde{I}_i := I \cap \bar{B}_\infty(x_i, \delta(\varepsilon, x_i))$, $\forall i \in 1, \dots, r$, und wählen nun eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(I)$ so, daß für ihre Teilintervalle I_j, $j = 1, \dots, M$ gilt:
$\forall j \in \{1, \dots, M\} \exists i \in \{1, \dots, r\} : I_j \subseteq \tilde{I}_i$, d.h. die I_j, $j = 1, \dots, M$, stellen eine "Verfeinerung" der Intervalle $\tilde{I}_i$, $i = 1, \dots, r$, dar.

$$\rightsquigarrow S(Z;f) - s(Z;f) \; = \; \sum_{j=1}^{M} (\sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x))\mu(I_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{M} \sup_{x,\tilde{x}\in I_j} |f(x) - f(\tilde{x})|\mu(I_j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{M} \varepsilon' \mu(I_j) < \varepsilon\mu(I).
\end{aligned}
$$

b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und es sei (x_n) eine Folge in D_ε mit $x_n \to x \in I\!R^m$. Zu zeigen: $x \in D_\varepsilon$,
(d.h. $\mathrm{diam} f(U \cap I) \geq \varepsilon, \forall$ Umgebungen U von x.
Es gilt: $\omega(f; x_n) \geq \varepsilon, \forall n \in I\!N$, zu zeigen bleibt also: $\mathrm{diam}(f(\bar{B}(x,\delta) \cap I) \geq \varepsilon, \forall \delta > 0$.
Sei also $\delta > 0$ beliebig gewählt.
$\rightsquigarrow$ $\exists n_0 \in I\!N : \|x - x_n\| \leq \frac{\delta}{2}, \forall n \geq n_0$.
$\rightsquigarrow$ $\varepsilon \leq \omega(f; x_{n_0}) \leq \mathrm{diam} f(\bar{B}(x_{n_0}, \frac{\delta}{2}) \cap I)$
$\leq \mathrm{diam} f(\bar{B}(x,\delta) \cap I)$, da $\bar{B}(x_{n_0}, \frac{\delta}{2}) \subseteq \bar{B}(x,\delta)$
$\rightsquigarrow$ da $\delta > 0$ ganz beliebig gewählt war, folgt daraus für jede Umgebung U von x:
$\varepsilon \leq \mathrm{diam} f(U \cap I) \rightsquigarrow \varepsilon \leq \omega(f; x)$. □

Satz 6.12 *(Lebesgue)*
Es sei $I \subseteq I\!R^m$ ein m-dimensionales kompaktes Intervall und $f : B(I, I\!R)$. f ist Riemann-integrierbar über I gdw. eine Nullmenge $A \subseteq I$ existiert, so daß f auf $I \backslash A$ stetig ist.

Beweis:
($\Longleftarrow$) Es existiere eine Nullmenge $A \subseteq I$, so daß f stetig auf $I \backslash A$ ist. Wir betrachten die Menge $D := \{x \in I : \omega(f; x) \neq 0\}$, die nach Satz 4.25 genau die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f auf I ist.
Folglich gilt $D \subseteq A$ und D ist Nullmenge nach 6.9a).
Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.
Wir zeigen: $0 \leq J_0 - J_u < \varepsilon$.
Es sei $K > 0$ so gewählt, daß $\sup\limits_{x\in I} |f(x)| \leq K$.
Nach Definition gilt: $D_\delta : \{x \in I : \omega(f; x0 \geq \delta\} \subseteq D, \forall \delta > 0$.
Wir wählen $\delta > 0$ so, daß $\delta < \frac{\varepsilon}{2\mu(I)}$.
Nach Lemma 6.11b) ist D_δ eine kompakte Nullmenge und nach Lemma 6.9d) existieren, folglich, m-dimensionale kompakte Intervalle $\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_r$, so daß

$$
D_\delta \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} \tilde{I}_j \quad \text{und} \quad \bigcup_{j=1}^{r} \mu(\tilde{I}_j) < \frac{\varepsilon}{4K}.
$$

Wir wählen nun eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(I)$ mit den Teilintervallen I_j, $j = 1, \ldots, M$, so daß $\forall j \in \{1, \ldots, M\} \forall i \in \{1, \ldots, r\}$ entweder $I_j \subseteq \tilde{I})_i$ oder $I_j \cap \mathrm{int}(\tilde{I}_i) = \emptyset$ gilt. Wir definieren nun

$\mathcal{J}_1 := \{j : \{1, \ldots, M\} : \exists i \in \{1, \ldots, r\}$ so daß $I_j \subseteq \tilde{I}_i\}$
$\mathcal{J}_2 := \{1, \ldots, M\} \backslash \mathcal{J}_1$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{J}_1} (\sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x)) \mu(I_j) &\leq 2K \sum_{j \in \mathcal{J}_1} \mu(I_j) \\ &\leq 2K \sum_{i=1}^{r} \mu(\tilde{I}_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Für $j \in \mathcal{J}_2$ gilt dagegen $I_j \cap D_\delta = \emptyset$ (falls die I_j evtl. ein wenig vergrößert werden, so daß sogar

$$D_\delta \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} \operatorname{int}(\tilde{I}_j) \quad \text{gilt).}$$

Daraus folgt also: $\omega(f; x) < \delta$, $\forall x \in I_j \forall j \in \mathcal{J}_2$.
Deshalb können wir Lemma 6.11a) sukzessive auf jedes I_j, $j \in \mathcal{J}_2$, anwenden und erhalten insgesamt eine Verfeinerung Z^* von Z mit den Teilintervallen I_i^*, $i = 1, \ldots, M^*$, so daß $\forall j \in J_2$ gilt:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ I_i^* \subseteq I_j}}^{M^*} (\sup_{x \in I_i^*} f(x) - \inf_{x \in I_i^*} f(x)) \mu(I_i^*) < \delta \mu(I_j) = \frac{\varepsilon}{2\mu(I)} \mu(I_j)$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow J_o - J_u \leq S(Z^*; f) - s(Z^*; f) &= \sum_{i=1}^{M^*} (\sup_{x \in I_i^*} f(x) - \inf_{x \in I_I^*} f(x)) \mu(I_i^*) \\ &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}_1} (\sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x)) \mu(I_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ I_i^* \subseteq I_j \\ j \in \mathcal{J}_2}}^{M^*} (\sup_{x \in I_i^*} f(x) - \inf_{x \in I_i^*} f(x)) \mu(I_i^*) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} \frac{\varepsilon}{2\mu(I)} \mu(I_j) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die erste Richtung vollständig bewiesen.
($\Longrightarrow$) Es sei f Riemann-integrierbar über I und wir betrachten wie im ersten Teil des Beweises die Menge $D := \{x \in I : \omega(f; x) \neq 0\}$ aller Unstetigkeitsstellen von f.
Es genügt zu zeigen: D ist Nullmenge.
Ist D_δ, $\forall \delta > 0$, wie im ersten Teil definiert, so gilt: $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{\frac{1}{n}}$. Nach Lemma 6.9c) ist es also ausreichend, zu zeigen:

$D_{\frac{1}{n}}$ ist Nullmenge für jedes $n \in I\!N$.

Es seien $\varepsilon > 0$ und $n \in I\!N$ beliebig gewählt.
Da f Riemann-integrierbar über I ist, gilt: $J_0 = J_u$. Folglich existieren Zerlegungen $\tilde{Z}, \bar{Z} \in \mathcal{Z}(I)$ mit

$$S(\tilde{Z}; f) - s(\bar{Z}; f) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Ist $Z \in \mathcal{Z}(I)$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\tilde{Z}$ und $\bar{Z}$, d.h. $\bar{Z}$, d.h. $Z \supseteq \tilde{Z}$ und $Z \supseteq \bar{Z}$, so folgt wie im Beweis von Lemma 6.4

$$s(\bar{Z}; f) \leq s(Z; f) \leq S(Z; f) \leq S(\tilde{Z}; f).$$

Es folgt also: $S(Z; f) - s(Z; f) < \frac{\varepsilon}{n}$
Es seien I_j, $j = 1, \ldots, M$, die Teilintervalle der Zerlegung Z und wir definieren die Indexmenge

$$J := \{j \in \{1, \ldots, M\} : I_j \cap D_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset\}.$$

D.h. $\forall j \in \mathcal{J} \exists x \in I_j$ mit $\omega(f; x) \geq \frac{1}{n}$, d.h. insbesondere

$$\sup_{\bar{x}, \tilde{x} \in \bar{B}(x,\delta) \cap I} |f(\bar{x}) - f(\tilde{x})| \geq \frac{1}{n}, \quad \forall \delta > 0.$$

Nun gilt aber $D_{\frac{1}{n}} \subseteq \bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}} I_j \subseteq \bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}} \overset{\circ}{I}_j \cup A_R$, wobei A_R die Menge aller "Ränder" der I_j ist, die wiederum in einer endlichen Anzahl von Hyperebenen (vgl. 6.10) enthalten sind. Nach Beispiel 6.10 und Lemma 6.9a) und c) ist A_R eine Nullmenge.

Es genügt deshalb, zu beweisen: $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}} (\overset{\circ}{I}_j \cap D_{\frac{1}{n}})$ ist Nullmenge.

Ist aber $x \in \overset{\circ}{I}_j \cap D_{\frac{1}{n}}$ für ein $j \in \mathcal{J}$, so kann man $\delta > 0$ so klein wählen, daß

$$\bar{B}(x, \delta) \subseteq I_j \quad \text{und deshalb}$$

$$\sup_{\bar{x}, \tilde{x} \in I_j} |f(\tilde{x}) - f(\bar{x})| \geq \sup_{\bar{x}, \tilde{x} \in \bar{B}(x,\delta) \cap I} |f(\tilde{x}) - f(\bar{x})| \geq \frac{1}{n}.$$

Ist also $\mathcal{J}^* := \{j \in \mathcal{J} : \overset{\circ}{I}_j \cap D_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset\}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{j \in \mathcal{J}^*} \mu(I_j) &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}^*} \sup_{\bar{x}, \tilde{x} \in I_j} |f(\bar{x}) - f(\tilde{x})| \mu(I_j) \\
&= \sum_{j \in \mathcal{J}^*} (\sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x)) \mu(I_j) \\
&\leq S(Z; f) - s(Z; f) < \frac{\varepsilon}{n}.
\end{aligned}$$

Also gilt $\sum\limits_{j\in\mathcal{J}^*} \mu(I_j) < \varepsilon$ und $\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} (\overset{\circ}{I}_j \cap D_{\frac{1}{n}}) \subseteq \bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}^*} I_j$.

$\rightsquigarrow D_{\frac{1}{n}}$ ist Nullmenge und alles ist bewiesen. $\square$

Folgerung 6.13

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a,b \in \mathbb{R}, a < b)$ beschränkt und hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, so ist f Riemann-integrierbar. Insbesondere sind monotone Funktionen Riemann-integrierbar über kompakten Intervallen in $\mathbb{R}$.

Beweis:

folgt aus Satz 6.12 und Lemma 6.9b). Der Spezialfall resultiert insbesondere aus Folgerung 4.55. $\square$

Die Lebesgue'sche Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit in Satz 6.12 wird uns im folgenden bei der Herleitung von Eigenschaften des Riemann-Integrals bzw. beim weiteren Aufbau der Integralrechnung wertvolle Dienste leisten.

Satz 6.14

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^m$ ein m-dimensionales kompaktes Intervall und $f, g \in B(I, \mathbb{R})$ seien Riemann-integrierbar. Dann gilt:

a) *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int\limits_I (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int\limits_I f(x)dx + \beta \int\limits_I g(x)dx.$$

b) *Falls $f(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, so gilt $\int\limits_I f(x)dx \geq 0$.*

c) *$|f|$ ist Riemann-integrierbar und es gilt $|\int\limits_I f(x)dx| \leq \int\limits_I |f(x)|dx$.*

Beweis:

Die Riemann-Integrierbarkeit von $\alpha f + \beta g$ und von $|f|$ folgt jeweils sofort aus Satz 6.12.

a) Es sei zunächst $\alpha = \beta = 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existieren nach Voraussetzung und analog zum Beweis von Satz 6.12 Zerlegungen $Z, \tilde{Z} \in \mathcal{Z}(I)$ mit

$$0 \leq S(Z; f) - s(Z; f) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq S(\tilde{Z}; g) - s(\tilde{Z}; g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\rightsquigarrow -\frac{\varepsilon}{2} < s(Z;f) - S(Z;f) < s(Z;f) - \int_I f(x)dx$$

$$\rightsquigarrow -\frac{\varepsilon}{2} < s(\tilde{Z};g) - S(\tilde{Z};g) < s(\tilde{Z};g) - \int_I g(x)dx$$

Es sei nun Z^* eine gemeinsame Verfeinerung von Z und $\tilde{Z}$, d.h. $Z^* \supseteq Z \cup \tilde{Z}$, mit den Teilintervallen I_j, $j = 1, \dots, M$.
Dann gilt zunächst:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} < s(Z;f) - \int_I f(x)dx \leq s(Z^*;f) - \int_I f(x)dx \quad \text{(Lemma 6.4)} \\ \leq S(Z^*;f) - \int_I f(x)dx \leq S(Z;f) - \int_I f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(und analoges für $\tilde{Z}$ bzw. g anstelle von Z bzw. f), und

$$\begin{aligned} s(Z^*;f+g) &= \sum_{j=1}^{M} \inf_{x \in I_j} (f+g)(x)\mu(I_j) \geq s(Z^*;f) + s(Z^*;g) \\ S(Z^*;f+g) &= \sum_{j=1}^{M} \sup_{x \in I_j} (f+g)(x)\mu(I_j) \leq S(Z^*;f) + S(Z^*;g). \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< s(Z;f) + s(\tilde{Z};f) - (\int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx) \\ &\leq s(Z^*;f+g) - (\int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx) \\ &\leq S(Z^*;f+g) - (\int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx) \\ &\leq (S(Z;f) - \int_I f(x)dx) + (S(\tilde{Z};g) - \int_I g(x)dx) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt: $-\varepsilon < \int_I (f+g)(x)dx - (\int_I f(x)dx + \int_I g(g)dx) < \varepsilon$

wegen $\quad s(Z^*;f+g) \leq \int_I (f+g)(x)dx \leq S(Z^*;f+g).$

Wir haben nun die Aussage für $\alpha = \beta = 1$ gezeigt!
Es bleibt zu zeigen: $\int_I (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_I f(x)dx$, $\forall \alpha \in I\!R$.

Sei zunächst $\alpha \geq 0$. Dann gilt:

$$\int_I (\alpha f)(x)dx = \sup_{Z\in\mathcal{Z}(I)} s(Z;\alpha f) = \sup_{Z\in\mathcal{Z}(I)} \alpha s(Z;f) = \alpha \int_I f(x)dx.$$

Ferner erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_I (-f)(x)dx &= \sup_{Z\in\mathcal{Z}(I)} s(Z;-f) = \sup_{z\in\mathcal{Z}(I)} -S(Z;f)\\ &= -\inf_{Z\in\mathcal{Z}(I)} S(Z;f) = -\int_I f(x)dx.\end{aligned}$$

Damit ist Teil a) vollständig bewiesen!

b) Es gelte $f(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. Dann folgt:

$$\int_I f(x)dx = \sup_{Z\in\mathcal{Z}(I)} s(Z;f) \geq \sum_{j=1}^{M} \inf_{x\in I_j} f(x)\mu(I_j) \geq 0.$$

c) Es gilt: $|f| \pm f \geq 0$. Folglich ergibt sich aus a) und b):

$$\int_I |f(x)|dx \pm \int_I f(x)dx = \int_I (|f(x)| \pm f(x))dx \geq 0.$$

Also: $-\int_I |f(x)|dx \leq \int_I f(x)dx \leq \int_I |f(x)|dx$ und die Behauptung folgt.
□

Satz 6.15
Es seien I, $I^{(1)}$ und $I^{(2)}$ m-dimensionale kompakte Intervalle und es gelte $I = I^{(1)} \cup I^{(2)}$ und $\operatorname{int}(I^{(1)}) \cap \operatorname{int}(I^{(2)}) = \emptyset$.
Es sei $f \in B(I,\mathbb{R})$ Riemann-integrierbar über I.
Dann ist f auch Riemann-integrierbar über $I^{(1)}$ und $I^{(2)}$ und es gilt

$$\int_I f(x)dx = \int_{I^{(1)}} f(x)dx + \int_{I^{(2)}} f(x)dx.$$

<u>Beweis:</u>
Die Riemann-Integrierbarkeit von f über $I^{(1)}$ und $I^{(2)}$ folgt sofort aus der Voraussetzung und aus Satz 6.12. Deshalb existieren für $j = 1,2$ und zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Zerlegungen $Z_j \in \mathcal{Z}(I^{(j)})$, so daß

$$S(Z_j;f) - s(Z_j;f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es sei $Z \in \mathcal{Z}(I)$ derart gewählt, daß $Z \cap I^{(j)}$ eine Verfeinerung von Z_j für $j = 1, 2$ darstellt. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&- \varepsilon + \int\limits_{I^{(1)}} f(x)dx + \int\limits_{I^{(2)}} f(x)dx < s(Z_1; f) + s(Z_2; f) \\
&\quad \leq s(Z \cap I^{(1)}; f) + s(Z \cap I^{\infty}; f) = s(Z; f) \\
&\quad \leq \int\limits_{I} f(x)dx \leq S(Z; f) \leq S(Z \cap I^{(1)}; f) + S(Z \cap I^{(2)}; f) \\
&\leq S(Z_1; f) + S(Z_2; f) < \int\limits_{I^{(1)}} f(x)dx + \int\limits_{I^{(2)}} f(x)dx + \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Satz 6.16 *(Mittelwertsatz)*
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^m$ ein m-dimensionales kompaktes Intervall und $f \in C(I)$. Dann existiert ein $\bar{x} \in I$ mit $\int\limits_I f(x)dx = f(\bar{x})\mu(I)$.

<u>Beweis:</u>
Nach Satz 6.7 (bzw. 6.12) ist f Riemann-integrierbar über I. Nach Lemma 6.4 gilt für alle $Z \in \mathcal{Z}(I)$:

$$\inf_{x \in I} f(x)\mu(I) \leq s(Z; f) \leq \int\limits_I f(x)dx \leq S(Z; f) \leq \sup_{x \in I} f(x)\mu(I)$$

$$\leadsto \qquad \inf_{x \in I} f(x) \leq \frac{1}{\mu(I)} \int\limits_I f(x)dx \leq \sup_{x \in I} f(x).$$

Da f auf I stetig ist, existieren nach Satz 4.13 (Satz von Weierstraß) x_*, $x^* \in I$, so daß

$$f(x_*) = \inf_{x \in I} f(x) \quad \text{und} \quad f(x^*) = \sup_{x \in I} f(x).$$

$$\leadsto \qquad f(x_*) \leq \frac{1}{\mu(I)} \int\limits_I f(x)dx \leq f(x^*).$$

I ist zusammenhängend nach Bsp. 2.45b), 2.46b) und Satz 2.51b). Aus Satz 4.9 (Zwischenwertsatz) folgt: $[f(x_*), f(x^*)] \subseteq f(I)$.
Insbesondere ergibt sich also:

$$\frac{1}{\mu(I)} \int\limits_I f(x)dx \in f(I).$$

d.h. $\exists \bar{x} \in I$ mit $f(\bar{x}) = \frac{1}{\mu(I)} \int\limits_I f(x)dx$.

Satz 6.17
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^m$ ein m-dimensionales kompaktes Intervall.

a) *Es sei $f \in C(I)$ mit $f(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, und $\int\limits_I f(x)dx = 0$. Dann gilt: $f(x) = 0$, $\forall x \in I$.*

b) *Es seien f, $f_n \in B(I, \mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, Riemann-integrierbar über I und es gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_I f_n(x)dx = \int\limits_I f(x)dx.$

Beweis:

a) Annahme: $\exists \tilde{x} \in I : f(\tilde{x}) > 0$.
Wegen der Stetigkeit von f auf I folgt:
$\exists \delta > 0 : f(x) > 0,\ \forall x \in \bar{B}_\infty(\tilde{x}, \delta) := \{y \in I : \|y - \tilde{x}\|_\infty \leq \delta\}$.
Wir zerlegen nun I in endlich viele Teilintervalle, zu denen auch $\tilde{I} := \bar{B}_\infty(\tilde{x}, \delta)$ gehört. Dann folgt aus den Sätzen 6.14b) und 6.15:

$$\int\limits_I f(x)dx \geq \int\limits_{\tilde{I}} f(x)dx.$$

$6.16 \rightsquigarrow \exists \bar{x} \in \tilde{I} : \int\limits_{\tilde{I}} f(x)dx = f(\bar{x}\mu(I).$
$\rightsquigarrow \int\limits_I f(x)dx \geq f(\bar{x})\mu(\tilde{I}) > 0.$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch zur Annahme!

b)
$$\begin{aligned} |\int\limits_I f_n(x)dx - \int\limits_I f(x)| &= |\int\limits_I (f_n(x) - f(x))dx| \leq \int\limits_I |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|\mu(I) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$ □

Wir kommen nun zur Definition des Riemann-Integrals über allgemeineren Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^m$ und zur Definition des Maßes bzw. Inhaltes für solche Mengen.

Definition 6.18
Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ nichtleer und beschränkt, $I \subseteq \mathbb{R}^m$ sei ein m-dimensionales kompaktes Intervall mit $B \subseteq I$.
$f : B \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar über B (kurz: R-integrierbar) wenn die Funktion $f_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, wobei

$f_B(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in B \\ 0 & , x \notin B \end{cases}$, *Riemann-integrierbar über I ist.*
In diesem Fall heißt $\int\limits_B f(x)dx := \int\limits_I f_B(x)dx$ *Riemann-Integral (oder kurz: R-Integral) von f über B.*
B heißt Jordan-meßbar, wenn die charakteristische Funktion χ_B von B, d.h. $\chi_B(x) := \begin{cases} 1 & , x \in B \\ 0 & , x \notin B \end{cases}$, *über B R-integrierbar ist.* $\mu(B) := \int_B \chi_B(x)dx =: \int\limits_B dx$ *heißt dann Jordan-Inhalt (oder kurz: Maß) von B. Für $m = 2$ bzw. $m = 3$ heißt $\mu(B)$ auch Flächeninhalt bzw. Volumen von B.*

Bemerkung 6.19
Die Definition des R-Integrals über B ist von der Wahl des m-dimensionalen kompakten Invervalls $I \supseteq B$ unabhängig. Denn ist $\tilde{I}$ ein weiteres m-dimensionales kompaktes Intervall mit $\tilde{I} \supseteq B$, so gilt: $\int\limits_I f_B(x)dx = \int\limits_{\tilde{I}} f_B(x)dx$.

Bws.: *es wird gezeigt:* $\int\limits_I f_B(x)dx = \int\limits_{I\cap\tilde{I}} f_B(x)dx = \int\limits_{\tilde{I}} f_B(x)dx$.
o.B.d.A. zeigen wir es für $\tilde{I}$.
es existieren endlich viele Teilintervalle $\tilde{I}_j$, $j \in \mathcal{J}$, von $\tilde{I}$, so daß $\tilde{I} = (I \cap \tilde{I}) \cup (\bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} \tilde{I}_j)$ und das Innere der Intervalle auf der rechten Seite paarweise disjunkt ist. Aus Satz 6.15 folgt dann:

$$\int\limits_{\tilde{I}} f_B(x)dx = \int\limits_{I\cap\tilde{I}} f_B(x)dx + \sum_{j\in\mathcal{J}} \underbrace{\int\limits_{\tilde{I}_j} f_B(x)dx}_{=0} = \int\limits_{\tilde{I}} f_B(x)dx.$$

Ist $B \subseteq \mathbb{R}^m$ Jordan-meßbar, so gilt für den Jordan-Inhalt:

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \sup_{Z\in\mathcal{Z}(I)} \sum_{j=1}^{M} \inf_{x\in I_j} \chi_B(x)\mu(I_j) = \sup_{Z\in\mathcal{Z}(I)} \sum_{\substack{j=1 \\ I_j\subseteq B}}^{M} \mu(I_j) \\ &= \inf_{Z\in\mathcal{Z}(I)} \sum_{j=1}^{M} \sup_{x\in I_j} \chi_B(x)\mu(I_j) = \inf_{Z\in\mathcal{Z}(I)} \sum_{\substack{j=1 \\ I_j\cap B=\emptyset}}^{M} \mu(I_j) \end{aligned}$$

(wobei $I \supseteq B$ ein m-dimensionales kompaktes Intervall ist).
Die "anschauliche Vorstellung" des Jordan-Inhaltes ist das Supremum (bzw. Infinum) von Summen von Maßen vom Intervallen, die ganz in B liegen bzw. mit B einen nichtleeren Durchschnitt haben.

Satz 6.20
Eine beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^m$ ist Jordan-meßbar gdw. der Rand ∂B von B eine Nullmenge ist.

Beweis:

Wir wählen ein m-dimensionales kompaktes Intervall I so, daß $\overset{\circ}{I} \supseteq \bar{B}$. B ist Jordan-meßbar gdw. χ_B R-integrierbar über I ist (vgl. Def. 6.18). Die Menge der Unstetigkeitspunkte von χ_B in I ist gerade $\partial B \rightsquigarrow \chi_B$ ist R-integrierbar über B nach Satz 6.12 gdw. die Menge ∂B eine Nullmenge ist. $\square$

Beispiel 6.21

Für $m := 1$ betrachten wir $B := [0,1] \cap \mathbb{Q}$, d.h. B ist beschränkt und abzählbar. Es gilt $\partial B = [0,1]$.

$\rightsquigarrow$ ∂B ist keine Nullmenge (es gilt $\mu(\partial B) = 1$) und folglich (Satz 6.20) ist B keine Jordan-meßbare Menge.

$\rightsquigarrow$ B ist eine nicht Jordan-meßbare Nullmenge.

(Dies sind die Grenzen dieses Meßbarkeitsbegriffs!)

Satz 6.22

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ Jordan-meßbar und $f : B \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann ist f R-*integrierbar über B gdw. $\exists$ Nullmenge $A \subseteq B$, so daß f auf $B \backslash A$ ist.*

Beweis:

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^m$ ein m-dimensionales kompaktes Intervall mit $B \subseteq I$.

($\Longrightarrow$) Sei F R-integrierbar über $B \rightsquigarrow f_B$ ist R-integrierbar über $I \rightsquigarrow \exists$ Nullmenge $A \subseteq I$, so daß f_B stetig auf $I \backslash A$ ist (6.12!)

$\rightsquigarrow f_B$ ist erst recht stetig auf $B \backslash A$. (betrachten $\tilde{A} := A \cap B$ anstelle von A)

$\rightsquigarrow f$ ist stetig auf $B \backslash A$.

($\Longleftarrow$) Sei die Menge $\{x \in B : \omega(f;x) \neq 0\}$, d.h. die Menge aller Unstetigkeitspunkte von f in B, eine Nullmenge.

$\rightsquigarrow$ $\{x \in B : \omega(f;x) \neq 0\} \cup \partial B$ ist eine Nullmenge nach Satz 6.20.

$\rightsquigarrow$ $\{x \in I : \omega(f_B;x) \neq 0\} \subseteq \{x \in B : \omega(f;x) \neq 0\} \cup \partial B$ ist Nullmenge.

$\rightsquigarrow$ f_B ist R-integrierbar über I (Satz 6.12), d.h. f ist R-integrierbar über I. $\square$

Bemerkung 6.23

Satz 6.14 bleibt gültig für Riemann-Integrale über Jordan-meßbaren Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^m$ (mit analogem Beweis und unter Verwendung von Satz 6.22).

Satz 6.24 *(allgemeiner Mittelwertsatz)*

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ Jordan-meßbar und $f : B \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und R-integrierbar über B. Dann gilt:

$$\inf_{x \in B} f(x)\mu(B) \leq \int_B f(x)dx \leq \sup_{x \in B} f(x)\mu(B).$$

Ist zusätzlich B kompakt und zusammenhängend, und ist $f \in C(B)$, so existiert $\bar{x} \in B$ mit

$$\int\limits_B f(x)dx = f(\bar{x})\mu(B).$$

<u>**Beweis:**</u>
Ist I ein m-dimensionales kompaktes Intervall mit $B \subseteq I \subseteq I\!R^m$, so folgt:
$f_B(x) - \inf\limits_{y\in B} f(y)\chi_B(x) \geq 0,\ \forall x \in I.$
$\rightsquigarrow \int\limits_I (f_B(x) - \inf\limits_{y\in B} f(y)\chi_B(x))dx \geq 0$, (nach 6.15)

$$\text{Satz 6.14b)} \rightsquigarrow \int\limits_I f_B(x)dx = \int\limits_B f(x)dx \quad \begin{aligned}&\geq \inf_{y\in B} f(y) \int\limits_I \chi_B(x)dx \\ &= \inf_{y\in B} f(y)\mu(B).\end{aligned}$$

Die andere Ungleichung folgt analog druch Betrachtung von $\sup\limits_{y\in B} f(y)\chi_B(x) - f_B(x) \geq 0 \quad \forall x \in I!$
Unter der zusätzlichen Voraussetzung können wir wie im Beweis von Satz 6.16 fortfahren und erhalten für $x_*,\ x^* \in B$ mit $f(x_*) = \inf\limits_{x\in B} f(x)$ und $f(x^*) = \sup\limits_{x\in B} f(x)$:
$\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B f(x)dx \in [f(x^*), f(x^*)] \subseteq f(B)$ (nach Zwischenwertsatz 4.9). □

Satz 6.25
Es seien $A, B \subseteq I\!R^m$ Jordan-meßbar und $f : A \cup B \to I\!R$ sei beschränkt und R-*integrierbar über A und über B. Dann gilt*

$$\int\limits_{A\cup B} f(x)dx = \int\limits_A f(x)dx + \int\limits_B f(x)dx - \int\limits_{A\cap B} f(x)dx,$$

sowie insbesondere $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
Gilt zusätzlich $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$, so folgt $\mu(A \cap B) = 0$.

<u>**Beweis:**</u>
(vgl. Heuser Bd. II, Sätze 201.8, 201.9 und 201.11)

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung von Riemann-Integralen über mehrdimensionalen Mengen ist die Rückführung auf die mehrmals hintereinander ausgeführte Integration über niedrigdimensionale Mengen. Wir beginnen mit dem Fall von R-Integralen über Intervallen.

Satz 6.26 *(Fubini)*
Es seien I_y und I_z kompakte p-dimensionale bzw. q-dimensionale Intervalle und I bezeichne das $m = (p + q)$-dimensionale Produktintervall $I := I_y \times I_z$.

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt und R-*integrierbar über I, und für alle $z \in I_z$ sei $f(\cdot, z)$* R-*integrierbar über I_y.*
Dann ist die Funktion $g : I_z \to \mathbb{R}$, $g(z) := \int\limits_{I_y} f(y,z)dy$, $\forall z \in I_z$, R-*integrierbar über I_z und es gilt*

$$\int\limits_I f(x)dx = \int\limits_{I_z} g(z)dz = \int\limits_{I_z} (\int\limits_{I_y} f(y,z)dy)dz.$$

__**Beweis:**__
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $Z \in \mathcal{Z}(I)$ so gewählt, daß

$$S(Z;f) - s(Z;f) < \varepsilon.$$

Nach Definition hat Z die Gestalt $Z = Z_y \times Z_z$, wobei $Z_y \in \mathcal{Z}(I_y)$ und $Z_z \in \mathcal{Z}(I_z)$. Es seien nun I_j, $j = 1, \ldots, M$, die p-dimensionalen Teilintervalle von Z_y und $\tilde{I}_i$, $i = 1, \ldots, \tilde{M}$, die q-dimensionalen Teilintervalle von Z_z.
Dann gilt für die Darbouse'sche Untersumme $s(Z;f)$:

$$\begin{aligned} s(Z;f) &= \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{\tilde{M}} \inf_{(y,z) \in I_j \times \tilde{I}_i} f(y,z)\mu(I_j \times \tilde{I}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\tilde{M}} (\sum_{j=1}^{M} \inf_{(y,z) \in I_j \times \tilde{I}_i} f(y,z)\mu(I_j))\mu(\tilde{I}_i). \end{aligned}$$

Für alle $z \in \tilde{I}_i$ und $i = 1, \ldots, \tilde{M}$ gilt:

$$g_i := \sum_{j=1}^{M} \inf_{(y,z) \in I_j \times \tilde{I}_i} f(y,z)\mu(I_j) \le \sum_{j=1}^{M} \inf_{y \in I_j} f(y,z)\mu(I_j) \le g(z).$$

Also: $g_i \le \inf\limits_{z \in \tilde{I}_i} g(z)$, $\forall i = 1, \ldots, \tilde{M}$.
$\rightsquigarrow s(Z;f) \le \sum\limits_{i=1}^{\tilde{M}} g_i \mu(\tilde{I}_i) \le \sum\limits_{i=1}^{\tilde{M}} \inf\limits_{z \in \tilde{I}_i} g(z)\mu(\tilde{I}_i) = s(Z_z; g)$.
Analog zeigt man auch: $S(Z_z; g) \le S(Z;f)$.
Daraus folgt insgesamt:

$$0 \le S(Z_z;g) - s(Z_z;g) \le S(Z;f) - s(Z;f) < \varepsilon$$

d.h. g ist R-integrierbar über I_z und es gilt

$$\int\limits_I f(x)dx = \sup_{Z \in \mathcal{Z}(I)} s(Z;f) \le \int\limits_{I_z} g(z)dz \le \inf_{Z \in \mathcal{Z}(I)} S(Z;f) = \int\limits_I f(x)dx. \qquad \square$$

Folgerung 6.27
Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 6.26 auch, daß für jedes $y \in I_y$ die Funktion $f(y, \cdot)$ R-integrierbar über I_z ist, so gilt:

$$\int_I f(x)dx = \int_{I_y} (\int_{I_z} f(y,z)dz)dy = \int_{I_z} (\int_{I_y} f(y,z)dy)dz$$

(Vertauschung der Integrationsreihenfolge).

Beweis:
Ein Teil folgt direkt aus Satz 6.26, der andere Teil analog zu dessen Beweis durch anderes Aufspalten der Untersumme (Doppelsumme). □

Beispiel 6.28
Aus der R-Integrierbarkeit von f über $I := I_y \times I_z$ folgt i.a. nicht, daß $f(\cdot, z)$ R-integrierbar ist über I_y, $\forall Z \in I_z$!
$m := 2$, $I := [0,1] \times [0,1]$, $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f(y,z) := \begin{cases} 1 & ,(y,z) \in I, y \neq \frac{1}{2} \\ 1 & ,y = \frac{1}{2}, z \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}, \\ 0 & ,y = \frac{1}{2}, z \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ *$f(\frac{1}{2}, \cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist nicht R-integrierbar über $[0,1]$ (6.6!)*
aber die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f in I ist gerade $\{(\frac{1}{2}, z) : z \in [0,1]\}$ und damit nach Bsp. 6.10 Nullmenge.
Folglich ist f R-integrierbar über I nach Satz 6.12!

Folgerung 6.29
Es sei $I := \bigtimes_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$ ein m-dimensionales kompaktes Intervall und es gelte $f \in C(I)$. Dann gilt:

$$\int_I f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} (\int_{a_2}^{b_2} \cdots (\int_{a_m}^{b_m} f(x_1, \ldots, x_m)dx_m)dx_{m-1} \cdots)dx_2)dx_1,$$

wobei alle auftretenden R-Integrale existieren und die Integrationsreihenfolge beliebig vertauscht werden darf.

Beweis:
folgt durch wiederholte Anwendung von 6.26 bzw. 6.27 und wegen $f \in C(I)$:
Zunächst mit: $I_y = [a_1, b_1], I_z = \bigtimes_{i=2}^{m} [a_i, b_i], y = y_1, z = (x_2, \ldots, x_m)$
$\rightsquigarrow \int_I f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} (\int_{I_z} f(x_1, z)dz)dx_1$ und danach sukzessive fortgesetzt.
Satz 6.26 bzw. Folgerung 6.27 sind anwendbar, da wegen der Stetigkeit von f alle R-Integrierbarkeitsvoraussetzungen nach 6.7 bzw. 6.12 erfüllt sind. Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist möglich nach 6.27 bzw. 6.26. □

Folgerung 6.30 *(allgemeiner Satz von Fubini)*
Es sei $B \subseteq I\!R^m$ *Jordan-meßbar und* $f : B \to I\!R$ *sei beschränkt und* R-*integrierbar. Für fixierte* $p, q \in I\!N$ *mit* $p + q = m$ *setzen wir* $P(B) := \{y \in I\!R^p : \exists z \in I\!R^q \text{ mit } (y, z) \in B\}$ *("Projektion von* B *auf* $I\!R^p$*") und* $B_y := \{z \in I\!R^q : (y, z) \in B\}$, $\forall y \in P(B)$. *Für alle* $y \in P(B)$ *sei ferner das* R-*Integral*

$$g(y) := \int_{B_y} f(y, z)dz \qquad \textit{definiert.}$$

Dann existiert das R-*Integral* $\int_{P(B)} g(y)dy$ *und es gilt*

$$\int_B f(x)dx = \int_{P(B)} (\int_{B_y} f(y, z)dz)dy.$$

Beweis:
Da B beschränkt ist, existieren kompakte Intervalle $I \subseteq I\!R^p$ und $\tilde{I} \subseteq I\!R^q$ so daß $B \subseteq I \times \tilde{I}$. Dann gilt:

$$P(B) \subseteq I \quad \text{und} \quad B_y \subseteq \tilde{I}, \quad \forall y \in P(B).$$

Nach Voraussetzung und nach Def. 6.18 folgt dann:

$$\begin{aligned}
\int_B f(x)dx &= \int_{I \times \tilde{I}} f_B(x)dx = \int_{I \times \tilde{I}} f_B(y, z)d(y, z) \\
g(y) &= \int_{B_y} f(y, z)dz = \int_{\tilde{I}} f_B(y, z)dz, \quad \forall y \in P(B).
\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich dabei daraus, daß für bel. $y \in P(B)$ und alle $z \in \tilde{I}$ gilt

$$\begin{aligned}
f_B(y, z) &= \begin{cases} f(y, z) & , (y, z) \in B \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(y, z) & , z \in B_y \\ 0 & , z \in \tilde{I} \backslash B_y \end{cases} .
\end{aligned}$$

Da nach Vor. f_B R-integrierbar über $I \times \tilde{I}$ und $f_B(y, \cdot)$ für jedes $y \in P(B)$ R-integrierbar über $\tilde{I}$ ist, folgt aus Folg. 6.27, daß auch $g_{P(B)}$ R-integrierbar über I ist und daß gilt

$$\int_{I \times \tilde{I}} f_B(x)dx = \int_I (\int_{\tilde{I}} f_B(y, z)dz)dy = \int_I g_{P(B)}(y)dy = \int_{P(B)} g(y)dy. \qquad \square$$

Folgerung 6.31 *(Satz von Cavalieri)*
Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ Jordan-meßbar und für alle $y \in P(B)$ sei auch B_y Jordan-meßbar. Dann gilt:

$$\mu(B) = \int\limits_{P(B)} \mu(B_y)dy.$$

(Dabei seien $P(B) \subseteq \mathbb{R}^p$, $B_y \subseteq \mathbb{R}^q$, $p+q=m$ wie in 6.30 definiert.)

__Beweis:__
Die Aussage resultiert sofort aus Folg. 6.30 mit $f := \chi_B$, denn es gilt

$$\mu(B) = \int\limits_I \chi_B(x)dx = \int\limits_B dx = \int\limits_{P(B)} (\int\limits_{B_y} \chi_B(y,z)dz)dy = \int\limits_{P(B)} \mu(B_y)dy$$

(χ_b ist R-integrierbar über B, da ∂B, und damit die Menge aller Unstetigkeitsstellen von χ_B eine Nullmenge ist (6.20). Ferner ist $\forall y \in P(B)$ $\chi_B(y;\cdot)$ R-integrierbar über B_y, da ∂B (und damit die Menge aller Unstetigkeitsstellen von $\chi_B(y;\cdot)$) eine Nullmenge ist. Damit sind alle Voraussetzungen von 6.30 erfüllt. □

Im folgenden soll nun eine Klasse von Mengen diskutiert werden, die einerseits hinreichend allgemein ist und auf die andererseits die Folgerungen 6.30 bzw. 6.31 angewendet werden können (u.a. zur Berechnung von Jordan-Inhalten).

Definition 6.32
Eine nichtleere Menge $B \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt __Zylindermenge__ (oder: Normalbereich), falls Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und Funktionen $\varphi_j,\ \psi_j \in C(\mathbb{R}^{m-j})$, $j = 1, \ldots, m-1$, existieren, so daß

$$B = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : a \le x_m \le b, \varphi_j(x_{j+1}, \ldots, x_m) \le x_j \le \psi_j(x_{j+1}, \ldots, x_m) \\ j = 1, \ldots, m-1\}$$

__Beispiel:__ $m = 2$, $B = \{(x_1, x_2) : a \le x_2 \le b,\ \varphi_1(x_2) \le x_1 \le \psi_1(x_2)\}$
Für den Rand ∂B der Menge B gilt:

$$\begin{aligned} \partial B = & \{(x_1, a) : x_1 \in [\varphi_1(a), \psi_1(a)]\} \\ & \cup \{(x_1, b) : x_1 \in [\varphi_1(b), \psi_1(b)]\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = \varphi_1(x_2), x_2 \in [a, b]\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) := x_1 = \psi_1(x_2), x_2 \in [a, b]\} \end{aligned}$$

Lemma 6.33
Jede Zylindermenge $B \subseteq \mathbb{R}^m$ ist kompakt und Jordan-meßbar.

Beweis:
Wegen der Stetigkeit der Funktionen φ_i, ψ_j, $j = 1, \ldots, m-1$, in der Def. der Zylindermenge B ist diese abgeschlossenen und wegen $x_m \in [a, b]$ auch beschränkt. In der Tat ist B in folgendem kompakten Intervall I enthalten:

$$I := (\bigtimes_{i=1}^{m-1} [\bar{\varphi}_i, \bar{\psi}_i]) \times [a, b]$$

wobei $\bar{\varphi}_{m-1} := \inf_{x_m \in [a,b]} \varphi_{m-1}(x_m)$, $\bar{\psi}_{m-1} := \sup_{x_m \in [a,b]} \psi_{m-1}(x_m)$ usw.
$\bar{\varphi_1} := \inf\{\varphi_1(x_2, \ldots, x_m) : x_m \in [a, b], x_i \in [\bar{\varphi}_i, \bar{\psi}_i], \ i = 2, \ldots, m-1$
und $\bar{\psi}_1$ analog definiert.

Also ist B kompakt und wir zeigen nun noch, daß B Jordan-meßbar ist. Nach Satz 6.20 müssen wir zeigen, daß der Rand ∂B von B eine Nullmenge ist. Wegen der Abgeschlossenheit von B ist klar, daß $\partial B \subseteq B$ gilt. Nach Definition des Randes gehören nun genau alle die Punkte von B zu ∂B, für die in mindestens einer der Ungleichungen für die x_j, $j = 1, \ldots, m$, die untere bzw. obere Grenze angenommen wird. Die Teile des Randes, für die $x_m = a$ oder $x_m = b$ gilt, sind Teilmengen von Hyperebenen und deshalb nach Beispiel 6.10 Nullmengen. Außer diesen Teilen ist der Rand eine endliche Vereinigung von Mengen, für die mindestens eine der Komponenten x_j von x gleich der unteren bzw. oberen "Schrankenfunktion" (φ_i bzw. ψ_i) ist. Analog zum Nachweis der Beschränktheit von B sieht man nun, daß diese Teile von ∂B enthalten sind in Mengen folgender Form: z.B.

$$\{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_j = \phi_j(x_{j+1}, \ldots, x_m), x_i \in [\bar{\varphi}_i, \bar{\psi}_i],$$
$$i = 1, \ldots, m-1, i \neq j, x_m \in [a, b]\}$$

Bis auf die Reihenfolge der Komponenten haben diese Mengen die folgende prinzipielle Gestalt:

$$\{(t, \varphi(t)) : t \in K\}, K \subseteq \mathbb{R}^k \text{ kompakt}, \varphi \in C(\mathbb{R}^k),$$
$$t = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m), K = (\bigtimes_{i=j=1}^{m-1} [\bar{\varphi}_i, \bar{\psi}_i]) \times [a, b], \varphi = \varphi_i$$

Beh.: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\varphi \in C(\mathbb{R}^k)$ und $K \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt.
Dann ist $\{(t, \varphi(t)) : t \in K\}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^{k+1}$.

Bew.: Wir wählen zunächst ein k-dimensionales kompaktes Intervall I_o so, daß $K \subseteq I_o$, verlängern die Kanten dieses Intervalls auf allen Seiten um 1 und bezeichnen das neue Intervall mit I. $\bar{\mu}$ bezeichne den Jordan-Inhalt von I.
Wir betrachten die folgenden regelmäßigen Gitterpunkte in $\mathbb{R}^k$:
$\{\frac{1}{2}(i_1, \dots, i_k) : i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}\} = \{\tau_j\}_{j \in \mathbb{N}}$
$c_k \in \mathbb{N}$ sei die nur von der Dimension k abhängige Zahl
$c_k := \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} \mu(\bar{B}_\infty(\tau_j, \frac{1}{2}) \cap \bar{B}_\infty(\tau_r, \frac{1}{2})), r \in \mathbb{N}$ beliebig. $(c_k = 2^k??)$
Es sei nun $\varepsilon < 0$ bel. gewählt. Da φ auf K gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, daß, $\delta < 1$ und
$|\varphi(t) - \varphi(\tilde{t})| \leq \frac{\varepsilon}{2c_k\bar{\mu}}$, falls $\|t - \tilde{t}\|_\infty \leq \delta$, $t, \tilde{t} \in K$.
$B_j := B_\infty(\delta\tau_j, \frac{\delta}{2}), j \in \mathbb{N}$ bildet eine Überdeckung von K.
Folglich existiert eine endliche Teilüberdeckung
$B_{ji}, i = 1, \dots, l$, wobei o.B.d.A. $B_{ji} \cap K \neq \emptyset, i = 1, \dots, l$.
Dann gilt nach Konstruktion
$\{(t, \varphi(t)) : t \in K\} \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{l} I_j$ und $\sum\limits_{i=1}^{l} \mu(I_i) = l\delta^k \frac{\varepsilon}{c_k\bar{\mu}}$,
sowie $l\delta^k = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(\bar{B}_{ij}) \leq c_k\bar{\mu}$
$\leadsto \{(t, \varphi(t)) : t \in K\}$ ist eine Nullmenge im $\mathbb{R}^{k+1}$ (vgl. 6.8). □

Folgerung 6.34
Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Zylindermenge und $f \in C(B)$. Dann gilt:

$$\int\limits_B f(x)dx = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\varphi_{m-1}(x_m)}^{\psi_{m-1}(x_m)} \Big(\cdots \Big(\int\limits_{\varphi_1(x_2,\dots,x_m)}^{\psi_1(x_2,\dots,x_m)} f(x_1, \dots, x_m)dx_1\Big) \cdots \Big)dx_{m-1}\Big)dx_n.$$

Beweis:
Wir wählen $I := \bigtimes\limits_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$ derart, daß $a_m := a$, $b_m := b$ und $A_{m-j} \leq \bar{\varphi}_{m-j}$, $\bar{\psi}_{m-j} \leq b_{m-j}$, $j = 1, \dots, m-1$ (vgl. Beweis von 6.33).
Dann gilt $B \subseteq I$. Da B nach Lemma 6.33 Jordan-meßbar ist, und folglich f_B R-integrierbar über B, folgt nach Definition des R-Integrals und nach Satz 6.26 bzw. Folg. 6.27 sukzessive:

$$\int\limits_B f(x)dx = \int\limits_I f_B(x)dx = \int\limits_{a_m}^{b_m} \Big(\int\limits_{a_{m-1}}^{b_{m-1}} \Big(\cdots \Big(\int\limits_{a_1}^{b_1} f_B(x_1, \dots, x_m)dx_1\Big) \cdots \Big)dx_{m-1}\Big)dx.$$

Ebenso sukzessive gilt aber nach Definition von B bzw. f_B:

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} f_B(x_1,\dots,x_m)dx_1 = \int\limits_{\psi_1(x_2,\dots,x_m)}^{\psi_1(x_2,\dots,x_m)} f_B(x_1,\dots,x_m)dx_1,$$

$$\int\limits_{a_2}^{b_2} \Big(\int\limits_{a_1}^{b_1} f_B(x_1,\dots,x_m)dx_1\Big)dx_2 = \int\limits_{\varphi_2(\dots)}^{\psi_2(\dots)} \Big(\int\limits_{\varphi_1(\dots)}^{\psi_1(\dots)} f_B(x_1,\dots,x_m)dx_1\Big)dx_2 \quad \text{usw.}$$

wobei man für die Gleichheit mit dem Mittelwertsatz argumentiert. $\square$

Eine wichtige Methode zur Berechnung mehrdimensionaler R-Integrale ist die folgende sog. "Substitutionsregel", die es ermöglicht, Integrale über kompliziertere Mengen auf solche über einfachere Mengen zurückzuführen. Wir gehen jedoch auf den längeren Beweis nicht ein und verweisen auf die Literatur.

Satz 6.35 *(allg. Substitutionsregel)*
Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $g : G \to \mathbb{R}^m$ injektiv und stetig differenzierbar; ferner sei $\det g'(t)$ für $t \in G$ entweder stets positiv oder stets negativ.
$B \subset G$ sei kompakt und Jordan-meßbar und es sei $f \in C(g(B))$. Dann ist $g(B)$ Jordan-meßbar, f auf $g(B)$ R-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_{g(B)} f(x)dx = \int\limits_{B} f(g(t))|\det g'(t)|dt.$$

(Hierbei ist $\det g'(t)$ die Determinante der Jacobi-Matrix $g'(t)$.)

<u>**Beweis:**</u>
(vgl. Heuser, Bd. 2, Kap. 205, S. 473-485)

Im eindimensionalen Fall vereinfacht sich die Substitutionsregel und läßt sich auch ohne Mühe beweisen (vgl. Kap. 6.2, Satz 6.46).

Beispiel 6.36 *(Transformation auf Polarkoordinaten)*
Wir betrachten zunächst $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r & \cos\varphi \\ r & \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \forall (r,\varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

$\rightsquigarrow \det g'(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0$, *falls* $r > 0$.
(r wird als Radius und φ als Winkel interpretiert.)
Um nun Satz 6.35 anwenden zu können, wählen wir zunächst:
$G := \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$.
$\rightsquigarrow$ *G ist offen und $g : G \to \mathbb{R}^2$ ist injektiv.*

(Die letzte Eigenschaft sieht man wie folgt: Aus $g(r_1, \varphi_1) = g(r_2, \varphi_2)$ folgt, indem man die Werte von g als Elemente der komplexen Zahlenebene auffaßt:
$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$
oder $r_1 \exp(i\varphi_1) = r_2 \exp(i\varphi_2)$
$\rightsquigarrow \frac{r_1}{r_2} = \exp(i(\varphi_2 - \varphi_1)) \rightsquigarrow \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ *und* $\frac{r_1}{r_2} = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$
$\rightsquigarrow \varphi_1 = \varphi_2$ *oder* $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$. *Letzteres würde aber* $\frac{r_1}{r_2} = -1$ *bedeuten, was unmöglich ist.* $\rightsquigarrow \varphi_1 = \varphi_2 \rightsquigarrow r_1 = r_2$.*)*

Die Anwendung von Satz 6.35 ist nun möglich für jede kompakte, Jordan-meßbare Teilmenge B von G und jedes $f \in C(g(B))$.
Es gilt:

$$\int\limits_{g(B)} f(x)dx = \int\limits_{B} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d(r,\varphi).$$

Wählt man speziell B als $B := [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \subseteq G$, so ergibt sich aus der letzten Formel und Folgerung 6.29:

$$(*) \qquad \int\limits_{g(B)} f(x)dx = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\; dr\; d\varphi$$

$g(B)$ ist dabei der Kreisring zwischen den Radien r_1 bzw. r_2 und den Winkeln φ_1 bzw. φ_2.
Die Formel $(*)$ ist "formal" aus Satz 6.35 nicht herleitbar für den Fall $r_1 = 0$ ($r_2 = R$), $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$. Dies würde gerade den interessanten Fall bedeuten:

$$B = [0, R] \times [0, 2\pi] \quad \text{und} \quad g(B) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq R\}.$$

Mit Hilfe des allgemeinen Mittelwertsatzes 6.24 und Satz 6.25 kann man nun aber zeigen, daß in $(*)$ der Grenzübergang $r_1 \to 0$, $\varphi_1 \to 0$, $\varphi_2 \to 2\pi$ (mit $r_2 := R$) vollzogen werden darf.
Es ergibt sich:

$$\int\limits_{g(B)} f(x)dx = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{R} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\; dr\; d\varphi$$

Spezialfall: *$f(x) \equiv 1$, d.h. Berechnung des Jordan-Inhalts von $g(B)$.*

$$\rightsquigarrow \mu(\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq R\}) = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{R} r\; dr\; d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\varphi = \pi R^2.$$

Bemerkung 6.37
Ist $I \subseteq \mathbb{R}^m$ ein m-dimensionales kompaktes Intervall, $Z \in \mathcal{Z}(I)$ mit den

Teilintervallen I_j, $j = 1, \ldots, M$, und sind $\xi_j \in I_j$, $j = 1, \ldots, M$, beliebig gewählte sog. "Zwischenpunkte", so heißt

$$S_R(Z; f) := \sum_{j=1}^{M} f(\xi_j)\mu(I_j) \qquad \underline{\text{Riemannsche Zwischensumme}} \text{ bez.}$$

$$f : I \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad Z \in \mathcal{Z}(I).$$

Dann gilt: $s(Z; f) \le S_R(Z; f) \le S(Z; f)$.
Ist nun (Z_n) eine Folge in $\mathcal{Z}(I)$ mit den Teilintervallen $I_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, M_n$, und mit der Eigenschaft $\max\limits_{j=1,\ldots,M_n} \operatorname{diam}(I_j^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so folgt für $f \in C(I)$ mit Hilfe der Beweismethodik von Satz 6.7:

$$\lim_{n\to\infty} (S_R(Z_n; f) - s(Z_n; f)) = \lim_{n\to\infty} (S(Z_n; f) - S_R(Z_n; f)) = 0$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \liminf_{n\to\infty} (S_R(Z_n; f) - \int\limits_I f(x)dx) &= \liminf_{n\to\infty} (S_R(Z_n; f) - \sup_{Z\in\mathcal{Z}(I)} s(Z; f)) \\
&\le \liminf_{n\to\infty} (S_R(Z_n; f) - s(Z; f)) = 0 \\
\limsup_{n\to\infty} (S_R(Z_n; f) - \int\limits_I f(x)dx) &= \limsup_{n\to\infty} (S_R(Z_n; f) - \inf_{Z\in\mathcal{Z}(I)} S(Z; f)) \\
&\ge \limsup_{n\to\infty} (S_R(Z_n; f) - S(Z; f)) = 0
\end{aligned}$$

und damit $\exists \lim\limits_{n\to 0} S_R(Z_n; f) = \int\limits_I f(x)dx \qquad (\star)$.

Also können auch die Riemannschen Zwischensummen äquivalent zur Definition des R-Integrals verwendet werden. Wir kommen auf die Anwendung solcher Zwischensummen in Kap. 6.4 zurück. Man kann zeigen, daß die Aussage $(\star)$ richtig bleibt, wenn $f : I \to \mathbb{R}$ nur beschränkt und R-integrierbar ist! (vgl. Heuser)

Bemerkung 6.38
Ist $B \subseteq \mathbb{R}^m$ Jordan-meßbar und $f : B \to \mathbb{R}^k$ "komponentenweise" beschränkt und R-integrierbar, so wird das R-Integral wie folgt definiert:

$$\int\limits_B f(x)dx := (\int\limits_B f_1(x)dx, \ldots, \int\limits_B f_k(x)dx).$$

Viele Rechenregeln übertragen sich sinngemäß auf diesen Fall!

6.2 Stammfunktion und Riemann-Integral

Wir wenden uns nun der eingangs von Kapitel 6 angekündigten Fragestellung der "Umkehrung" der Differentiation zu.

Definition 6.39

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, F : I \to \mathbb{R}$.
F heißt Stammfunktion von f (oder: unbestimmtes Integral) von f, falls F stetig und auf $\mathring{I}$ differenzierbar ist mit $F' = f$ auf $\mathring{I}$.
Bezeichnung: $F = \int f(x)dx$.

Bemerkung 6.40

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, F : I \to \mathbb{R}$ und F sei Stammfunktion von f.

Beh.: $F_o : I \to \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von f gdw. $\exists C \in \mathbb{R}$ ("Integrationskonstante") mit $F_o(x) = F(x) + C$, $\forall x \in I$,

Bew.: ($\leftarrow$) F_o ist dann stetig und auf $\mathring{I}$ differenzierbar mit $F_o' = F' = f$

($\rightarrow$) $F - F_o$, ist stetig auf I und differenzierbar auf $\mathring{I}$ mit
$(F - F_o)' = f - f = 0$ auf $\mathring{I}$.
Deshalb gilt für fixiertes $x_o \in I$ und beliebiges $x \in I$ nach Satz 5.10 (Mittelwertsatz): $\exists \tilde{x} \in]x_o, x[$ mit
$(F - F_o)(x) - (F - F_o)(x_o) = (F - F_o)'(\tilde{x})(x - x_o) = 0$.
$\rightsquigarrow$ Wir definieren $C := -(F - F_o)(x_o)$ und erhalten
$(F - F_o)(x) = -C$, $\forall x \in I$. $\square$

Stammfunktionen von f sind also bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Sie sind demnach eindeutig, wenn man einen Funktionswert festlegt (z.B. $F(x_o) = 0$ für fixiertes $x_o \in I$). Direkt aus der Definition folgt auch die Regel:
Sind $F, G : I \to \mathbb{R}$ Stamfunktionen von $f, g : I \to \mathbb{R}$, so ist $\alpha F + \beta G$ Stammfunktion von $\alpha f + \beta g$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Wir besitzen zunächst keine Methode zur Konstruktion von Stammfunktionen, können aber natürlich in Beispielen durch Differentiation verifizieren. Satz 6.42 bzw. Folgerung 6.43 wird uns dann eine Methode zur Berechnung von Stammfunktionen über R-Integrale liefern.

Beispiel 6.41

(Alle folgenden Beispiele lassen sich durch Differentiation verifizieren; die jeweiligen Gültigkeitsintervalle I werden angegeben.)

a) $F = \int x^k dx \rightsquigarrow F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, $\forall x \in I := \mathbb{R}$ $\quad (\forall k \in \mathbb{N}_0)$
(vgl. Bsp. 5.7 a));

b) $F = \int \exp(x)dx \rightsquigarrow F(x) = \exp(x)$, $\forall x \in I = \mathbb{R}$ $\quad$ *(Bsp. 5.7 b));*

c)
$F = \int \cos x\, dx \quad \rightsquigarrow F(x) = \sin x$ *Bsp. 5.7 b)*
$F = \int \sin x\, dx \quad \rightsquigarrow F(x) = -\cos x \quad \forall x \in I = I\!R$
$F = \int \cosh x\, dx \quad \rightsquigarrow F(x) = \sinh x$
$F = \int \sinh x\, dx \quad \rightsquigarrow F(x) = -\cosh x$

(Die beiden letzten Stammfunktionen ergeben sich sofort aus der Definition von sinh *und* cosh *in 3.51 und aus b))*
d) $F = \int \frac{1}{x}dx \rightsquigarrow F(x) = \ln x,\ \forall x \in [0, +\infty[$ *(da nach Folgerung 5.63 für* $g := \exp$ *und* $g^{-1} = \ln$ *gilt:* $(g^{-1})'(y) = [g'(g^{-1}(y))]^{-1},\ \forall y > 0$, *d.h.* $(\ln)'(y) = [\exp(\ln y)]^{-1} = \frac{1}{y},\ \forall y > 0.$*)*
(weitere Beispiele findet man in Heuser, Bd. 1, Kap. 76, S. 436-438; siehe auch Gröbner/Hofreiter: Integraltafeln)

Wir wenden uns nun der Konstruktion von Stammfunktionen mit Hilfe des Riemann-Integrals zu. Es sei dazu $f : I \to I\!R$ beschränkt und R-integierbar, $I \subseteq I\!R$ sei ein Intervall und $x_o \in I$. Dann definieren wir

$$F_R : I \to I\!R,\ F_R(x) := \int\limits_{x_o}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in I.$$

(Dabei setzen wir $\int\limits_{x_o}^{x_o} f(t)dt := 0$ und $\int\limits_{x_o}^{x} f(t)dt := -\int\limits_{x}^{x_o} f(t)dt$, falls $x < x_o$.)
Klar ist, daß all diese Integrale korrekt definiert sind (vgl. Satz 6.12).

Satz 6.42
Es sei $f : I \to I\!R$ *beschränkt und R-integrierbar, und* F_R *sei wie oben definiert.*
Dann ist $F_R : I \to I\!R$ *Lipschitzstetig und auf der Menge* $D := \{x \in \overset{\circ}{I} : f$ *ist stetig in* $x\}$ *differenzierbar mit* $F_R'(x) = f(x),\ \forall x \in D$.

<u>Beweis:</u>
Es seien $x, y \in I$ mit o.B.d.A. $x < y \rightsquigarrow |F_R(x) - F_R(y)| = |\int\limits_{x_o}^{x} f(t)dt + \int\limits_{x_o}^{y} f(t)dt|$.

$$\text{1. Fall } x_o \le y : |F_R(x) - F_R(y)| = |\int\limits_{x_o}^{x} f(t)dt - \int\limits_{x_o}^{x} f(t)dt + \int\limits_{x}^{y} f(t)dt|$$

2. Fall $x < x_o \le y : |F_R(x) - F_R(y)| = |-\int\limits_{x}^{x_o} f(t)dt - \int\limits_{x_o}^{y} f(t)dt|$ und

$$3.\ \text{Fall } y \le x_o : |F_R(x) - F_R(y)| = |-\int_x^{x_o} f(t)dt - (-\int_y^{x_o} f(t)dt)|$$
$$= |\int_y^{x_o} f(t)dt - \int_x^{y} f(t)dt - \int_y^{x_o} f(t)dt|$$

D.h. es ist stets

$$\begin{aligned} |F_R(x) - F_R(y)| &= |\int_x^y f(t)dt| \le \int_x^y |f(t)|dt \qquad \text{(Satz 6.14 c)!)} \\ &\le |x-y| \sup_{t\in I} |f(t)| \qquad \text{(Lemma 6.4).} \end{aligned}$$

Also ist F_R Lipschitzstetig (auf I).
Es sei nun $x \in D$ und $h \neq 0$ (o.B.d.A. $h > 0$) derart, daß $x + h \in I$. Dann gilt

$$|\frac{1}{h}(F_R(x+h) - F_R(x)) - f(x)| = |\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)| =$$
$$= \frac{1}{h}|\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt| \le \sup_{t\in[x,x+h]} |f(t) - f(x)| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

wegen der Stetigkeit von f in x. Für $h < 0$ läuft der Beweis analog. D.h. F_R ist differenzierbar in x mit der Ableitung $F_R'(x) = f(x)$. □

Folgerung 6.43
ist $f \in C_b(I)$, so ist F_R Stammfunktion von f auf I mit $F_R(x_0) = 0$.

Beweis:
folgt sofort aus Satz 6.42 (mit $D = \overset{\circ}{I}$), da f beschränkt und R-integrierbar, und F_R stetig mit $F_R' = f$ auf $\overset{\circ}{I}$ ist. □

Satz 6.44 *("Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung")*
Ist $f \in C([a,b])$ und $F : [a,b] \to I\!R$ eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beweis:
Nach Folgerung 6.43 und Bemerkung 6.40 existiert eine Konstante $C \in I\!R$ mit
$F(x) = F_R(x) + C$, $F_R(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a,b]$.
$\rightsquigarrow F(b) - F(a) = F_R(b) - \underbrace{F_R(a)}_{=0} = \int\limits_a^b f(x)dx.$ $\square$

Bemerkung 6.45
Eine andere Schreibweise für die Aussage von 6.44 ist:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = \int f(x)dx|_a^b.$$

Dies rechtfertigt also die in Definition 6.39 eingeführte Bezeichnung für die Stammfunktion. Eine alternative Formulierung von 6.44 ist die folgende: Ist $f : [a,b] \to I\!R$ *stetig und auf* $]a,b[$ *stetig differenzierbar, so gilt* $\int\limits_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.
Diese Formulierung von 6.44 wirft die folgende Frage auf:
Ist $f : [a,b] \to I\!R$ *differenzierbar mit Ableitung* f' *(in* $]a,b[$*), läßt sich dann aus* f' *stets deren Stammfunktion* f *rekonstruieren?*
Ist f *stetig differenzierbar, so ist dies möglich (siehe oben). Ist* f' *beschränkt und R-integrierbar, so gilt*

$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$, *für alle* $x \in [a,b]$, *in denen* f' *stetig ist.*

(Satz 6.42). I.a. ist aber f' *keineswegs automatisch R-integrierbar. Deshalb ist das R-Integral nicht geeignet,* f *aus* f' *zu rekonstruieren.*

Beispiel:
Es sei $]a,b[\cap \mathbb{Q} = \{r_j : j \in I\!N\}$ und wir wählen für jedes $j \in I\!N$ ein $\delta_j > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

$$]r_j - \delta_j, r_j + \delta_j[\subseteq]a,b[, \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j < \frac{1}{2}(b-a).$$

Wir betrachten nun die folgende Menge $E := [a,b] \bigcup\limits_{j \in I\!N}]r_j - \delta_j, r_j + \delta_j[$.
<u>Beh.:</u> E ist kompakt und <u>keine</u> Nullmenge!
<u>Bew.:</u> Siehe Übungsaufgaben Analysis, 6. Serie vom 29.11.93!
(Die Kompaktheit sollte klar sein; man nehme an, E wäre eine Nullmenge, wähle ε geschickt und zeige unter Ausnutzung der Def. einer Nullmenge und

ihrer Eigenschaften (6.9) durch Betrachtung der Intervallmaße den Widerspruch!)
Die offene Menge $G := \bigcup_{j\in I\!N}]r_j - \delta_j, r_j + \delta_j[$ läßt sich nun wie folgt darstellen: $G = \bigcup_{j\in\tilde{I\!N}}]a_j, b_j[$, wobei $\tilde{I\!N} \subseteq I\!N$ endlich oder unendlich ist, die Intervalle $]a_j, b_j[$, $j \in \tilde{I\!N}$, paarweise disjunkt sind und $a_j \notin G$, $b_j \notin G$, $j \in \tilde{I\!N}$, gilt (vgl. Natanson, Kap. II, §5, Satz 3).
Wir definieren nun die Funktion $f : [a, b] \to I\!R$ wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , x \in E = [a, b]\setminus G, \\ (x - a_j)^2(x - b_j)^2 \sin \frac{1}{(b_j-a_j)(x-a_j)(x-b_j)} & , x \in]a_j, b_j[, j \in \tilde{I\!N}. \end{cases}$$

Diese Funktion f ist differenzierbar auf $[a, b]$, jedoch ist f' <u>nicht</u> stetig auf E und damit <u>nicht</u> R-integrierbar (6.12!).
(Literatur: I.P. Natanson, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Akademie-Verlag, Berlin, 1969, Kap. V, §5)

Satz 6.46
Es sei $f : [a, b] \to I\!R$ stetig.

a) *Ist $g : [a, b] \to I\!R$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar und ist F eine Stammfunktion von f, so gilt ("partielle Integration"):*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

b) *Sei $g : [c, d] \to [a, b]$ stetig und auf $]c, d[$ differenzierbar; ferner gelte $g(]c, d[) =]a, b[$ und $g(c) = a$, $g(d) = b$.*
Dann gilt: $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$ ("Substitutionsregel")

<u>**Beweis:**</u>

a) Wir betrachten die Funktion $h := Fg - \int F(x)g'(x)dx$. Nach Definition und nach Voraussetzung ist h auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.
Es gilt: $h' = (Fg)' - Fg' = F'g = fg$ auf $]a, b[$.
Also ist h eine Stammfunktion von fg und es gilt nach Satz 6.44:

$$\begin{aligned} \int_a^b h'(x)dx &= h(b) - h(a) \quad \text{und damit} \\ \int_a^b f(x)g(x)dx &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int F(x)g'(x)dx\Big|_a^b \end{aligned}$$

$$= \quad F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

b) Es sei $F : [a,b] \to I\!R$ eine Stammfunktion von f und wir betrachten die Funktion $F \circ g : [c,d] \to I\!R$. Diese ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig und nach Kettenregel (Satz 5.37) auf $]c,d[$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} (F \circ g)'(t) &= F'(g(t))g'(t), \ \forall t \in]c,d[, \\ &= (f \circ g)(t)g'(t), \ \forall t \in]c,d[. \end{aligned}$$

also ist $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g)g'$ und es folgt aus Satz 6.44:

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)dt = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c)$$

$$= F(g(d)) - F(g(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad \square$$

Bemerkung 6.47
Die spezielle eindimensionale Substitutionsregel erfordert etwas schwächere Voraussetzungen als die allgemeine in Satz 6.35, da die Injektivität von g nicht benötigt wird.
Die Regeln in Satz 6.46 können hilfreich zur Berechnung komplizierterer Integrale eingesetzt werden.
Beispiele:

(i) $\int\limits_0^{2\pi} \cos x \sin x \, dx = (\sin x)^2|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx$
$\rightsquigarrow \int\limits_0^{2\pi} \cos x \sin x \, dx = 0$

(ii) $\int\limits_a^b \exp(x)x^k dx = \exp(x)x^k|_a^b - k \int\limits_a^b \exp(x)x^{k-1}dx$ *usw.*

(iii) Sei $g : [a,b] \to]0,+\infty[$ *stetig und auf* $]a,b[$ *stetig differenzierbar. Dann folgt mit der Funktion* $f(x) := x^{-1}$, $x > 0$, *aus 6.46 b):*

$$\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)}dt = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int^{g(b)} g(a)f(x)dx = \ln g(x)|_a^b.$$

(iv) Die Berechnung von R-Integralen von rationalen Funktionen r, $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p und q Polynome sind, ist mit Hilfe der "Partialbruchzerlegung" möglich. Man kann zeigen, daß r als Summe eines Polynoms und von Partialbrüchen der Gestalt

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{Ax+B}{x^2+ax+b)^n} \; (n \in \mathbb{N}, a, b, A, B \in \mathbb{R})$$

dargestellt werden kann, für die sich z.B. mit Satz 6.46 Stammfunktionen angeben lassen (Übungen: Fichtenholz Bd. 2).

6.3 Uneigentliche Integrale

Bei der Definition des Riemann-Integrals in Kapitel 6.1 spielten zwei Beschränktheitsvoraussetzungen eine ganz wesentliche Rolle: der Integrationsbereich und der Integrand mußten beschränkt sein.
Für eine ganze Reihe von Anwendungen (z.B. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung) reicht das jedoch nicht aus. Im folgenden soll deshalb eine Erweiterung der Integralrechnung (im eindimensionalen Fall) vorgenommen werden, die auch (gewisse) unbeschränkte Integranden und Bereiche zuläßt. Es liegt nahe, diese Erweiterung mittels Grenzübergängen (von Folgen nach Kapitel 6.1 definierter Integrale) vorzunehmen.
Entscheidender Begriff ist dabei das sog. "uneigentliche Integral".

Definition 6.48
Es seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a, +\infty]$ und $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.
Für alle $x \in [a, b[$ existiere das Integral $\int_a^x f(t)dt$, nicht jedoch für $x = b$.

Dann heißt $\int_a^b f(t)dt$ (bei b) uneigentliches Integral.

Das (bei b) uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)dt$ heißt konvergent, wenn $\lim\limits_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$ existiert; ansonsten heißt es divergent.
Im ersten Fall heißt $\int_a^b f(t)dt := \lim\limits_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$ Wert des uneigentlichen Integrals.
Analog definiert man für $b \in \mathbb{R}$, $a \in [-\infty, b[, f \; :]a, b] \to \mathbb{R}$ ein (bei a) uneigentliches Integral und

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)dt, \quad falls\ der\ Grenzwert\ existiert.$$

Sind $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < c < b$ und $\int\limits_a^c f(t)dt$ bzw. $\int\limits_c^b f(t)dt$ bei a bzw. bei b uneigentliche Integrale, so heißt $\int\limits_a^b f(t)dt$ <u>"beidseitig uneigentliches Integral"</u>. Falls die folgenden Grenzwerte existieren, heißt es konvergent und sein Wert ist

$$\int\limits_a^b f(t)dt := \lim_{\substack{x\to a+\\ x\leq c}} \int\limits_x^c f(t)dt + \lim_{\substack{x\to b-\\ x\geq c}} \int\limits_c^x f(t)dt.$$

Für beidseitig uneigentliche Integrale heißt

$$(H)\int\limits_a^b f(t)dt := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int\limits_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} f(t)dt, \quad \text{wobei } b(\varepsilon) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & , b := +\infty \\ b-\varepsilon & , \text{sonst} \end{cases},$$

$a(\varepsilon) := \begin{cases} a+\varepsilon & , \text{sonst} \\ -\frac{1}{\varepsilon} & , a = -\infty \end{cases}$, *<u>"Cauchy'scher Hauptwert"</u> des uneigentlichen Integrals, falls der Limes existiert.*

Beispiel 6.49

a) *Das (bei $+\infty$) uneigentliche Integral $\int\limits_1^{+\infty} t^{-\alpha}dt$ ist konvergent (mit Wert $\frac{1}{\alpha-1}$ gdw. $\alpha > 1$.*

<u>*Beweis:*</u>

$$\forall x > 1 \text{ gilt}: \int\limits_1^x t^{-\alpha}dt = \begin{cases} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^x = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1) & , \alpha \neq 1 \\ \ln t\big|_1^x = \ln x & , \alpha = 1 \end{cases} \qquad (6.41!)$$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_1^x t^{-\alpha}dt = \frac{1}{\alpha-1}$ *gdw.* $\alpha > 1$. $\square$

b) *Das (bei 0) uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 t^{-\alpha}dt$ (für $\alpha > 0$) ist konvergent (mit Wert $\frac{1}{1-\alpha}$) gdw. $\alpha < 1$.*

<u>*Beweis:*</u>

folgt analog zu a) wegen $\int\limits_x^1 t^{-\alpha}dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(1-x^{1-\alpha}) & , \alpha \neq 1 \\ -\ln x & , \alpha = 1 \end{cases}$

$\rightsquigarrow \exists \lim\limits_{x\to 0+} \int_x^1 t^{-\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}$ *gdw.* $\alpha \in]0, 1[$. $\square$

c) *Das beidseitig uneigentliche Integral* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin t \, dt$ *ist nicht konvergent, aber besitzt einen Cauchy'schen Hauptwert.*

<u>*Beweis:*</u>

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^x \sin t \, dt = \lim\limits_{x\to+\infty} -\cos t|_0^x$ *existiert nicht (analog für* $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^x \sin t \, dt$*)! Aber für den Cauchy'schen Hauptwert gilt:*

$$(H)\int_{-\infty}^{\infty} \sin t \, dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \sin t \, dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (-\cos t)|_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} = 0. \quad \square$$

Satz 6.50 *(Majoranten- bzw. Minorantenkriterium)*

Es seien $a \in I\!R$, $b \in]a, +\infty]$, $f, g : [a, b[\to I\!R$ *und es seien* $\int\limits_a^b f(t)dt$ *bzw.* $\int\limits_a^b g(t)dt$ *(bei b) uneigentliche Integrale.*

(i) *Gilt* $|f(t)| \leq g(t)$, $\forall t \in [a, b[$, *und ist das uneigentliche Integral* $\int\limits_a^b g(t)$ *konvergent, so gilt dies auch für* $\int\limits_a^b f(t)dt$.

(ii) *Gilt* $0 \leq g(t) \leq f(t)$, $\forall t \in [a, b[$, *und ist* $\int\limits_a^b g(t)dt$ *divergent, so auch* $\int\limits_a^b f(t)dt$.

<u>**Beweis:**</u>

Wir definieren $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$, $G(x) := \int\limits_a^x g(t)dt$, $\forall x \in [a, b[$.

(i) Dann gilt für alle $a \leq x \leq y < b$:

$$|F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq \int_x^y g(t)dt = |G(y) - G(x)|.$$

Es sei nun (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to b$. Nach Voraussetzung existiert der Limes

$$\lim_{n\to\infty} G(x_n) = \int_a^b g(t)dt.$$

Insbesondere ist die Folge $(G(x_n))$ eine Fundamentalfolge. Aus der obigen Ungleichung folgt, daß auch $(F(x_n))$ eine Fundamentalfolge ist. Deshalb existiert der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)$.

Ist $(\tilde{x}_n)$ eine weitere Folge mit $\tilde{x}_n \to b$, so folgt wieder aus der obigen Ungleichungen, daß

$$\lim_{n\to\infty} |F(x_n) - F(\tilde{x}_n)| \leq \lim_{n\to\infty} |G(x_n) - G(\tilde{x}_n)| = 0,$$

d.h. es existiert $\lim\limits_{x\to b-} \int\limits_a^x f(t)dt$.

(ii) Nach Voraussetzung gilt $0 \leq G(x) \leq F(x)$, $\forall x \in [a, b[$ (nach Integration der vorausgesetzten Ungleichung).

Divergenz von $\int\limits_a^b g(t)dt$ kann nun nur bedeuten, daß für $x \to b-$ die Funktion $G(x)$ nicht beschränkt ist. Dies trifft dann aber auch auf $F(x)$ zu, d.h. auch dieser Grenzwert existtiert nicht! $\square$

Satz 6.51 *(Integralkriterium)*
Es sei $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ monoton fallend.
Dann ist $\int\limits_0^\infty f(t)dt$ konvergent gdw. die Reihe $\sum\limits_{k=0}^\infty f(k)$ konvergent ist. In diesem Fall gilt $\sum\limits_{k=1}^\infty f(k) \leq \int\limits_{k=0}^\infty f(k) \leq \sum\limits_{k=0}^\infty f(k)$.

Beweis:

($\leftarrow$) Es sei zunächst $\sum\limits_{k=0}^\infty f(k)$ konvergent und wir definieren wie im vorherigen Beweis. $F(x) := \int\limits_0^x f(t)dt$, $\forall x \geq 0$. Nach Folgerung 6.13 sind alle diese R-Integrale definiert und nach Satz 6.14 b) ist die Funktion $F : [0, \infty[\to [0, \infty[$ monoton wachsend. Ferner gilt für jedes $n \in I\!N$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f(k) &= \sum_{k=1}^n \inf_{x\in[k-1,k]} f(x)\mu([k-1,k]) \leq \int\limits_0^n f(t)dt = F(n) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sup_{x\in[k-1,k]} f(x)\mu([k-1,k]) = \sum_{k=1}^n f(k-1) \leq \sum_{k=0}^\infty f(k)\end{aligned}$$

Also folgt: $F(x) \leq \sum\limits_{k=0}^\infty f(k)$, $\forall x \geq 0$.

Deshalb ist F monoton wachsend und nach oben beschränkt. Folglich existiert der Grenzwert

$F(x) = \int\limits_0^\infty f(t)dt$ und es gilt die behauptete Ungleichung.

($\leftarrow$) Es sei das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty f(t)dt$ konvergent. Dann gilt analog zu oben für jedes $n \in I\!N$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)dt \leq \int_0^\infty f(t)dt.$$

Deshalb ist die folge $(\sum\limits_{k=1}^{n} f(k))_{n\in I\!N}$ monoton wachsend und beschränkt, und folglich konvergent. $\square$

Beispiel 6.52

a) *Die Konvergenz der Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *für* $\alpha > 1$ *folgt mit* $f(x) := \frac{1}{(x+1)^\alpha}$, $\forall x \geq 0$, *sofort aus Satz 6.51 und Beispiel 6.49 a) wegen* $\int\limits_0^\infty f(t)dt = \int\limits_1^\infty t^{-\alpha}dt$ *(nach Substitutionsregel) und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$.

b) *Das beidseitig uneigentliche Integral* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx$ *ist konvergent.*

<u>Bew.:</u> *Wegen* $\exp(x) \geq 1 + x, \forall x \geq 0$, *folgt* $\exp(-x^2) \geq \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2}$, $\forall x \in I\!R\backslash\{0\}$.
Ferner gilt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = 2\int\limits_0^\infty \exp(-x^2)dx$ *und die Aus– sage folgt aus obiger Abschätzung, Satz 6.50 a) und Beispiel 6.49 a).* $\square$

c) *Es gilt* $\int\limits_0^\infty t^n \exp(-t)dt = n!$, $\forall n \in I\!N$.

<u>Bew.:</u> *Wir betrachten die folgende Funktion* $F : I\!R \to I\!R$,
$F(x) := -\exp(-x) \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}x^k$, $\forall x \in I\!R$ *(*$n \in I\!N$ *fixiert).*

Dann gilt:
$$\begin{aligned} F'(x) &= \exp(-x) \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}x^k - \exp(-x) \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!}x^{k-1} \\ &= \exp(-x)(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}x^k) = \exp(-x)x^n, \ \forall x \in I\!R. \end{aligned}$$

Also ist F *Stammfunktion zum Integranden in der Behauptung und es folgt nach Satz 6.44:*

$$\int_0^x t^n \exp(-t)dt = F(x) - F(0) = F(x) + n!$$

Nach Beispiel 4.60 e) gilt ferner $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$.
Deshalb konvergiert das fragliche Integral und sein Wert ist $n!$. $\square$

Beispiel 6.52 c) wirft nun die Frage nach der Möglichkeit der Erweiterung des Fakultätsbegriffs für reelle Zahlen auf und weist auch auf einen Lösungsansatz hin, die sog. "Gamma-Funktion".

Satz 6.53
$\forall x > 0$ *ist das uneigentliche Integral* $\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty t^{x-1}\exp(-t)dt$ *konvergent.*
Für die so definierte "Gamma-Funktion" $\Gamma :]0, +\infty[\to I\!R$ *gilt:* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall x > 0$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)dt$, *und* Γ *ist stetig.*

<u>**Beweis:**</u>
Für $x \in]0,1[$ ist $\int\limits_0^\infty t^{x-1}\exp(-t)dt$ sogar ein beidseitig uneigentliches Integral (vgl. Bsp. 6.49 a) und b)). Wir untersuchen deshalb (getrennt) die Konvergenz von
(a) $\int\limits_0^1 t^{x-1}\exp(-t)dt$, für $x \in]0,1[$, und (b) $\int\limits_1^\infty t^{x-1}\exp(-t)dt$, $x > 0$.

(a) Für $x \in]0,1[$ und $t \in]0,1[$ gilt $|t^{x-1}\exp(-t)| \leq t^{x-1}$ und $\int\limits_0^1 t^{x-1}dt$ ist konvergent nach Beispiel 6.49 b). Aus dem Majorantenkriterium 6.50 a) (das analog auch für uneigentliche Integrale bez. der unteren Grenze gilt) folgt dann auch die Konvergenz des fraglichen Integrals $\int\limits_0^1 t^{x-1}\exp(-t)dt$.

(b) Sei $x > 0$ bel. gewählt. Dann existiert ein $\bar{t} > 1$, so daß $t^{x-1}\exp(-\frac{t}{2}) \leq 1$, $\forall t \geq \bar{t}$ (wieder wegen Beispiel 4.66 f)).
$\leadsto$ $t^{x-1}\exp(-t) \leq \exp(-\frac{t}{2})$, $\forall t \geq \bar{t}$, und nach Satz 6.50 a) ist das Integral $\int\limits_1^\infty t^{x-1}\exp(-t)dt$ konvergent, da dies auch für $\int\limits_{\bar{t}}^\infty \exp(-\frac{t}{2})dt$ gilt.

Damit ist die Konvergenz von $\Gamma(x)$, $\forall x > 0$, vollständig bewiesen und die Gamma-Funktion ist wohl-definiert.
Wir beweisen nun die Aussagen über $\Gamma(1)$ und $\Gamma(\frac{1}{2})$:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty \exp(-t)dt = \lim_{x\to\infty}(-\exp(-t))|_0^x = \lim_{x\to\infty}(-\exp(-x)+1) = 1,$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\exp(-t)dt = \lim_{x\to\infty}\int\limits_0^x t^{-\frac{1}{2}}\exp(-t)dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2 \int\limits_0^{\sqrt{x}} \exp(-u^2)du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)dt.$$

Dabei resultiert das vorletzte Gleichheitszeichen aus der Substitutionsregel Satz 6.46 b) mit $g : [0,x] \to [0,\sqrt{x}]$, $g(t) := \sqrt{t}$, $\forall t \in [0,x]$,
$\rightsquigarrow g'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$, $\forall t \in]0,x[$.

Nun zum Beweis der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall x > 0$. Es seien $x > 0$ und $0 < y < z + \infty$. Dann folgt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int\limits_y^z t^x \exp(-t)dt &= (t^x(-\exp(-t)))|_y^z - \int\limits_y^z xt^{x-1}(-\exp(-t))dt \\ &= -z^x \exp(-z) + y^x \exp(-y) + x \int\limits_y^z t^{x-1} \exp(-t)dt.\end{aligned}$$

Für $z \to \infty$ und $y \to 0$ entsteht aus dieser Identität:

$$\Gamma(x+1) = 0 + x\Gamma(x).$$

Abschließend beweisen wir die Stetigkeit von Γ. Die Schwierigkeit besteht hier in der Vertauschung der Grenzprozesse für die Stetigkeit und das uneigentliche Integral.
Es seien $x_o > 0$ und $\varepsilon > 0$ bel. gewählt. Ferner wählen wir $r \in]0, x_o[$. Zunächst ist klar, daß für alle $x \in [x_o - r, x_o + r]$ folgendes gilt:

$$t^{x-1}\exp(-t) \le \begin{cases} t^{x_0-r-1} & \text{, falls} \quad t \in]0,1[, \\ t^{x_0+r-1}\exp(-t) & \text{, falls} \quad t \ge 1. \end{cases}$$

Da die uneigentlichen Integrale $\int\limits_0^1 t^{x_o-r-1}dt$ und $\int\limits_1^\infty t^{x_o+r-1}\exp(-t)dt$ nach 6.49 b) bzw. 6.52c) konvergieren, existieren Konstanten $\underline{t} \in]0,1[$, $\bar{t} \ge 1$, so daß

$$\left.\begin{array}{l} \int\limits_0^{\underline{t}} t^{x-1}\exp(-t)dt < \frac{\varepsilon}{6} \\ \int\limits_{\bar{t}}^{\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt < \frac{\varepsilon}{6} \end{array}\right\} \forall x \in [x_o - r, x_o + r]$$

("gleichmäßige Konvergenz" der uneigentlichen Integrale bez. x). Es sei jetzt $x \in [x_o - r, x_o + r]$ bel. gewählt.

$$\rightsquigarrow |\Gamma(x) - \Gamma(x_o)| \;\le\; |\int\limits_0^{\underline{t}} t^{x-1}\exp(-t)dt| + |\int\limits_0^{\underline{t}} t^{x_o-1}\exp(-t)dt|$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|\int\limits_{\underline{t}}^{\bar{t}}(t^{x-1}-t^{x_o-1})\exp(-t)dt\right| \\
&+\left|\int\limits_{\bar{t}}^{\infty}t^{x-1}\exp(-t)dt\right|+\left|\int\limits_{\bar{t}}^{\infty}t^{x_o-1}\exp(-t)dt\right| \\
<\ & \frac{\varepsilon}{3}+\int\limits_{\underline{t}}^{\bar{t}}|t^{x-1}-t^{x_o-1}|dt+\frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun die Funktion $f(t,x) := t^{x-1}$ auf der Menge $[\underline{t},\bar{t}] \times [x_o - r, x_o + r]$. f ist auf dieser Menge gleichmäßig stetig. Folglich existiert ein $\delta => 0$, ($\delta = \delta(\varepsilon, x_o)$, da $D(f)$ von x_o abhängt), so daß
$|f(t,x) - f(t,x_o)| = |t^{x-1} - t^{x_o-1}| < \frac{\varepsilon}{3(\bar{t}-\underline{t})}$, falls $t \in [\bar{t},\underline{t}]$, $x \in [x_o - r, x_o + r]$, $|x - x_o| < \delta$.
$\rightsquigarrow \int\limits_{\underline{t}}^{\bar{t}} |t^{x-1} - t^{x_o-1}|dt = \int\limits_{\underline{t}}^{\bar{t}} |f(t,x) - f(t,x_o)|dt \leq (\bar{t}-\underline{t})\frac{\varepsilon}{3(\bar{t}-\underline{t})} = \frac{\varepsilon}{3}$, falls $|x - x_0| < \delta$.
$\rightsquigarrow |\Gamma(x) - \Gamma(x_0)| < \varepsilon$, falls $|x - x_0| < \min\{\delta, r\}$. □

Bemerkung 6.54
Wegen $\Gamma(1) = 1$ *und der "Funktionalgleichung" der Gamma-Funktion gilt*

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in I\!N_0.$$

Man kann also die Gamma-Funktion tatsächlich als die stetige Fortsetzung der "Fakultäts-Funktion" $n \mapsto (n-1)!$, $\forall n \in I\!N$, *auf das Intervall* $]0, +\infty[$ *auffassen!*
Die Gamma-Funktion ist sogar beliebig oft differenzierbar auf $]0, +\infty[$ *und es gilt*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1}(\ln t)^n \exp(-t)dt, \quad \forall x > 0.$$

(vgl. Barner/Flohr, Bd. I, Kap. 11.3).
Die Gamma-Funktion hat weitere vielfältige Eigenschaften, z.B.

$\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \quad \forall x > 0$ *(Gaußsche Definition von* Γ*),*
$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad \forall x \in]0,1[$

(vgl. Heuser, Bd. 2., Kap. 150).
Die letztere Formel impliziert z.B. $(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi \rightsquigarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Diese Formel für $\Gamma(x)$ ist besonders bedeutungsvoll, da mit der Funktionalgleichung einerseits die Rückführung auf den Fall $x \in]0,1[$ möglich ist und andererseits durch die Formel

$$\Gamma(x) := \frac{\pi}{\sin \pi x} \frac{1}{\Gamma(1-x)}, \quad \forall x < 0,\ x \notin \mathbb{Z},$$

die Fortsetzung der Gamma-Funktion auf $\mathbb{R} \backslash \{-\mathbb{N}_0\}$ (unter Erhaltung ihrer Eigenschaften) möglich ist.

Satz 6.55
Die Euklidische Einheitskugel $B_m := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leq 1\}$ ist Jordan-meßbar und ihr Jordan-Inhalt ist

$$\mu(B_m) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{m}{2})}.$$

(Insbesondere gilt: $\mu(B_1) = 2$, $\mu(B_2) = \pi$, $\mu(B_3) = \frac{4}{3}\pi$).

<u>**Beweis:**</u>
Wir führen zunächst die folgende Bezeichnung ein:

$$B_m(0,r) := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leq r^2\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}\ (r \geq 0)$$

$\rightsquigarrow B_m = B_m(0,1)$. $B_m(0,r)$ kann äquivalent wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} B_m(0,r) = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \in [-r, r],\ \text{und für } j = 1, \ldots, m-1, \\ -(r^2 - \sum_{i=j+1}^{m} x_i^2)^{1/2} \leq x_j \leq (r^2 - \sum_{i=j+1}^{m} x_i^2)^{1/2}\}. \end{aligned}$$

Definiert man nun Funktionen φ_j, $\psi_j : \mathbb{R}^{m-j} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m-1$, wie folgt

$$\varphi_j := -\psi_j,\ \psi_j(x_{j+1}, \ldots, x_m) := \begin{cases} (r^2 - \sum_{i=j+1}^{m} x_i^2)^{1/2}, & \text{falls } \sum_{i=j+1}^{m} x_i^2 \leq r^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

so sind diese Funktionen stetig und man ersieht aus Def. 6.32, daß die Kugel $B_m(0,r)$ eine Zylindermenge im $\mathbb{R}^m$ ist und folglich nach Lemma 6.33 Jordan-meßbar.
Als nächstes Resultat leiten wir nun eine Formel für $\mu(B_m)/\mu(B_{m-1})$ für $m \geq 2$ her. Dazu verwenden wir den Satz von Cavalieri (Folg. 6.31) und setzen $p := 1$, $q := m-1$. Dann gilt für die Projektion von B_m auf $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(B_m) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R}^{m-1} \text{ mit } (y,z) \in B_m\} = [-1,1]. \\ \rightsquigarrow B_y &= \{z \in \mathbb{R}^{m-1} : (y,z) \in B_m\} = \{z \in \mathbb{R}^{m-1} : \|z\| \leq (1-y^2)^{1/2}\} \\ &= B_{m-1}(0, \sqrt{1-y^2}) \quad (\forall y \in [-1,1]). \end{aligned}$$

Nach unseren obigen Überlegungen sind B_m und B_y, $\forall y \in P(B_m)$, Jordan-meßbar. Deshalb liefert Folgerung 6.31:

$$(*)\ \ \mu(B_m) = \int_{-1}^{1} \mu(B_y)dy = \int_{-1}^{1} \mu(B_{m-1}(0, \sqrt{1-y^2}))dy.$$

Mit Hilfe der allgemeinen Substitutionsregel (Satz 6.35) zeigen wir nun, daß $\mu(B_m(0,r)) = r^m \mu(B_m(0,1))$, $\forall r > 0$.
Es sei $r > 0$ beliebig gewählt.
Wir setzen $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $g(t) := rt$, $\forall t \in \mathbb{R}^m$. g ist injektiv, stetig differenzierbar und es gilt $g'(t) = rI$ (I-identische Matrix).
$\rightsquigarrow g : B_m \to B_m(0,r)$ und $\det g'(t) = r^m$, $\forall t \in \mathbb{R}^m$.
Satz 6.35 ergibt deshalb mit $f := \chi_{B_m(0,r)}$ (Charakt. Funktion):

$$\int_{g(B_m(0,1))} f(x)dx = \mu(B_m(0,r)) = \int_{B_m} \underbrace{f(rt)}_{=1} |\det g'(t)|dt = r^m \mu(B_m).$$

Dies nutzen wir aus und erhalten gemeinsam mit Formel $(*)$:

$$\begin{aligned}
\mu(B_m) &= \int_{-1}^{1} \mu(B_{m-1}(0, \sqrt{1-y^2}))dy = \int_{-1}^{1} \mu(B_{m-1})(\sqrt{1-y^2})^{m-1}dy \\
\rightsquigarrow \frac{\mu(B_m)}{\mu(B_{m-1})} &= \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\frac{m-1}{2}} dy \\
&= -\int_{0}^{\pi} (\sin^2 t)^{\frac{m-1}{2}} (-\sin t)dt \quad \text{(Substititution } y = \cos t) \\
&= \int_{0}^{\pi} (\sin t)^m dt \\
&= \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} \quad (\text{vgl.Heuser, Bd.1, Kap.94, Bd.2, Kap.150}).
\end{aligned}$$

Schließlich beweisen wir die Aussage des Satzes mit Induktion über m:

$$m = 1 : \mu(B_1) = 2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \rightsquigarrow \quad \text{richtig für } m = 1.$$

Die Aussage sei nun für $m-1$ richtig und wir betrachten

$$\begin{aligned}
\mu(B_m) &= \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}\mu(B_{m-1}) \\
&= \sqrt{\pi}\pi^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\Gamma(1+\frac{m-1}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage vollständig bewiesen.
(Die Spezialfälle $m = 2$ bzw. $m = 3$ ergeben sich wie folgt:

$$m = 2: \qquad \mu(B_2) = \frac{\pi}{\Gamma(2)} = \pi$$

$$m = 3: \qquad \mu(B_3) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(1+\frac{3}{2})} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\Gamma(1+\frac{1}{2})} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}\pi)$$

$\square$

Bemerkung 6.56
Aus der Formel für den Jordan-Inhalt der Einheitskugel im $\mathbb{R}^m$ *ergibt sich das folgende "Inhaltsparadoxon":*

$$\mu(B_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d.h. der Jordan-Inhalt der Einheitskugel ist eine Nullfolge mit wachsender Dimension (für kleine m *wächst er jedoch zunächst!).*
Man sieht dies schnell ein für gerades $m \in \mathbb{N}$*, d.h.* $m = 2p$ *bzw.* $p = \frac{m}{2}$*:*

$$\rightsquigarrow \mu(B_m) = \frac{\pi^p}{\Gamma(1+p)} = \frac{\pi^p}{p!} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0!$$

da dies ja genau die Glieder der (konvergenten) Exponentialreihe von $\exp(\pi)$ *sind. Für* m *ungerade gilt (durch mehrfache Anwendung der Funktionalgleichung) die Abschätzung* $\mu(B_m) \leq 2\frac{\pi^p}{p!}$ *und alles folgt analog.*

6.4 Das Riemann-Stieltjes-Integral

Gegenstand dieses Kapitels ist eine für bestimmte Anwendungen (z.B. die Wahrscheinlichkeitsrechnung, vgl. Kap. 12) wichtige Verallgemeinerung des eindimensionalen Riemann-Integrals.

Definition 6.57
Es seien $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Ist* $Z \in \mathcal{Z}([a,b])$*, d.h.* $Z = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_M = b\}$*, und* $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_M)$ *ein Vektor von Zwischenwerten, d.h.* $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$*,* $j = 1, \ldots, M$*, so heißt*

$$S(f, \alpha; Z, \xi) := \sum_{j=1}^{M} f(\xi_j)(\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})).$$

Riemann-Stieltjes-Summe (RS-Summe) für f *bez.* α *und* ξ*.*
Ist (Z_n) *eine Zerlegungsfolge in* $\mathcal{Z}([a,b])$ *mit*
$d(Z_n) := \max\limits_{j=1,\ldots,M_n} |x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *und* $(\xi^{(n)})$ *eine Folge von zugehörigen Zwischenvektoren, so heißt* $(S(f, \alpha; Z_n, \xi^{(n)}))$ *RS-Folge.*

Konvergiert nun jede RS-Folge gegen ein und denselben Grenzwert, so sagt man, f ist auf $[a,b]$ bez. α RS-integrierbar und dieser Grenzwert heißt dann Riemann-Stieltjes-Integral (RS-Integral) von f über $[a,b]$ bez. des Integrators α.
Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$ bzw. $\int\limits_a^b f d\alpha$,
und $RS([a,b];\alpha) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f$ ist bez. α auf $[a,b]$ RS-integierbar $\}$.

Bemerkung 6.58
Für $\alpha(x) := x$, $\forall x \in [a,b]$, ist $S(f,\alpha;Z,\xi)$ gerade eine Riemannsche Zwischensumme gemäß Bem. 6.37 und das RS-Integral geht in diesem Fall in das R-Inegral für (ein stetiges) f auf $[a,b]$ über. I.a. jedoch weist die Differenz $\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1})$ dem Intervall $[x_{j-1},x_j]$ ein anderes "Maß" zu als $\mu([x_{j-1},x_j])$.

Satz 6.59

(i) $f,g \in RS([a,b];\alpha) \Longrightarrow f+g,\ cf \in RS([a,b],\alpha)$, $\forall c \in \mathbb{R}$, *und es gilt*

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b (f+g)(x)d\alpha(x) &= \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) + \int\limits_a^b g(x)d\alpha(x)\\ \int\limits_a^b (cf)(x)d\alpha(x) &= c\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)\end{aligned}$$

(ii) $f \in RS([a,b];\alpha)$ *und* $f \in RS([a,b];\beta) \Longrightarrow f \in RS([a,b];\alpha+\beta)$, *und* $f \in RS([a,b];c\alpha)$, $\forall c \in \mathbb{R}$, *und es gilt*

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)d(\alpha+\beta)(x) &= \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) + \int\limits_a^b f(x)d\beta(x),\\ \int\limits_a^b f(x)d(c\alpha(x) &= c\int\limits_a^b f d\alpha.\end{aligned}$$

Beweis:
(i) Aus $f,g \in RS([a,b];\alpha)$ folgt für die RS-Folgen

$(S(f,\alpha;Z_n,\xi^{(n)}))$ bzw. $(S(g,\alpha;Z_n,\xi^{(n)}))$:

$(S(f+g,\alpha;Z_n,\xi^{(n)})) = (S(f,\alpha;Z_n,\xi^{(n)})) + (S(g,\alpha;Z_n,\xi^{(n)}))$ und damit

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) + \int\limits_a^b g(x)d\alpha(x) &= \lim_{n\to\infty} S(f,\alpha;Z_n\xi^{(n)}) + \lim_{n\to\infty} S(g,\alpha;Z_n,\xi^{(n)})\\ &= \lim_{n\to\infty}(S(f,\alpha;Z_n,\xi^{(n)}) + S(g,\alpha;Z_n,\xi^{(n)}))\\ &= \lim_{n\to\infty} S(f+g;Z_n,\xi^{(n)}).\end{aligned}$$

Der letztere Limes ist sicher unabhängig von der Wahl der Zerlegungsfolge (Z_n) mit $d(Z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und der Folge der Zwischenvektoren $(\xi^{(n)})$. Deshalb ist der letzte Grenzwert definitionsgemäß das RS-Integral

$$\int_a^b (f+g)(x)d\alpha(x).$$

Für den anderen Fall in (i) argumentiert man analog.
(ii) Wir beschränken uns wieder auf die Additivitätseigenschaft. Gilt $f \in RS([a,b];\alpha)$ und $f \in RS([a,b];\beta)$, so folgt alles aus der Tatsache

$$S(f,\alpha+\beta;Z,\xi) = S(f,\alpha;Z,\xi) + S(f,\beta;Z,\xi)$$

und einer analogen Argumentation zu (i). □

Satz 6.60 *("partielle Integration")*
Es sei $f \in RS([a,b];\alpha)$ (bzw. $\alpha \in RS([a,b];f)$).
Dann folgt $\alpha \in RS([a,b];f)$ bzw. $f \in RS([a,b];\alpha)$) und es gilt

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Beweis:
Es sei $Z := \{x_o, x_1, \ldots, x_M\} \in \mathcal{Z}([a,b])$ und ξ ein Zwischenvektor. Es gelte z.B. $f \in RS([a,b];\alpha)$.
Zu $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, M$, definieren wir noch $\xi_0 := a$, $\xi_{M+1} := b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{M} \alpha(\xi_j)[f(x_j) - f(x_{j-1})] + \sum_{j=0}^{M} f(x_j)[\alpha(\xi_{j+1}) - \alpha(\xi_j)] = \\ &= f(x_M)\alpha(\xi_{M+1}) - f(x_0)\alpha(\xi_0) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a). \end{aligned}$$

Alle verschiedenen Komponenten von ξ bilden eine Zerlegung $\tilde{Z}$ von $[a,b]$. Führen wir noch die folgende Bezeichnung $\tilde{\xi} := (x_0, \ldots, x_M)$ ein, so bedeutet die obige Identität in der Sprache der RS-Summen:

$$(*) \quad S(\alpha, f; Z, \xi) + S(f, \alpha; \tilde{Z}, \tilde{\xi}) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Ist nun (Z_n) eine Zerlegungsfolge mit $d(Z_n) \to 0$ und $(\xi^{(n)})$ eine Folge von Zwischenvektoren, so gilt natürlich auch $d(\tilde{Z}_n) \to 0$, wobei $\tilde{Z}_n$ wie oben aus $\xi^{(n)}$ gebildet wird. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\alpha;\tilde{Z}_n,\xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

und der Gleichung $(*)$ existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S(\alpha, f; Z_n; \xi^{(n)})$$

und ist unabhängig von der Wahl von (Z_n), $(\xi^{(n)})$. Dieser Grenzwert ist aber definitionsgemäß des RS-Integral $\int\limits_a^b \alpha(x)df(x)$ und die behauptete Identität folgt aus $(*)$ durch Grenzübergang $n \to \infty$. □

Satz 6.61 *(Stieltjes)*
Aus $f \in C([a,b])$ und $\alpha : [a,b] \to I\!R$ monoton wachsend folgt $f \in RS([a,b];\alpha)$ und es gilt:

$$|\int_a^b f(x)d\alpha(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)|(\alpha(b) - \alpha(a))$$

Beweis:
Es gilt für eine bel. Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}([a,b])$ und einen bel. Zwischenvektor ξ die folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}\underline{s}(Z) := \sum_{j=1}^{M} \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)(\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})) &\leq S(f,\alpha; Z,\xi)\\ \leq \sum_{j=1}^{m} \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)(\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})) &=: \bar{S}(Z).\end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma 6.4 zeigt man, daß wie bei den Darbouxschen Unter- bzw. Obersummen für zwei bel. Zerlegungen Z, $\tilde{Z}$ aus $\mathcal{Z}([a,b])$ stets gilt:

$$\underline{s}(Z) \leq \bar{s}(\tilde{Z}).$$

Ebenfalls wir früher definieren wir nun $\mathcal{I} := \sup\limits_{Z\in\mathcal{Z}([a,b])} \underline{s}(Z)$.
Dann gilt: $\underline{s}(Z) \leq \mathcal{J} \leq \bar{s}(Z), \ \ \forall Z \in \mathcal{Z}([a,b])$.
Daraus resultiert dann gemeinsam mit der obigen Ungleichung

$$|S(f,\alpha; Z,\xi) - \mathcal{J}| \leq \bar{s}(Z) - \underline{s}(Z), \ \ \forall Z \in \mathcal{Z}([a,b]).$$

Ist nun (Z_n) eine Zerlegungsfolge in $\mathcal{Z}([a,b])$ mit $d(Z_n) \to 0$ und $(\xi^{(n)})$ eine Folge von zugehörigen Zwischenvektoren, so gilt zunächst

$$|S(f,\alpha; Z_n,\xi^{(n)}) - \mathcal{J}| \leq \bar{s}(Z_n) - \underline{s}(Z_n), \ \ \forall n \in I\!N.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf $[a,b]$ folgt: $\exists\delta > 0$, so daß

$$|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}, \quad \text{falls} \quad |x - \tilde{x}| < \delta, \ x, \tilde{x} \in [a,b].$$

Wir wählen nun $n_0 \in I\!N$ mit $d(Z_n) < \delta$, $\forall n \geq n_0$.
Analog zum Beweis von Satz 6.7 erhalten wir dann für bel. $n \geq n_0$

$$\bar{s}(Z_n) - \underline{s}(Z_n) < \sum_{j=1}^{M} \frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}(\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1})) = \varepsilon.$$

Also existiert der Grenzwert der RS-Folge $(S(f,\alpha;Z_n,\xi^{(n)}))$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\alpha;Z_n,\xi^{(n)}) = \mathcal{I},$$

d.h. der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl von (Z_n), $(\xi^{(n)})$. Nach Definition 6.57 folgt: $f \in RS([a,b];\alpha)$.
Ist schließlich $S(f,\alpha;Z,\xi)$ eine bel. RS-Summe, so gilt:

$$\begin{aligned} |S(f,\alpha;Z,\xi)| &\leq \sum_{j=1}^{M} |f(\xi_j)||\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1})| \\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \sum_{j=1}^{M} |\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1})| \\ &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|(\alpha(b)-\alpha(a). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt dann auch für den Grenzwert von RS-Folgen. □

Folgerung 6.62
Ist $f \in C([a,b])$ und läßt sich $\alpha : [a,b] \to I\!R$ als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellen, so gilt: $f \in RS([a,b],\alpha)$ bzw.
$\alpha \in RS([a,b];f)$.
Insbesondere gilt dies für Lipschitzstetige Funktionen α.

Beweis:
Seien $\alpha_1, \alpha_2, [a,b] \to I\!R$ monoton wachsend und es gelte $\alpha := \alpha_1 - \alpha_2$, zu zeigen ist: $f \in RS([a,b],\alpha)$.
Satz 6.61 $\rightsquigarrow f \in RS([a,b],\alpha_1)$ und $f \in RS([a,b],\alpha_2)$,
Satz 6.59 ii)$\rightsquigarrow f \in RS([a,b],\underbrace{\alpha_1-\alpha_2}_{=\alpha})$.
Satz 6.60 $\rightsquigarrow \alpha \in RS([a,b],f)$.
Sei α nun Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L.
Wir definieren $\alpha_1(x) := L(x-a)$, $\forall x \in [a,b]$ ist monoton wachsend.
$\alpha_2(x) := \alpha_1(x) - \alpha(x)$, $\forall x \in [a,b]$.
Noch zu zeigen: α_2 ist monoton wachsend: seien $x, y \in [a,b], x < y$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \alpha_2(y) - \alpha_2(x) &= L(y-a) - L(x-a) - \alpha(y) + \alpha(x) \\ &= L(y-x) - (\alpha(y)-\alpha(x)) \geq 0, \end{aligned}$$

da $\alpha(y) - \alpha(x) \leq |\alpha(y)-\alpha(x)| \leq L(y-x)$. □

Bemerkung 6.63
Funktionen, die sich als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellen lassen, heißen <u>*Funktionen beschränkter Variation*</u>*. Diese Begriffsbildung stammt von folgender äquivalenter Charakterisierung solcher Funktionen:*

$$\exists c > 0 : \forall Z \in \mathcal{Z}([a,b]) \textit{ gilt: } \sum_{j=1}^{M} |\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}| \leq c$$

(vgl. Heuser Bd. 2, Kap. 91)

Unser nächstes Resultat zeigt, daß RS-Integrale mit Hilfe von Riemann-Integralen berechnet werden können, wenn der Integrator α "hinreichend glatt" ist.

Satz 6.64
Es seien $f \in C([a,b])$ und $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

<u>**Beweis:**</u>
Nach Voraussetzung ist α Lipschitz-stetig auf $[a,b]$, da α' gleichmäßig beschränkt ist, und nach dem Mittelwertsatz (5.10). Nach Satz 6.62 existiert deshalb $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ und nach Satz 6.7 existiert auch $\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$.
Zu zeigen ist die Gleichheit der Integrale.
Es sei nun $Z \in \mathcal{Z}([a,b])$ bel. gewählt. Wieder aus Satz 5.10 folgt:
$\forall j = 1, \ldots, M \exists \eta_j \in]x_{j-1}, x_j[$ mit der Eigenschaft

$$\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}) = \alpha'(\eta_j)(x_j - x_{j-1}).$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow S(f, \alpha; Z, \eta) &= \sum_{j=1}^{M} f(\eta_j)(\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^{M} f(\eta_j)\alpha'(\eta_j)(x_j - x_{j-1}) = S_R(f\alpha'; Z, \eta). \end{aligned}$$

Letzteres ist dabei eine Riemannsche Zwischensumme gemäß Bem. 6.37. Wir betrachten nun eine Zerlegungsfolge (Z_n) in $Z([a,b])$ mit $d(Z_n) \to 0$, und konstruieren analog zu oben eine Folge $(\eta^{(n)})$ von zugehörigen Zwischenvektoren. Dann gilt

$$S(f, \alpha; Z_n, \eta^{(n)}) = S_R(f\alpha'; Z_n, \eta^{(n)}), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

und, wegen $f \in RS([a,b];\alpha)$, existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\alpha;Z_n,\eta^{(n)}) = \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x).$$

Nach Bem. 6.37 gilt aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} S_R(f\alpha', Z_n, \eta^{(n)}) = \int\limits_a^b f(x)\alpha'(x)dx$ und die behauptete Gleichheit der Integrale ist bewiesen. □

Satz 6.65
Es seien $f \in C([a,b])$ und $\alpha : [a,b] \to I\!R$ monoton wachsend. Ferner besitze α höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) &= \int\limits_a^b f(x)d\alpha_s(x) + f(a)(\alpha(a+)-\alpha(a)) \\ &\quad + \sum_{y\in U(\alpha}) f(y)(\alpha(y+)-\alpha(y-)) + f(b)(\alpha(b)-\alpha(b-))\end{aligned}$$

wobei $\alpha_s(x) := \alpha(x) - s(\alpha;x)$, $\forall x \in [a,b]$, $s(\alpha;\cdot)$ die Sprungfunktion von α (vgl. 4.57) und $U(\alpha)$ die Menge aller Unstetigkeitsstellen von α in $]a,b[$ ist.

Beweis:
Das Integral auf der linken Seite existiert nach Satz 6.61. Nach Satz 4.57 ist α_s monoton wachsend und stetig. 6.61 $\rightsquigarrow \int\limits_a^b f(x)d\alpha_s(x)$ existiert.
$s(\alpha,\cdot) := \alpha - \alpha_s$ ist als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar, d.h. nach 6.62 $\exists \int\limits_a^b f(x)ds(\alpha,x)$.
6.59 $\rightsquigarrow \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = \int\limits_a^b f(x)d\alpha_s(x) + \int\limits_a^b f(x)ds(\alpha,x)$
z.z.: $\int\limits_a^b f(x)ds(\alpha,x)$ ergibt gerade die Summe auf der rechten Seite der Behauptung.
Nach 4.56 gilt:

$$\begin{aligned}&s(\alpha,a) = 0 \\ &s(\alpha,x) = [\alpha(a+)-\alpha(a)] + \sum_{\substack{y\in U(\alpha)\\ y<x}} [\alpha(y+)-\alpha(y-)] + [\alpha(x)-\alpha(x-)] \\ &\qquad\qquad \forall x \in]a,b]\end{aligned}$$

Es gelte $U(\alpha) = \{x_1, \dots, x_M\}$.

$\rightsquigarrow s(\alpha, x) = [\alpha(a+) - \alpha(a)] + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ x_j < x}}^{M} [\alpha(x_j+) - \alpha(x_j-)] + [\alpha(x) - \alpha(x-)]$

Wir setzen noch $x_0 := a, x_{M+1} := b$.

$$\rightsquigarrow \int\limits_a^b f(x)ds(\alpha, x) = \sum_{j=0}^{M} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)ds(\alpha, x) \quad \text{vgl. } 6.68$$

Wir berechnen nun noch die Integrale $\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)ds(\alpha, x)$, $\forall j = 1, \dots, M$

Sei $j \in \{1, \dots, M\}$, und wir wählen eine Zerlegungsfolge $(\tilde{Z}_n) \in \mathcal{Z}([x_j, x_{j+1}])$ nebst zugehöriger Folge von Zwischenvektoren $\tilde{\xi}^{(n)}$. $\tilde{Z}_n$ habe die Gestalt $\{\tilde{x}_o^{(n)} = x_j < \tilde{x}_1^{(n)} < \dots < \tilde{x}_{M_n}^{(n)} = x_{j+1}\}$. Dann gilt für die zugehörige RS-Summe:

$$\begin{aligned} S(f, s(\alpha, \cdot); \tilde{Z}_n, \tilde{\xi}^{(n)}) &= \sum_{i=1}^{M_n} f(\tilde{\xi}_i^{(n)})(s(\alpha, \tilde{x}_i^{(n)}) - s(\alpha, \tilde{x}_{i-1}^{(n)})) \\ &= f(\tilde{\xi}_1^{(n)})(s(\alpha, \tilde{x}_1^{(n)}) - s(\alpha, x_j)) \\ &\quad + f(\tilde{\xi}_{M_n}^{(n)})(s(\alpha, x_{j+1}) - s(\alpha, \tilde{x}_{M_n-1})), \end{aligned}$$

da $s(\alpha, \cdot)$ konstant ist in $]x_j, x_{j+1}[$.
Es gelte jetzt auch $d(\tilde{Z}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \exists \lim_{n\to\infty} S(f, s(\alpha, \cdot; \tilde{Z}_n, \tilde{\xi}^{(n)})) &= f(x_j)(s(\alpha, x_j+) - s(\alpha, x_j)) \\ &\quad + f(x_{j+1})(s(\alpha, x_{j+1}) - s(\alpha, x_{j+1}-)) \\ &= \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)ds(\alpha, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \int\limits_a^b f(x)ds(\alpha, x) &= \sum_{=0}^{M} [f(x_j)(s(\alpha, x_j+) - s(\alpha, x_j)) \\ &\quad + f(x_{j+1})(s(\alpha, x_{j+1}) - s(\alpha, x_{j+1}-))] \\ &= f(b)s(\alpha, b) - f(a)s(\alpha, a) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{M} [f(x_j)s(\alpha, x_j+) - f(x_{j+1})s(\alpha, x_{j+1}-)] \\ &= f(b)(s(\alpha, b) - s(\alpha, b-)) + f(a)(s(\alpha, a+) - s(\alpha, a)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M} f(x_j)(s(\alpha, x_j+) - s(\alpha, x_j-)) \end{aligned}$$

wegen $s(\alpha, a) = 0$, $s(\alpha, a+) = \alpha(a+) - \alpha(a)$
$s(\alpha, x_j+) - s(\alpha, x_j-) = \alpha(x_j+) - \alpha(x_j-)$, $j = 1, \ldots, M$
$s(\alpha, x) = \alpha(x) - \alpha_s(x)$, $\forall x \in [a, b]$ und α_s stetig
$s(\alpha, b) - s(\alpha, b-) = \alpha(b) - \alpha(b-)$

Durch Einsetzen in die obige Formel entsteht die Behauptung. $\square$

Der Satz bleibt auch (mit einem technischeren Beweis) für abzählbar viele Sprungstellen gültig.

Bemerkung 6.66

Ist $\alpha : [a, b] \to I\!R$ monoton wachsend und stückweise konstant mit endlich vielen Sprungstelln, so gilt:

$\alpha_s \equiv 0 \rightsquigarrow \int\limits_a^b f(x)d\alpha_s(x) = 0$, $\alpha = s(\alpha, \cdot)$, und das RS-Integral ist nach Satz 6.63 gleich der Summe der Funktionswerte von f in den Sprungstellen von α multipliziert mit den Sprunghöhen von α!

Beispiel 6.67

Sei $f : [0, +\infty[\to I\!R$ stetig und $\lceil x \rceil := \max\{n \in I\!N_o : n \leq x\}$, $\forall x \geq 0$. Die Funktion $\alpha : [0, +\infty[\to I\!R$, $\alpha(x) := \lceil x \rceil$, $\forall x \geq 0$ ist also monoton wachsend, stückweise konstant mit Sprüngen von 1.

$$\rightsquigarrow \int\limits_0^n f(x)d\lceil x \rceil = \sum_{k=1}^n f(k), \quad \forall n \in I\!N$$

$\rightsquigarrow$ *RS-Integrale beinhalten endliche Summen und R-Integrale!*

Satz 6.68

Es sei $f \in C([a, b])$ und $\alpha : [a, b] \to I\!R$ lasse sich als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellen. Ferner sei $c \in]a, b[$. Dann gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = \int\limits_a^c f(x)d\alpha(x) + \int\limits_c^b f(x)d\alpha(x)$$

<u>Beweis:</u>

Die Integrale existieren nach Voraussetzung und Folg. 6.62, zu zeigen ist die behauptete Gleichheit.

Es sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen in $\mathcal{Z}([a, b])$ mit $d(Z_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ und $(\xi^{(n)})$ zugehörige Folge von Zwischenvektoren. Wir setzen weiterhin voraus, daß $c \in Z_n$, $\forall n \in I\!N$.

$\rightsquigarrow Z_n = Z_n^- \cup Z_n^+$, wobei $Z_n^- \in \mathcal{Z}([a, c])$ und $Z_n^+ \in \mathcal{Z}([c, b])$, $\forall n \in I\!N$.

$\rightsquigarrow d(Z_n^-) \to 0$ und $d(Z_n^+) \to 0$.

$\rightsquigarrow S(f,\alpha,Z_n,\xi^{(n)}) = S(f,\alpha,Z_n^-,\xi_-^{(n)}) + S(f,\alpha,Z_n^+,\xi_+^{(n)})$,
wobei $\xi^{(n)} = (\xi_-^{(n)},\xi_+^{(n)})$

$$\underset{n\to\infty}{\rightarrow} \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = \int\limits_a^c f(x)d\alpha(x) + \int\limits_c^b f(x)d\alpha(x)$$

(Aufteilung der Integrale entsprechend der Aufteilung der Zerlegung) □

Im Unterschied zum R-Integral (, wo aus der R-integrierbarkeit auf $[a,c]$ und $[c,b]$ auch die auf $[a,b]$ folgte,) folgt für RS-Integrale aus $f \in RS([a,c],\alpha)$ und $f \in RS([c,b],\alpha)$ i.a. <u>nicht</u> $f \in RS([a,b],\alpha)$! (vgl. nachfolgendes Beispiel)

Beispiel 6.69

$[a,b] = [-1,1]$, $c := 0$, $f(x) := \begin{cases} 0: & x \in [-1,0] \\ 1: & x \in]0,1] \end{cases}$, $\alpha(x) := \begin{cases} 0: & x \in [-1,0[\\ 1: & x \in [0,1] \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ *f ist stetig auf $[-1,0]$ und α ist monoton wachsend*

$\rightsquigarrow \exists \int\limits_{-1}^{0} f(x)d\alpha(x)$ *nach Satz 6.61.*

Analog erhält man $\alpha \in RS([0,1],f)$ (6.61) und damit $f \in RS([0,1],\alpha)$. (6.60)

$$\textit{6.60} \rightsquigarrow \int\limits_0^1 f(x)d\alpha(x) = f(1)\alpha(1) - f(0)\alpha(0) - \int\limits_0^1 \alpha(x)df(x)$$
$$= 1 - f(0+) - f(0) = 1 - 1 = 0 \quad \textit{(nach 6.65)}$$

Wir wählen nun eine Folge $(Z_n) \in \mathcal{Z}([-1,1])$ derart, daß $0 \notin Z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists i_n \in \mathbb{N} : x_{i_n}^{(n)} < 0 < x_{i_n+1}^{(n)}$, $Z_n = \{-1 = x_0^{(n)} < \ldots < x_{M_n}^{(n)} = 1\}$.
Sei $(\xi^{(n)})$ Folge von zugehörigen Zwischensummen.

$$\rightsquigarrow S(f,\alpha,Z_n,\xi^{(n)}) = \sum_{i=1}^{M_n} f(\xi_i^{(n)})(\alpha(x_i^{(n)}) - \alpha(x_{i-1}^{(n)}))$$
$$= f(\xi_{i_n+1}^{(n)})(\alpha(x_{i_n+1}^{(n)}) - \alpha(x_{i_n}^{(n)})) = f(\xi_{i_n+1}^{(n)})$$

$$\rightsquigarrow S(f,\alpha,Z_n,\xi^{(n)}) = \begin{cases} 0: & \xi_{i_n+1}^{(n)} = x_{i_n}^{(n)} \\ 1: & \xi_{i_n+1}^{(n)} = x_{i_n+1}^{(n)} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ *die RS-Folgen haben abhängig von der Wahl der Zwischenvektoren verschiedene Grenzwerte!*
$\rightsquigarrow$ *$f \notin RS([-1,1])$!*

Satz 6.70 *(Mittelwertsatz für RS-Integrale)*
Sei $f \in RS([a,b],\alpha)$ beschränkt, $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, dann existiert ein $\Theta \in [\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)]$ so, daß

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \Theta(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

Ist $f \in C([a,b])$, so existiert ein $\tilde{x} \in [a,b] : \Theta = f(\tilde{x})$

<u>**Beweis:**</u>
Es sei $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M := \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \rightsquigarrow m \le f(x) \le M \ \forall x \in [a,b]$.
$\rightsquigarrow \int_a^b (f(x) - m)d\alpha(x) \ge 0 \quad \int_a^b (M - f(x))d\alpha(x) \ge 0$
(durch Betrachtung der RS-Summen)

$$6.59 \rightsquigarrow \underbrace{\int -a^b m d\alpha(x)}_{=m(\alpha(b)-\alpha(a))} \le \int_a^b f(x)d\alpha(x) \le \underbrace{\int_a^b M d\alpha(x)}_{=M(\alpha(b)-\alpha(a))}$$

$\rightsquigarrow \exists \Theta \in [m,M] : \int_a^b f(x)d\alpha(x) = \Theta(\alpha(b) - \alpha(a))$
f stetig $\rightsquigarrow$ Weierstraß und Zwischenwertsatz $\rightsquigarrow [m,M] \subseteq f([a,b])$ $\square$

Abschließend für dieses Kapitel erweitern wir diesen neuen Integralbegriff noch auf den Fall unbeschränkter Intergrationsbereiche. Dabei beschränken wir uns auf das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung interessante beidseitig uneigentliche RS-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f d\alpha$.

Definition 6.71
Existiert für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, das RS-Integral $\int_x^y f(t)d\alpha(t)$ für gegebene Funktionen $f, \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so heißt $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\alpha(t)$ (beidseitig) uneigentliches RS-Integral. Falls die folgenden Grenzwerte existieren, heißt es konvergent und sein Wert ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\alpha(t) = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)d\alpha(t) + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)d\alpha(t)$$

(analog zu Def. 6.48).

Satz 6.72
Es sei $f \in C_b(I\!R)$ und $\alpha : I\!R \to I\!R$ monoton wachsend und beschränkt. Dann konvergiert das (beidseitig) uneigentliche RS-Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)d\alpha(t)$.

<u>**Beweis:**</u>
Klar ist nach Voraussetzung und Satz 6.61, daß das fragliche Integral nach Definition ein uneigentliches Integral ist.
Wir müssen nun zeigen, daß die beiden Grenzwerte in Def. 6.71 existieren. O.B.d.A. untersuchen wir dabei die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{x \to -\infty} \int\limits_x^0 f(t)d\alpha(t).$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, und es sei $M := \sup\limits_{x \in I\!R} |f(x)|$.
Da $\alpha \in B(I\!R)$ monoton wachsend ist, existieren die Grenzwerte $\underline{\alpha} := \lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x)$ und $\bar{\alpha} := \lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x)$.

$$\rightsquigarrow \exists x_o < 0 : \; 0 \leq \alpha(x) - \underline{\alpha} < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \forall x \leq x_o.$$

Seien $x, y \in I\!R$, $y < x \leq x_o$,

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \Big|\int\limits_y^0 f(t)d\alpha(t) - \int\limits_x^0 f(t)d\alpha(t)\Big| = \Big|\int\limits_y^x f(t)d\alpha(t)\Big| &\leq \sup_{t \in [y,x]} |f(t)|(\alpha(x) - \alpha(y)) \\ &\leq M(\alpha(x) - \underline{\alpha}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \exists \lim\limits_{x \to -\infty} \int\limits_x^0 f(t)d\alpha(t)$.
Völlig analog zeigt man die Existenz des zweiten Grenzwertes. □

Bemerkung 6.73
Wichtige Eigenschaften des RS-Integrals wie die Linearität im Integranden und im Integrator (Satz 6.59), die Formel der partiellen Integration (Satz 6.60), die Abschätzung in Satz 6.61, dessen Erweiterung auf den Fall, daß α als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen dargestellt werden kann (Folg. 6.62) und die Regel in Satz 6.64 und 6.65 bleiben auch für (beidseitig) uneigentliche RS-Integrale (sinngemäß) richtig.
Der Beweis von 6.72 zeigt eine Möglichkeit zur Erweiterung des Resultats für unbeschränkte Integranden $f \in C(I\!R)$. Das uneigentliche RS-Integral konvergiert nämlich, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists x_o > 0 : \sup_{t \in [y,x]} |f(t)|(\alpha(x) - \alpha(y)) < \varepsilon, \quad \begin{array}{l} \textit{falls } y < x \leq x_o \\ \textit{bzw. } x_o \leq y < x \end{array}.$$

D.h. das "Anwachsen" von $|f|$ für $x \to \pm\infty$ muß durch das "Abklingen" von α kompensiert werden.

<u>*Beispiel:*</u> $f(x) = t^r, \quad \forall t \in I\!R, r \in I\!N$

$$"\rightsquigarrow \sup_{t \in [y,x]} t^r(\alpha(x) - \alpha(y)) < \varepsilon"$$

$$\rightsquigarrow |y|^r(\alpha(x) - \alpha(y)) < \varepsilon, \quad \textit{falls } y < x \le x_o$$

$$|x|^r(\alpha(x) - \alpha(y)) < \varepsilon, \quad \textit{falls } x_o \le y < x$$

Dies ist erfüllt, falls $\lim_{t \to -\infty} |t|^r(\underline{\alpha} - \alpha(t)) = 0 = \lim_{t \to +\infty} |t|^r(\alpha(t) - \bar{\alpha})$

<u>Zusätzliche Literatur</u> für Kapitel 6.4:

I.P. Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Akademie-Verlag, Berlin, 1969.

7 Lineare normierte Räume, lineare Operatoren

7.1 Lineare normierte Räume, endlichdimensionale Räume

Definition 7.1
$(X, +, \cdot)$ heißt <u>linearer Raum</u> (über einem kommutativen Körper K), falls

a) *$(X, +)$ kommutative Gruppe ist, und*

b) *$\forall x, y \in X$ und $\forall a, b \in K$ gilt:*

i) $1 \cdot x = x$, *($1 =$ "Einselement" in K),*

ii) $(a + b)x = ax + bx$,

iii) $a(x + y) = ax + ay$,

iv) $a(bx) = (ab)x$.

(Im Rahmen dieser Vorlesung treten als Körper nur die Fälle $K := \mathbb{R}$ und $K := \mathbb{C}$ auf. Falls $K = \mathbb{R}$, so sprechen wir von einem linearen Raum, ohne den Körper K zu spezifizieren.)

Definition 7.2
Ein linearer Raum X (bzw. $(X, +, \cdot)$) heißt (<u>linearer</u>) <u>normierter Raum</u>, falls eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ existiert, die die folgenden Eigenschaften hat:

i) $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X$, $\|x\| = 0$ *gdw.* $x = \Theta$ *("Nullelement" von X),*

ii) $\|ax\| = |a|\|x\|, \quad \forall a \in K, \forall x \in X$,

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X$ *("Dreiecksungleichung").*

$\|\cdot\|$ heißt <u>Norm</u> auf X und $\|x\|$ heißt Norm des Elementes $x \in X$.
Bezeichnung: $(X; \|\cdot\|)$

Lemma 7.3
Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein linearer normierter Raum, so ist die Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(x, y) := \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X$$

eine Metrik auf X.

<u>**Beweis:**</u>
Die Metrik-Eigenschaften folgen sofort aus den Eigenschaften i), ii), iii) einer Norm.
z.B. Dreiecksungleichung: seien $x, y \in X$
$\rightsquigarrow d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$

Wir nennen die in 7.3 definierte Metrik in $(X, \|\cdot\|)$ "induzierte Metrik".
Mit Lemma 7.3 ist klar, daß die gesamte in Kapitel 2 für metrische Räume entwickelte Theorie hier gültig bleibt. Durch die algebraische Struktur sind aber nun weitere Aussagen möglich!

Definition 7.4
Ein linearer normierter Raum heißt <u>*Banachraum*</u>*, falls er (bez. der induzierten Metrik) vollständig ist.*

Definition 7.5
Seien X_1, X_2 lineare normierte Räume über K. Eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ heißt <u>*linear*</u>*, falls*

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y), \quad \forall x, y \in X_1, \forall a, b \in K.$$

Hier nennen wir diese Abbildung (in Anlehnung an die algebraische Bezeichnung) meist <u>*lineare Operatoren.*</u>

Beispiele 7.6

a) *$I\!R$, $\mathbb{C}$, $I\!R^m$ mit dem Betrag bzw. der Euklidischen Norm (vgl. Kap. 1.5, 1.6, 3.1, 3.2) sind sogar Banachräume.*

b) *Sei $T \neq \emptyset$ und wir betrachten $X := B(T, I\!R^m)$.*

Wir definieren für $f, g \in X, a, b \in I\!R$: $(f+g)(x) := f(t) + g(t), \forall t \in T$
$(af)(x) := a \cdot f(t), \quad \forall t \in T$

Man zeigt leicht, daß X damit linearer Raum im Sinne von Def. 7.1 wird. Wir definieren nun $\|\cdot\| : X \to I\!R$, $\|f\| := \sup\limits_{t \in T} \|f(t)\|, \quad \forall t \in T$.
(Letzteres ist die Euklid. Norm im $I\!R^m$.)
Nachprüfen der Norm-Eigenschaften:

i) $\|f\| \geq 0, \quad \forall f \in X,$
$\|f\| = 0 = \sup\limits_{t \in T} \|f(t)\|$ *gdw.* $f(t) = \Theta, \quad \forall t \in T$
gdw. f *ist Nullelement in* X

ii) $\|af\| = \sup\limits_{t \in T} \|af(t)\| = \sup\limits_{t \in T} |a| \|f(t)\| = |a| \|f\|, \quad \forall f \in X, \forall a \in R$

iii) Seien $f, g \in X$ beliebig, $t \in T$ beliebig.
$\rightsquigarrow \|f(t) + g(t)\| \leq \|f(t)\| + \|g(t)\|$
(nach der Dreiecksungleichung für die Euklid. Norm)
$\rightsquigarrow \|(f+g)(t)\| \leq \|f\| + \|g\|$
$\rightsquigarrow \|f+g\| = \sup\limits_{t \in t} \|(f+g)(t)\| \leq \|f\| + \|g\|$

$\rightsquigarrow$ *$(B(T, I\!R^m), \|\cdot\|)$ ist linearer normierter Raum, und die zugehörige induzierte Metrik ist die aus Kap. 4.2. Aus den Aussagen von Kap. 4.2 folgt deshalb, daß der Raum sogar Banachraum ist.*

analog: Sei (T, d) metrischer Raum und wir betrachten $X := C_b(T, I\!R^m)$ mit $\|f\| := \sup_{t\in T} \|f(t)\|, \quad \forall t \in T$.
$\rightsquigarrow$ *$(C_b(T, I\!R^m), \|\cdot\|)$ ist Banachraum (wieder aus Kap. 4.2)*

c) *Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein linearer normierter Raum, Y ein linearer Raum (über demselben Körper K), $f : Y \to X$ sei linear und injektiv.*
Beh.: $\|\cdot\|_* : Y \to I\!R, \|y\|_* := \|f(y)\|, \forall y \in Y$, ist eine Norm auf Y.
Bew.: a) $\|y\|_* \geq 0, \forall y \in Y$, $\|y\|_* = 0 = \|f(y)\|$ gdw. $f(y) = \Theta_X \in X$ (Nullelement in X) gdw. $y = \Theta_Y$ (Nullelement in Y), (da f linear und injektiv ist).
b) $\|ay\|_* = \|f(ay)\| = \|af(y)\| = |a|\|f(y)\| = |a|\|y\|_*$, $\forall y \in Y, \forall a \in K$ (da f linear ist.)
c) $\|y+z\|_* = \|f(y)+f(z)\| \leq \|f(y)\|+\|f(z)\| = \|y\|_*+\|z\|_*$, $\forall y, z \in X$ □

d) *Ist X linearer Raum und d eine Metrik auf X, so ist $\|x\| := d(x, \Theta), \forall x \in X$, ($\Theta$ = Nullelement in X) i.a. keine Norm in X!*
Beispiel: $X := I\!R$, $d(x, y) := \min\{1, |x - y|\}, \quad \forall x, y \in I\!R$ ist eine Metrik (vgl. 2.2 f))
b) $\|ax\| := d(ax, 0) = \min\{1, |ax|\} = \min\{1, |a||x|\} \neq |a|\|y\|$ (i.a.)

Definition 7.7
Es sei X ein linearer Raum (über dem Körper K).
$L \subset X$ heißt linearer Teilraum von X, falls $\forall x, y \in L, \forall a, b \in K$ gilt: $ax + by \in L$.
Für $A \subseteq X, A \neq \emptyset$, heißt $\mathcal{L}(A) := \bigcap_{\substack{L\supseteq A \\ L\,lin.\,Teilraum\,v.\,X}} L$ lineare Hülle von A.
Ein linearer Teilraum L von X heißt endlichdimensional, falls

$$\exists m \in I\!N, \exists x_1, \ldots, x_m \in L \text{ so, daß } L = \mathcal{L}(\{x_1, \ldots, x_m\}).$$

L heißt m-dimensional, falls $\exists x_1, \ldots, x_m \in L$, $L = \mathcal{L}(\{x_1, \ldots, x_m\})$ und $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ist linear unabhängig, d.h. $\sum_{j=1}^{m} a_j x_j = \Theta$ gdw. $a_j = 0$, $\forall j = 1, \ldots, m$. $\{x_1, \ldots, x_m\}$ heißt dann Basis von L.
L heißt unendlichdimensional, falls L nicht enlichdimensional ist.

Bemerkung 7.8
Zu $\emptyset \neq A \subseteq X$ ist $\mathcal{L}(A)$ stets linearer Teilraum von X.
Hat L die Basis $\{x_1, \ldots, x_m\}$, so hat jede Basis von L m Elemente. (siehe Dieudonné, Satz A.4.7) Dann gilt ferner $\forall x \in L$:

$x = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i, (a_1, \ldots, a_m) \in I\!R^m$, *wobei* $(a_1, \ldots, a_m)$ *eindeutig bestimmt sind.*

Beispiele: $\cdot I\!R^m = \mathcal{L}(\{e_1, \ldots, e_m\}), e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, *wobei die* 1 *an der* j*-ten Stelle steht.*
$\cdot B([0,1]I\!R)$ *ist unendlichdimensional.*
(Übung, Hinweis: man betrachte $A := \{x_\tau : x_\tau(t) = \begin{cases} 0 : t \leq \tau \\ 1 : t > \tau \end{cases},$
$\tau \in [0,1]\} \subset B([0,1], I\!R)$
und zeige, daß eine bel. endliche Teilmenge von A *stets linear unabhängig ist.*

Definition 7.9
Es sei X *ein linearer Raum, und* $\|\cdot\|$ *und* $\|\cdot\|_*$ *seien Normen auf* X. $\|\cdot\|$ *und* $\|\dot{}\|_*$ *heißen äquivalent, falls Konstanten* $C_1, C_2 \neq 0$ *existieren, so daß* $C_1\|x\| \leq \|x\|_* \leq C_2\|x\|, \quad \forall x \in X$.

Für äquivalente Normen gilt, daß Folgen, die bez. der einen Norm (bzw. der zugehörigen induzierten Metrik) konvergieren, auch bez. der anderen Norm konvergent sind. Außerdem bleiben auch die topologischen Begriffe (wie offen, abgeschlossen, kompakt,...) bei äquivalenten Normen erhalten. (Übung)

Beispiel: Sei $A \subseteq X$ offen bez. $\|\cdot\|$.
Beh.: A ist auch offen bez. $\|\cdot\|_*$.
Bew.: Sei $x \in A \rightsquigarrow \exists \varepsilon > 0 : \{y : \|y - x\| < \varepsilon\} \subset A$
$\rightsquigarrow \{y : \frac{1}{C_2}\|y - x\|_* < \varepsilon\} \subset A$
$\rightsquigarrow \{y : \|y - x\|* < C_2\varepsilon\} \subset A \rightsquigarrow A$ ist offen bez. $\|\cdot\|_*$.

In Kap. 1.6 wurden bereits verschiedene Normen auf $I\!R^m$ (z.B. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$) eingeführt. Dort wurden auch bereits Abschätzungen der Normen untereinander hergeleitet bzw. erwähnt, d.h. für diese Normen galt bereits die Äquivalenz zur Euklidischen Norm. Wir zeigen jetzt ein stärkeres Resultat:

Satz 7.10
Auf $I\!R^m$ *sind alle Normen äquivalent.*

Beweis:
Es reicht zu zeigen, daß jede Norm auf $I\!R^m$ zur Euklid. Norm $\|x\|_2 := (\sum\limits_{j=1}^{m} |x_j|^2)^{\frac{1}{2}}, \forall x \in I\!R^m$ äquivalent ist. Es sei also $\|\cdot\|$ eine Norm auf $I\!R^m$.
z.z.: $\exists C_1, C_2 > 0 : C_1\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C_1\|x\|_2, \forall x \in I\!R^m$
Sei $x \in I\!R^m$ bel. $\rightsquigarrow x = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j e_j, \quad e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

$$\rightsquigarrow \|x\| \leq \sum_{j=1}^{m} \|x_j e_j\| = \sum_{j=1}^{m} |x_j| \|e_j\|$$

$$\leq \quad \underbrace{(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2} \underbrace{(\sum_{j=1}^{m} \|e_j\|^2)^{\frac{1}{2}}}_{=:C_2} \quad \text{nach Satz 1.39}$$

$$\rightsquigarrow \|x\| \quad \leq \quad C_2\|x\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$\rightsquigarrow \|x-y\| \leq C_2\|x-y\|_2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig bez. der Euklid. Norm $\|\cdot\|_2$.
$S := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = 1\}$ ("Einheitssphäre in $\mathbb{R}^m$") ist beschränkt und abgeschlossen bez. der Euklid. Norm und damit kompakt.

$$\rightsquigarrow \exists x_* \in S : \|x_*\| = \min_{x \in S} \|x\| \qquad \rightsquigarrow 0 < \|x_*\| \leq \|x\|, \forall x \in S.$$

Wir definieren $C_1 := \|x_*\| > 0$.
Sei $x \in \mathbb{R}^m$ bel. $\rightsquigarrow \frac{x}{\|x\|_2} \in S \rightsquigarrow \|\frac{x}{\|x\|_2}\| \geq C_1$.
$\rightsquigarrow \frac{1}{\|x\|_2}\|x\| \geq C_1 \rightsquigarrow C_1\|x\|_2 \leq \|x\|$

$$\rightsquigarrow C_1\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C_2\|x\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \square$$

Satz 7.11
Zu jedem m-dimensionalen linearen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ existiert eine bijektive lineare Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ so, daß f und f^{-1} stetig sind.

Beweis:
Es sei $X = \mathcal{L}(\{x_1, \ldots, x_m\})$ und wir definieren $g : \mathbb{R}^m \to X$,
$g(a_1, \ldots, a_m) := \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$, $\forall (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$.
$\rightsquigarrow g$ ist linear, surjektiv und injektiv, d.h. bijektiv.
$\rightsquigarrow f := g^{-1} : X \to \mathbb{R}^m$ ist ebenfalls linear und bijektiv.
Zu zeigen bleibt: f und $f^{-1} = g$ sind stetig.
Wir definieren $\|a\|_* := \|g(a)\|$, $\quad \forall a \in \mathbb{R}^m$.
Nach Beispiel 7.6 c) ist $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$ und nach Satz 7.10 äquivalent zur Euklid. Norm $\|\cdot\|_2$, d.h. $\exists C_1, C_2 > 0 : C_1\|a\|_2 \leq \|a\|_* \leq C_2\|a\|_2$, $\forall a \in \mathbb{R}^m$.

$$\text{d.h. } C_1\|a\|_2 \leq \|f^{-1}(a)\| \leq C_2\|a\|, \quad \forall a \in \mathbb{R}^m.$$

Es gilt auch $\|f(x)\|_* = \|x\|$, $\quad \forall x \in X$.

$$\left.\begin{array}{l} \rightsquigarrow C_1\|f(x)\|_2 \leq \|f(x)\|_* \leq C_2\|f(x)\|_2 \\ \text{d.h. } C_1\|f(x)\|_2 \leq \|x\| \leq C_2\|f(x)\|_2 \end{array}\right. \quad \forall x \in X$$

Da f, f^{-1} linear sind gilt deshalb $\forall x, y \in X$ bzw. $a, b \in \mathbb{R}^m$:

$$\|f^{-1}(a) - f^{-1}(b)\| \leq C_2\|a-b\|_2 \quad \text{und} \quad \|f(x) - f(y)\|_2 \leq \frac{1}{C_1}\|x-y\|$$

d.h. f und f^{-1} sind sogar Lipschitz-stetig. $\square$

Folgerung 7.12
Jeder endlichdimensionale lineare normierte Raum X ist vollständig und separabel; alle Normen auf X sind äquivalent.

Beweis:
Nach Satz 3.13 ist $\mathbb{R}^m$ vollständig und separabel.

- Vollständigkeit von X: sei (x_n) Fundamentalfolge in X.
  7.11 $\rightsquigarrow$ $(f(x_n))$ ist Fundamentalfolge in $\mathbb{R}^m$,
  3.13 $\rightsquigarrow \exists y \in \mathbb{R}^m : y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, 7.11 $\rightsquigarrow x = f^{-1}(y) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- Separabilität von X: sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abzählbar und dicht.
  7.11 $\rightsquigarrow$ $f^{-1}(A)$ ist abzählbar und dicht in X.

z.z.: alle Normen auf X sind äquivalent.
Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf X, und wir betrachten $\|x\|_* := \|f(x)\|_2, \quad \forall x \in X$.
$\|\cdot\|_*$ ist nach Beispiel 7.6 c) eine Norm auf X. Wir zeigen: $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ sind äquivalent.
Wir betrachten dazu zusätzlich die Norm $\|a\|_o := \|f^{-1}(a)\|, \quad \forall a \in \mathbb{R}^m$.
7.10 $\rightsquigarrow \exists C_1, C_2 > 0$:
$C_1\|a\|_2 \leq \underbrace{\|a\|_o}_{\|f^{-1}(a)\|} \leq C_2\|a\|_2 = C_2\|f^{-1}(a)\|_* \leq \frac{C_2}{C_1}\|f^{-1}(a)\|, \forall a \in \mathbb{R}^m$
(vgl. auch den Beweis von 7.11)

$$\text{oder anders: } \frac{1}{C_2}\|x\| \leq \|x\|_* \leq \frac{1}{C_2}\|x\|, \quad \forall x \in X.$$ □

Nächstes Ziel ist der Zusammenhang zwischen Endlichdimensionalität und Kompaktheit der Einheitskugel. (angekündigt in Kap. 2.4)
Satz 7.13

Satz 7.13
Es sei X ein linearer normierter Raum.
X ist endlichdimensional gdw. die Einheitskugel $\bar{B}(0,1) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kompakt ist.

Beweis:
$(\Longrightarrow)$ $\exists m \in \mathbb{N} : \exists x_1, \ldots, x_m \in X : X = \mathcal{L}(\{x_1, \ldots, x_m\})$.
Wir betrachten die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ aus 7.11.

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow f(\bar{B}(0,1)) = \{f(x) : x \in \bar{B}(0,1)\} &= \{a \in \mathbb{R}^m : \underbrace{\|f^{-1}(a)\|}_{=\|a\|_*} \leq 1\} \\ &= \{a \in \mathbb{R}^m : \|a\|_* \leq 1\}\end{aligned}$$

Nach 7.10 ist die Menge $\{a \in \mathbb{R}^m : \|a\|_* \leq 1\}$ beschränkt und abgeschlossen in $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ und damit kompakt in $\mathbb{R}^m$ nach Satz 3.15.

$\rightsquigarrow f^{-1}(\{a \in I\!R^m : \|a\|_* \leq 1\}) = \bar{B}(0,1)$ ist kompakt in X nach Satz 4.8.
($\Longleftarrow$) Es sei $\bar{B}(0,1)$ kompakt. Nach Satz 2.39 existiert ein endliches $\frac{1}{2}$-Netz $\{x_1^*, \ldots, x_k^*\}$ von $\bar{B}(0,1)$, d.h. $\bar{B}(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i^*, \frac{1}{2}) \subseteq X$.
Wir betrachten $\mathcal{L}(\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}) \subseteq X$.

<u>Beh.:</u> $L = X$, d.h. X ist endlich ($\leq m$)-dimensional

<u>Bew.:</u> <u>Annahme:</u> $\exists x \in X \backslash L$

L ist abgeschlossen in X nach 7.12 (vollständig)

$\rightsquigarrow d_* := d(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\| > 0$

wir wählen $y \in L$ derart, daß $d_* \leq \|x - y\| \leq \frac{3}{2} d_*$,

und betrachten $z := \frac{x-y}{\|x-y\|} \in \bar{B}(0,1)$.

$\rightsquigarrow \exists i_* \in \{1, \ldots, k\} : z \in B(x_{i_*}^*, \frac{1}{2})$

$\rightsquigarrow x = y + \|x - y\| z = \underbrace{y + \|x - y\| x_{i_*}^*}_{\in L} + \|x - y\|(z - x_{i_*}^*)$

$\rightsquigarrow d_* \leq \|x - (y + \|x-y\| x_{i_*}^*)\| = \| \|x-y\|(z - x_{i_*}^*)\| = \|x-y\| \|z - x_{i_*}^*\|$

$\rightsquigarrow \|x - y\| \geq \frac{d_*}{\|z - x_{i_*}^*\|} \geq \frac{d_*}{\frac{1}{2}} = 2d_*$

$\rightsquigarrow$ Widerspruch! zu $\|x - y\| \leq \frac{3}{2} d_*$ □

Bemerkung 7.14
Analog zum ersten Teil des Beweises zeigt man mit Hilfe von Satz 4.8 (bzw. 7.11), daß jede beschränkte Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten Raumes relativ kompakt ist.

Satz 7.15
Sei $(X, \|\cdot\|)$ linearer normierter Raum, L sei ein endlichdimensionaler Teilraum von X. Dann existiert zu jedem $x \in X$ ein $x_* \in L : \|x - x_*\| = d(x, L)$. x_* heißt die <u>beste lineare Approximation</u> zu x bez. L.

<u>**Beweis:**</u>
Sei $x \in X$ beliebig. Nach Definition von $d(x, L)$ existiert eine Folge (x_n) in L so, daß

$$d(x, L) \leq \|x - x_n\| \leq d(x, L) + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in I\!N$$

$\rightsquigarrow (x_n)$ ist beschränkt in L. Nach 7.12 ist die Limesmenge $\mathcal{L}((x_n)) \neq \emptyset$.
$\rightsquigarrow \exists$ Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und $\exists x_* \in X : x_{n_k} \underset{n \to \infty}{\to} x_*$.
Da L abgeschlossen ist, ist $x_* \in L$.

$$\text{Es gilt: } d(x, L) \leq \|x - x_{n_k}\| \leq d(x, L) + \frac{1}{n_k}, \quad \forall k \in I\!N$$

$$\underset{k \to \infty}{\longrightarrow} d(x, L) \leq \|x - x_*\| \leq d(x, L).$$ □

7.2 Lineare beschränkte Operatoren

Lineare Abbildungen zwischen linearen (normierten) Räumen heißen jetzt "Operatoren", Operatoren mit Wertebereich in $I\!R$ heißen "Funktionale".
Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) lineare normierte Räume, $A : X_1 \to X_2$ ein linearer Operator.

Definition 7.16
Ein linearer Operator $A : X_1 \to X_2$ heißt <u>beschränkt</u>, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß $\|Ax\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in X_1$.

Satz 7.17

a) *Ein linearer Operator $A : X_1 \to X_2$ ist stetig, falls er in einem fixierten Punkt $x_o \in X_1$ stetig ist.*

b) *Ein linearer Operator $A : X_1 \to X_2$ ist stetig gdw. er beschränkt ist.*

<u>**Beweis:**</u>

a) Es sei A in $x_o \in X_1$ stetig, sei $x \in X_1$ beliebig, (x_n) eine Folge in X_1 mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.
$\leadsto (x_n - x + x_o)$ konvergiert gegen x_o.
$\leadsto A(x_n - x + x_o) = Ax_n - Ax + Ax_o \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Ax_o$, da A in x_o stetig ist.
$\leadsto Ax_n - Ax \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \in X_2$, d.h. $Ax_n \to Ax$.

b) $(\Longrightarrow)$ Sei A stetig, <u>Annahme:</u> A ist nicht beschränkt:
$\forall C > 0 \exists x \in X_1 : \|Ax\|_2 > C\|x\|_1$,
o.B.d.A.: $\forall n \in I\!N \exists x_n \in X_1 : \|Ax_n\| > n\|x_n\|_1$.
Wir definieren $y_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|_1}$, (da $\|x_n\| > 0, \forall n \in I\!N$.

$$\leadsto \|Ay_n\|_2 = \|\frac{1}{n\|x_n\|_1} Ax_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|_1}\|Ax_n\|_2 > 1$$

weiterhin gilt: $y_n \to 0 \in X_1$, $\|Ay_n\| \not\to 0 \in X_2$
$\leadsto$ Widerspruch! zu A stetig.
$(\Longleftarrow)$ Sei A beschränkt, $x \in X_1$ beliebig, (x_n) eine Folge in X_1 mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.
z.z.: $Ax_n \to Ax$.
$\leadsto \|Ax_n - Ax\|_2 = \|A(x_n - x)\|_2 \leq C\|x_n - x\|_1 \to 0$,
oder anders ausgedrückt: $Ax_n \to Ax$, d.h. A ist stetig. $\square$

Beispiele 7.18

a) *Seien X_1, X_2 endlichdimensionale normierte Räume der Dimension m bzw. n, $\rightsquigarrow X_1 = \mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_m\}), X_2 = \mathcal{L}(\{e'_1, \dots, e'_n\})$,*
$A : X_1 \to X_2$ sei linearer Operator.
<u>Beh.:</u> A ist beschränkt.
Wir betrachten $Ae_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}e'_j$, $(a_{ij} \in \mathbb{R})$, $\quad \forall i = 1, \dots, m$.
Sei $x = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i e_i$ ein beliebiges Element von X_1, $(b_i \in \mathbb{R})$.
$\rightsquigarrow Ax = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i Ae_i = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}e'_j) = \sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}b_i)e'_j$.

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow \|Ax\|_2 &\le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}||b_i|\|e'_j\|_2 \le \max_{j=1,\dots,n} \|e'_j\|_2 \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|)|b_i| \\ &\le (\max_{j=1,\dots,n}\|e'_j\|_2)(\max_{i=1,\dots,m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|)\sum_{i=1}^{m}|b_i|.\end{aligned}$$

Offenbar ist für $x = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i e_i \qquad \|x\|_* := \sum\limits_{i=1}^{m}|b_i|$ eine Norm auf X_1.
Da auf X_1 alle Normen äquivalent sind (X_1 endlichdimensional), muß $\|x\|_* \le C\|x\|_1$, $\forall x \in X_1$ für ein gewisses $C > 0$ gelten.

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow \|Ax\|_2 &\le c'\|x\|_* \le c'C\|x\|_1 \quad \textit{mit } c' := \max_{j=1,\dots,n}\|e'_j\|_2 \cdot \max_{i=1,\dots,m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \\ &= \tilde{c}\|x\|_1, \quad \forall x \in X_1\, (\tilde{c} := c'C)|\end{aligned}$$

b) *$X_1 := C(T)$ mit $T \neq \emptyset$ kompakter metrischer Raum,*
$\|x\|_1 := \sup\limits_{t\in T}|x(t)|(= \|x\|_\infty)$, $X_2 := (\mathbb{R}, |\cdot|)$.
$f : C(T) \to \mathbb{R}, f(x) := \sum\limits_{i=1}^{m} a_i x(t_i)$, $\quad (a_i \in \mathbb{R}, t_i \in T, i = 1, \dots, n$ fest)
f ist linear und beschränkt, denn
$|f(x)| \le \sum\limits_{i=1}^{n}|a_i||x(t_i)| \le \sup\limits_{t\in T}|x(t_i)|\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i| = (\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|)\|x\|_1 = c\|x\|_1$.

c) *$X_1 := C([a,b]), \|x\|_1 := \sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|, X_2 := (\mathbb{R}, |\cdot|), f : X_1 \to X_2$,*
$f := \int\limits_a^b x(t)d\alpha(t)$, $\quad (\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend)
Nach Satz 6.61 ist f korrekt definiert und es gilt:

$$|f(x)| \le \sup_{t\in[a,b]}(\alpha(b) - \alpha(a)) = (\alpha(b) - \alpha(a))\|x\|_1$$

d) $X_1 = X_2 := C([a,b]), \|x\|_1 = \|x\|_2 := \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|, A : X_1 \to X_2$

$$(Ax)(t) := \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds, \quad \forall t \in [a,b], \forall x \in X_1, \text{("Integraloperator")}$$

wobei $k \in C([a,b] \times [a,b])$ *("Kern").*
<u>Beh.:</u> A ist korrekt definiert ($Ax \in C([a,b])$*) und linearer beschränkter Operator.*
Seien $t_1, t_2 \in [a,b], \varepsilon > 0$ *beliebig gewählt.*

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow |(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| &\le \int_a^b |k(t_1,s) - k(t_2,s)||x(s)|\,ds \\ &\le \|x\|_1 \int_a^b |k(t_1,s) - k(t_2,s)|\,ds \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von k (Satz 4.20) existiert ein $\delta > 0$ *so, daß aus* $|t_1 - t_2| < \delta$ *folgt:*
$|k(t_1,s) - k(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)\|x\|_1}$, *(o.B.d.A.* $x \neq 0$*).*
$\rightsquigarrow |(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| \le \|x\|_1 \frac{\varepsilon}{\|x\|_1} = \varepsilon \rightsquigarrow Ax$ *ist gleichmäßig stetig.*
Die Linearität von A folgt aus 6.14 a).
Beschränktheit von A:

$$\begin{aligned} |(Ax)(t)| &\le \|x\|_1 \int_a^b |k(t,s)|\,ds \quad \text{(siehe oben)} \\ &\le \|x\|_1 \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,ds = c\|x\|_1, \quad \forall t \in [a,b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \sup_{t\in[a,b]} |(Ax)(t)| &\le c\|x\|_1 \\ \|(Ax)(t)\|_2 &\le c\|x\|_1 \end{aligned}$$

e) *Nicht jeder lineare Operator muß automatisch beschränkt sein:*
$X_1 := \{x \in C([-1,1]) : x$ *ist in* $t = 0$ *differenzierbar*$\}$, $X_2 := I\!R$.
X_1 *ist linearer Raum,* $A : X_1 \to X_2, Ax := x'(0)$.
Wir definieren $x_n \in X_1, x_n(t) := \begin{cases} 1: & t > \frac{1}{n} \\ nt: & -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n} \\ -1: & t < -\frac{1}{n} \end{cases}$
$\rightsquigarrow Ax_n = x_n'(0) = n = n\|x_n\|_1 \rightsquigarrow A$ *ist nicht beschränkt.*

f) *Es sei $A : X_1 \to X_2$ linear, und wir definieren folgende Norm auf X_1:*

$$\|x\|_* := \|x\|_1 + \|Ax\|_2, \quad \forall x \in X_1 \quad \textit{(Normeigenschaften sind erfüllt)}$$

Beh.: A ist beschränkt als Abbildung von $(X_1, \|\cdot\|_*)$ nach $(X_2, \|\cdot\|_2)$.
Bew.: $\|Ax\|_2 \leq \|x\|_*$, $\forall x \in X_1$ nach Definition von $\|x\|_*$) □

D.h. ein linearer Operator kann durch Modifikation der Norm im Urbildraum stets "beschränkt" bzw. "stetig" gemacht werden, allerdings mit Hilfe einer Norm, die nicht äquivalent zur ursprünglichen Norm ($\|\cdot\|_1$) ist!

Definition 7.19
Es seien X, X_1, X_2 lineare Räume (über demselben Körper K), es bezeichne $\underline{L(X_1, X_2)} := \{A \in C(X_1, X_2) : A \text{ ist linear}\}$ die Menge aller linearen beschränkten (stetigen) Operatoren von X_1 nach X_2; und $\underline{X^*} := L(X, I\!R)$ die Menge aller linearen beschränkten Funktionale ("dualer" Raum zu X).

Bemerkung 7.20
Betrachtet man $C(X_1, X_2)$ in üblicher Weise als linearen Raum (siehe Kap. 4.2, Beispiel 7.6 b)), so ist $L(X_1, X_2)$ ein linearer Teilraum davon, allerdings ist $L(X_1, X_2)$ keine Teilmenge von $B(X_1, X_2)$! und X_1 ist (natürlich) nicht beschränkt (als linearer Raum). Die Idee zur Normierung aus 7.6 b) funktioniert also nicht für $L(X_1, X_2)$!

Unser nächstes Ziel ist (folgerichtig) die Normierung von $L(X_1, X_2)$.

Satz 7.21
Es seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$ und $(X_2, \|\cdot\|_2)$ lineare normierte Räume. Die Funktion $\|\cdot\| : L(X_1, X_2) \to I\!R$, definiert durch

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in X_1 \\ \|x\|_1 \leq 1}} \|Ax\|_2, \quad \forall A \in L(X_1, X_2)$$

ist eine Norm auf $L(X_1, X_2)$.
$L(X_1, X_2)$ ist ein Banachraum, falls X_2 ein Banachraum ist.

Beweis: $\|\cdot\|$ ist wohl-definiert nach Definition der Beschränktheit 7.16.
Normeigenschaften:

a) $\|A\| \geq 0$, klar,

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 \quad &\leftrightarrow \quad \|Ax\|_2 = 0, \forall x \in X_1, \|x\|_1 \leq 1 \\ &\leftrightarrow \quad \|A\frac{x}{\|x\|_1}\|_2 = 0, \forall x \in X_1, x \neq 0 \\ &\leftrightarrow \quad \|Ax\|_2 = 0, \forall x \in X_1 \leftrightarrow A = O \text{ (Nulloperator)} \end{aligned}$$

b) $\|\alpha A\| = \sup\limits_{\substack{x\in X_1\\ \|x\|_1\le 1}} \|\alpha(Ax)\|_2 = \alpha \sup\limits_{\substack{x\in X_1\\ \|x\|_1\le 1}} \|Ax\|_2 = |\alpha|\|A\|, \forall\alpha \in K$

c) Dreiecksungleichung: seien $A, B \in L(X_1, X_2)$, sei $x \in X, \|x\| \le 1$ beliebig.
$\rightsquigarrow \|(A+B)x\|_2 = \|Ax + Bx\|_2 \le \|Ax\|_2 + \|Bx\|_2 \le \|A\| + \|B\|$
$\rightsquigarrow \|A+B\| = \sup\limits_{\substack{x\in X_1\\ \|x\|_1\le 1}} \|(A+B)x\|_2 \le \|A\| + \|B\|$

Sei jetzt X_2 ein Banachraum. Sei (A_n) eine Cauchy-Folge in $L(X_1, X_2)$.
z.z.: $\exists A \in L(X_1, X_2)$ mit $\|A_n - A\| \to 0$.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.
$\rightsquigarrow \|(A_n - A_m)x\|_2 \le \|A_n - A_m\|\|x\|, \forall x \in X_1$ (wegen $\|(A_n - A_m)\frac{x}{\|x\|_1}\|_2 \le \|A_n - A_m\|, x \neq 0$)
Sei $0 \neq x \in X_1$ beliebig $\rightsquigarrow \exists n_o \in I\!N : \|A_n - A_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|_1}, \forall n, m \ge n_o$.
$\rightsquigarrow \|(A_n - A_m)x\|_2 = \|A_n x - A_m x\|_2 < \varepsilon, \forall n, m \ge n_o$,
d.h. $(A_n x)_{n\in I\!N}$ ist Cauchy-Folge in X_2.
$\rightsquigarrow \forall x \in X_1 \exists Ax := y \in X_2 : \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y$ (da X_2 vollständig nach Vor.)
Wir definieren $A : X_1 \to X_2, Ax := \lim\limits_{n\to\infty} A_n x, \quad \forall x \in X_1$.
Zu zeigen: i) $A \in L(X_1, X_2)$ ii) $\|A_n - A\| \to 0$.

i) Es gilt:

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to\infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay, \\ &\quad (\forall x, y \in X_1, \forall \alpha, \beta \in I\!R) \end{aligned}$$

bleibt z.z.: A ist stetig (und damit beschränkt).
Wir zeigen zunächst: (A_n) konvergiert gleichmäßig gegen A auf $\{x \in X_1 : \|x\| \le 1\}$.
Sei $0 \neq x \in X_1, \|x\| \le 1$, sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
$\rightsquigarrow \|(A_n - A)x\|_2 = \lim\limits_{m\to\infty} \|(A_n - A_m)x\|_2 \le \limsup\limits_{m\to\infty} \|A_n - Am\| \underbrace{\|x\|_1}_{\le 1}$
$\rightsquigarrow \exists n_o \in I\!N : \|A_n - A_m\| < \varepsilon, \forall n, m \ge n_o$
$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \rightsquigarrow \|A_n x - Ax\|_2 \le \varepsilon, \forall n \ge n_o$
$\rightsquigarrow \sup\limits_{\substack{x\in X_1\\ \|x\|\le 1}} \|A_n x - Ax\|_2 \le \varepsilon, \quad \forall n \ge n_o$.
Da A_n stetig ist, $\forall n \in I\!N$, folgt: A ist stetig auf $\{x \in X_1 : \|x\|_1 \le 1\}$ (Satz 4.34, Bem. 4.35)
$\rightsquigarrow A$ ist stetig auf X_1 ($\rightsquigarrow$ beschränkt) nach Satz 7.17 a)

ii) z.z.: $\|A_n - A\| \to 0 \leftrightarrow \sup\limits_{\substack{x\in X_1\\ \|x\|\le 1}} \|A_n x - Ax\|_2 \to 0$.
Dies wurde am Schluß von i) bewiesen.

Bemerkung 7.22
Nach Definition der "Operatornorm" in Satz 7.21 gilt $\forall A \in L(X_1, X_2)$:
$\|Ax\|_2 \leq \|A\|\|x\|_1, \quad \forall x \in X_1.$

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X_1 \\ \|x\|_1 \leq 1}} \|Ax\|_2 = \sup_{\substack{x \in X_1 \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \inf\{C > 0 : \|Ax\|_2 \leq C\|x\|_1, \forall x \in X_1\}$$

Beispiele 7.23

a) *Es seien* $T := [0,1], X_1 := C(T), X_2 := \mathbb{R}$, *mit den üblichen Normen.*
$f \in (C(T))^*$ *sei definiert durch* $f(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x(t_i), \forall x \in C(T)$,
wobei $a_i \in \mathbb{R}, t_i \in T, i = 1, \ldots, n$ *(o.B.d.A.* $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$*).*
<u>*Beh.:*</u> $\|f\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$
<u>*Bew.:*</u> *In 7.18 b) wurde gezeigt:* $|f(x)| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|\|x\| \rightsquigarrow \|f\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$
z.z.: $\exists \tilde{x} \in C(T) : \|\tilde{x}\| = 1$ *und* $f(\tilde{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$.
o.B.d.A. $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : |a_i| \neq 0$.
Wir definieren $\tilde{x}(t_i) := \begin{cases} 1 : & a_i > 0 \\ 0 : & a_i = 0 \\ -1 : & a_i < 0 \end{cases}$
$\rightsquigarrow f(\tilde{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \tilde{x}(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$.
$\tilde{x}$ *wird auf* $[0,1]$ *stückweise linear fortgesetzt.*
$\rightsquigarrow \tilde{x}$ *ist stetig, und* $\sup\limits_{t \in [0,1]} |\tilde{x}(t)| = 1 = \|\tilde{x}\|$ $\square$

b) $X_1 := \mathbb{R}^m, X_2 := \mathbb{R}^n$, *wobei auf* X_1 *und* X_2 *folgende Normen betrachtet werden:* $\|x\|_1 := \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|$, $\|x\|_2 := (\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $\|x\|_\infty := \max\limits_{i=1,\ldots,m} |x_i|$,
$\forall x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.
$\rightsquigarrow A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $Ax = ([Ax]_1, \ldots, [Ax]_n)$,
$[Ax]_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \forall i = 1, \ldots, m, \forall x \in \mathbb{R}^m$
Wir definieren $\|A\|_i := \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ \|x\|_i \leq 1}} \|Ax\|_i, \quad i = 1, 2, \infty.$

<u>Beh.:</u> $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,\dots,m} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ *(Spaltensummennorm)*

$\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ *(Zeilensummennorm)*

$\|A\|_2 = (\textit{maximaler Eigenwert von } A^TA)^{\frac{1}{2}}.$

<u>Bew.:</u> *i)* $\|A\|_1$*: sei* $x \in I\!R^m$ *beliebig.*

$$\rightsquigarrow \|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j|$$

$$\leq (\max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|) \sum_{j=1}^{m} |x_j| = (\max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|)\|x\|_1$$

$$\rightsquigarrow \|A\|_1 \leq \max_{j=1}^{m} \sum_{i=1,\dots,n} |a_{ij}.$$

Nachweis der Gleichheit:

Sei $j_o \in \{1,\dots,m\}$ *so gewählt, daß* $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij_o}| = \max\limits_{j=1,\dots,m} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$

Wir definieren $\bar{x} \in I\!R^m, \bar{x} = \begin{cases} 1: & j = j_o \\ 0: & \textit{sonst} \end{cases} \rightsquigarrow \|\bar{x}\| = 1.$

$$\rightsquigarrow \|A\bar{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_o}| = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\rightsquigarrow \|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,m} \sum :_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

ii) $\|A\|_\infty$*: analog (Übung)*

iii) $\|A\|_2$*:* $\rightsquigarrow A^TA$ *ist symmetrisch und hat nichtnegative Eigenwerte, d.h. die Formel ist "sinnvoll".*

A^TA *hat eine Orthonormal-Basis von Eigenvektoren* e_j*, zu den Eigenwerten* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$*,* $j = 1,\dots,m$

d.h. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1: & i = j \\ 0: & i \neq j \end{cases}, \; i,j = 1,\dots,m.$

Man kann zeigen (Übung) $\|Ax\|_2^2 \leq \max\limits_{j=1,\dots,m} \lambda_j \|x\|_2, \; \forall x \in I\!R^m$

$$\rightsquigarrow \|A\|_2 \leq (\max_{j=1,\dots,m} \lambda_j)^{\frac{1}{2}}.$$

$\|Ae_j\|^2 = \lambda_j, \; j = 1,\dots,m$ □

c) $X := C([a,b])$ *mit der üblichen Norm,* $A : X \to X$,

$(Ax)(t) := \int\limits_a^b k(t,s)x(s)\,ds, \quad \forall x \in X,$

wobei $k \in C([a,b] \times [a,b])$.

Dann gilt: $\|A\| = \max\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b k(t,s)x(s)\,ds.$

Beweis: W. Hackbusch, Integralrechnung, Stuttgart 1989, Lemma 3.2.2

Bemerkung 7.24

Bei der Anwendung der Theorie linearer beschränkter Operatoren im Rahmen der numerischen Mathemtik (Kap. 10/11) kann man für die dortigen Folgen

(A_n) (gegen einen Operator A) i.a. nicht die Normkonvergenz, sondern nur die punktweise Konvergenz (vgl. Kap. 4.2) nachweisen. Deshalb beschäftigen wir uns mit Charakterisierungen der punktweisen Konvergenz linearer Operatoren. Hauptergebnisse sind das "Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit" und der Satz von Banach/Steinhaus (Sätze 7.26, 7.27).

Lemma 7.25
Seien $A : X_1 \to X_2$ linear, $x_o \in X_1, c > 0, r > 0$.
Aus $\|Ax\|_2 \leq c$, $\forall x \in \bar{B}(x_o, r)$ folgt $\|A\| \leq \frac{2c}{r}$.

Beweis:
Sei $x \in X_1$ beliebig gewählt, $x \neq 0$.
$\rightsquigarrow x_o + \frac{x}{\|x\|_1} r \in \bar{B}(x_o, r)$
$\rightsquigarrow \|A(x_o + \frac{x}{\|x\|_1} r)\|_2 = \|Ax_o + \frac{r}{\|x\|_1} Ax\|_2 \leq c.$
$\rightsquigarrow c \geq \|\frac{r}{\|x\|_1} Ax\|_2 - \|Ax_o\|_2 \rightsquigarrow \frac{r}{\|x\|_1}\|Ax\|_2 \leq c + \underbrace{\|Ax_o\|_2}_{\leq c}$
$\rightsquigarrow \|Ax\|_2 \leq \frac{2c}{r}\|x\|_1.$ $\square$

Satz 7.26 *("Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit")*
Seien X_1 ein Banachraum, X_2 ein linearer normierter Raum, und (A_n) sei eine Folge in $L(X_1, X_2)$. Falls für alle $x \in X_1$ gilt, daß

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\|_2 < \infty \quad \text{, so gilt auch}$$
$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$$

Beweis:
Annahme: $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| = +\infty$
Wir definieren $p : X_1 \to \mathbb{R}, p(x) := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\|_2, \quad \forall x \in X_1.$
Nach Voraussetzung ist p wohl-definiert.
Beh.: p ist auf keiner (abgeschlossenen) Kugel von X_1 beschränkt.
Bew.: Annahme: $\exists x_o \in X_1, c > 0, r > 0 : p(x) \leq c$, $\forall x \in \bar{B}(x_o, r)$
$\rightsquigarrow \|A_n x\|_2 \leq c$, $\forall x \in \bar{B}(x_o, r), \forall n \in \mathbb{N}$
7.25 $\rightsquigarrow \|A_n\| \leq \frac{2c}{r}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch! zur ersten Annahme.
Wir betrachten die Menge $M_k := \{x \in X_1 : p(x) > k\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, und wir wissen, daß nach obiger Behauptung jede dieser Mengen mit jeder Kugel in X_1 einen nichtleeren Durchschnitt hat.
Sei $x_1 \in X_1$ beliebig, $\varepsilon_1 := 1$,
$\rightsquigarrow B(x_1, \varepsilon_1) \cap M_1 \neq \emptyset \rightsquigarrow \exists x_2 \in B(x_1, \varepsilon_1) \cap M_1,$
$\rightsquigarrow \exists \varepsilon_2 \in]0, \frac{1}{2}] : B(x_2, \varepsilon_2) \subseteq B(x_1, \varepsilon_1).$
$\rightsquigarrow B(x_2, \varepsilon_2) \cap M_2 \neq \emptyset \rightsquigarrow \ldots$
Dieses Konstruktionsprinzip wird induktiv fortgesetzt, und wir erhalten eine

Folge (x_n) in X_1 mit folgenden Eigenschaften:
$\|x_n - x_m\|_1 \leq 2\varepsilon_n \leq \frac{2}{n}$, $\forall m > n \rightsquigarrow (x_n)$ ist Fundamentalfolge,
und $x_n \in M_k$, $\forall k \leq n-1$.
Da X_1 ein Banachraum ist, $\exists x_* \in X_1 : x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_*$.
Sei $k \in I\!N$ beliebig, und wir wählen $n \geq k+1$. Dann gilt:
$x_n \in M_k$, d.h. $p(x_n) > k \rightsquigarrow \exists n_o \in I\!N : \|A_{n_o} x_n\|_2 > k$.
Grenzübergang $n \to \infty$: $\|A_{n_o} x_*\|_2 \geq k \rightsquigarrow p(x_*) \geq k$
$\rightsquigarrow p(x_*) = +\infty$ Widerspruch! zur Voraussetzung. $\square$

Satz 7.27 *(Banach/Steinhaus)*
Seien X_1 ein Banachraum, X_2 ein linearer normierter Raum und $A, A_n \in L(X_1, X_2)$, $n \in I\!N$.
Dann ist (A_n) punktweise konvergent gegen A gdw.

i) $\sup\limits_{n\in I\!N} \|A_n\| < +\infty$, *und*

ii) es existiert Menge $M \subseteq X_1$ so, daß die lineare Hülle $\mathcal{L}(M)$ dicht ist in X_1 und $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$, $\forall x \in M$

Beweis:
$(\Longrightarrow)$ $A_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Ax$, $\forall x \in X_1 \rightsquigarrow \sup\limits_{n\in I\!N} \|A_n x\|_2 < +\infty$, $\forall x \in X_1$.
7.26 $\rightsquigarrow \sup\limits_{n\in I\!N} \|A_n x\| < +\infty$, d.h. i); ii) ist trivial: $M := X_1$
$(\Longleftarrow)$ Aus der punktweisen Konvergenz $A_n x \to Ax$, $\forall x \in M$, und der Linearität von A_n und A folgt die punktweise Konvergenz auf der Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus M, d.h. auf $\mathcal{L}(M)$, d.h.

$$A_n x \to Ax, \quad \forall x \in \mathcal{L}(M) \quad \star$$

Sei $C := \max\{\|A\|, \sup\limits_{n\in I\!N} \|A_n\|\} < +\infty$ (nach i)!), sei $x_o \in X_1$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig fest.
Da $\mathcal{L}(M)$ dicht ist in X_1, $\exists x \in \mathcal{L}(M) : \|x_o - x\|_1 < \frac{\varepsilon}{4C}$,
$\rightsquigarrow \exists n_o \in I\!N : \|A_n x - Ax\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_o$ wegen $\star$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \|A_n x_o - Ax_o\|_2 &\leq \|A_n x_o - A_n x\|_2 + \|A_n x - Ax\|_2 + \|Ax - Ax_o\|_2 \\
&\leq \underbrace{\|A_n\|}_{\leq C} \|x - x_o\|_1 + \|A_n x - Ax\|_2 + \underbrace{\|A\|}_{\leq C} \|x - x_o\|_1 \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall n \geq n_o
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow A_n x_o \to Ax_o$; $x_o \in X$ war beliebig gewählt. $\square$

Satz 7.28
Es seien X_1 Banachraum, X_2 linearer normierter Raum, (A_n) eine Folge in $L(X_1, X_2)$, $A : X_1 \to X_2$.
Konvergiert (A_n) punktweise gegen A, so ist $A \in L(X_1, X_2)$ und $\|A\| \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$

Beweis:
Die Linearität von A folgt analog zu Satz 7.21 (für die dort konstruierte Abbildung A), zu zeigen ist: A ist beschränkt.
Wegen der Konvergenz von $(A_n x)$ in X_2, $\forall x \in X_1$, gilt:
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\|_2 < +\infty$, $\forall x \in X_1$.
7.26 $\rightsquigarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| =: C < +\infty$.
Sei $x \in X_1$ beliebig.

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow \|Ax\|_2 &= \|\lim_{n\to\infty} A_n x\|_2 = \varliminf_{n\to\infty} \|A_n x\|_2 \\ &\le \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\| \|x\|_1 \le C\|x\|_1\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow A$ ist beschränkt und $\|A\| \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$ □

Beispiel 7.29
$X_1 := \{x \in C([0,1]) : x(0) = 0\}, X_2 := \mathbb{R}$ mit der Norm aus $C([0,1])$ bzw. $|\cdot|$.
(Übung: X_1 ist Banachraum)
Wir betrachten $f_n : X_1 \to \mathbb{R}, f_n(x) := x(\frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X_1$.
$f_n(x) = x(\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(0) = 0$, $\forall x \in X_1 \rightsquigarrow (f_n)$ konvergiert punktweise gegen das Nullelement Θ von X_1^*. f_n ist linear und beschränkt:
$|f_n(x)| \le \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x\|_1 \rightsquigarrow \|f_n\| \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Wir betrachten $x_n(t) := \min\{1, nt\}$, $\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow x_n \in X_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow f_n(x_n) = x_n(\frac{1}{n}) = 1$
Es gilt $\|x_n\| = 1$ und $\|f_n\| = \sup\limits_{\substack{x\in X_1\\ \|x\|\le 1}} |f_n(x)|$. $\rightsquigarrow \|f_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow \|\Theta\| = 0 < \varliminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = 1$.

Also folgt aus der punktweisen Konvergenz linearer beschränkter Operatoren i.a. <u>nicht</u> die Konvergenz der Operatornorm gegen die Norm des Grenzoperators!

Definition 7.30
Es seien X_1, X_2 lineare normierte Räume, $A : X_1 \to X_2$ linear.
$N(A) := \{x \in X_1 : Ax = \Theta\}$ heißt <u>Nullraum</u> von A.
A heißt <u>stetig invertiertbar</u>, falls A bijektiv ist und $A^{-1} \in L(X_2, X_1)$.

Bemerkung 7.31
Für einen linearen Operator $A : X_1 \to X_2$ sind Nullraum $N(A)$ und Wertebereich $R(A)$ lineare Teilräume von X_1 bzw. X_2.
A ist injektiv gdw. $N(A) = \{\Theta\}$.
Ist A injektiv, so ist der inverse Operator $A^{-1} : R(A) \to X_1$ linear. (Aber:

i.a. ist $R(A) \neq X_1$!). Ist A injektiv und beschränkt, so ist der inverse Operator A^{-1} i.a. <u>nicht</u> beschränkt!
<u>Beispiel:</u>
$X_1 := C([0,1]) = X_2, (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,1], \forall x \in C([0,1])$.
A ist linear und beschränkt:
$\|A\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |(Ax)(t)| \leq \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t |x(s)|ds \leq \int\limits_0^1 |x(s)|ds \leq \|x\|$
$\rightsquigarrow \|A\| \leq 1$.
A ist injektiv ($Ax_1 = Ax_2$, d.h. $\int\limits_0^t x_1(s)ds = \int\limits_0^t x_2(s)ds, \forall t \in [0,1]$
$\rightsquigarrow$ durch Differentiation: $x_1(t) = x_2(t), \forall t \in [0,1]$.
$R(A) = \{y \in C([0,1]) : y$ ist stetig differenzierbar$, y(0) = 0\} \subset C([0,1])$.
$A^{-1} : R(A) \to X_1, (A^{-1}y)(t) := y'(t), \forall t \in [0,1]$, oder: "$A^{-1} = \frac{d}{dt}$", und A^{-1} ist nicht beschränkt nach Beispiel 7.18 c)

Satz 7.32 *(Banach)*
Es seien X_1, X_2 Banachräume, $A \in L(X_1, X_2)$ sei bijektiv.
Dann ist A stetig invertierbar.

<u>Beweis:</u>
vgl. Ljusternik/Sobolëw: Elemente der Funktionalanalysis, Akademie-Verlag, Berlin 1968, Kap. III, §5, Satz 4.

Wir betrachten den Raum $L(X) := L(X,X)$ für einen gegebenen linearen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ mit der sog. "geometrischen Reihe" $I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n + \ldots$ bzw. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k, A^0 := I$, wobei $A \in L(X)$, $I \in L(X)$ der identische Operator ist.
Wir untersuchen die Konvergenz solcher Reihen, d.h. die Konvergenz der Folge (S_n) von Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} A^k$$

im Raum L(X) mit der Operatornorm.

Satz 7.33
Sei X ein Banachraum. Für jedes $A \in L(X)$ existiert der Grenzwert $\rho_A := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.
Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ konvergiert in $L(X)$ falls $\rho_A < 1$.

Beweis:
Wir setzen $\rho := \inf : n \in \mathbb{N} \sqrt[n]{\|A^n\|} \geq 0$.
Zwischenbetrachtung: Seien $A, B \in L(X)$
$\rightsquigarrow \|(A \circ B)(x)\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$
$\rightsquigarrow \|A \circ B\| \leq \|A\|\|B\|$
$\rightsquigarrow \|A^n\| \leq \|A\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, (existiert ρ_A, so ist $\underline{\rho_A \leq} \|A\|$).
Wir zeigen: ρ ist der Grenzwert der Folge $(\sqrt[n]{\|A^n\|})$:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.
Nach Definition von ρ $\exists m \in \mathbb{N} : \rho \leq \sqrt[m]{\|A^m\|} \leq \rho + \frac{\varepsilon}{2}$.
$C := \max\{\|A^j\|, j = 1, \ldots, m-1\}$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $\rightsquigarrow \exists k_m \in \mathbb{N}_o, \exists l_n \in \{0, \ldots, m-1\} : n = k_n m + l_n$.
$\rightsquigarrow \|A^n\| = \|A^{k_n m + l_n}\| = \|A^{k_n m} A^{l_n}\| \leq \|A^{k_n m}\|\|A^{l_n}\| \leq C\|A^m\|^{k_n} < C(\rho + \frac{\varepsilon}{2})^{mk_n}$.
$\rightsquigarrow \rho \leq \sqrt[n]{\|A^n\|} < C^{\frac{1}{n}}(\rho\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{mk_n}{n}} = C^{\frac{1}{n}}(\rho + \frac{\varepsilon}{2})^{1-\frac{l_n}{n}}$.
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} C^{\frac{1}{n}}(\rho + \frac{\varepsilon}{2})^{1-\frac{l_n}{n}} = \rho + \frac{\varepsilon}{2}$, existiert ein $n_o \in \mathbb{N} : C^{\frac{1}{n}}(\rho + \frac{\varepsilon}{2})^{1-\frac{l_n}{n}} < \rho + \varepsilon$, $\forall n \geq n_o$.
$\rightsquigarrow \rho \leq \sqrt[n]{\|A^n\|} < \rho + \varepsilon$, $\forall n \geq n_o, \rightsquigarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \rho_A = \rho$.

Für den zweiten Teil betrachten wir die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$ (in $\mathbb{R}$). Nach Satz 3.29 (Wurzelkriterium) konvergiert die Reihe, falls $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \rho_A < 1$.
Wir betrachten die Folge (S_n) der Partialsummen, $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Seien $n, m \in \mathbb{N}, m > n$.
$\rightsquigarrow \|S_n - S_m\| = \|\sum\limits_{k=n+1}^{m} A^k\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} \|A^k\|$.
Die rechte Seite wird aber für großes n beliebig klein wegen der Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$ (Satz 3.22). $\rightsquigarrow$ (S_n) ist Fundamentalfolge in $L(X)$ und deshalb konvergent in $L(X)$ nach Satz 7.21 □

Bemerkung 7.34
Die in 7.33 definierte Zahl ρ_A für $A \in L(X)$ heißt <u>*Spektralradius*</u> *von A. Man kann folgendes zeigen:*

$\rho_A = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A$ *ist nicht bijektiv*$\}$

Alle solche $\lambda \in \mathbb{C}$ mit "$\lambda I - A$ nicht bijektiv" nennt man <u>*Spektrum*</u> *von A. Es gilt stets: $\rho_A \leq \|A\|$.*
Für $X = \mathbb{R}^m$ ist das Spektrum gerade die Menge aller Eigenwerte.

Satz 7.35
Sei X ein Banachraum, $B \in L(X), \|B\| < 1$. Dann ist $I - B$ stetig invertierbar und es gilt: $\|(-B^{-1})\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$.

Beweis:
Es gilt $\rho_B = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|B^n\|} \leq \|B\| < 1$.
7.33 $\rightsquigarrow$ die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} B^k$ ist konvergent in $L(X)$.
Wir betrachten die Partialsummen $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} B^k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow S_n(I-B) = \sum\limits_{k=0}^{n} B^k(I-B) = \sum\limits_{k=0}^{n} B^k - \sum\limits_{k=0}^{n} B^{k+1} = I - B^{n+1} = (I-B)S_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow \|S_n(I-B) - I\| = \|(I-B)S_n - I\| = \|B^{n+1}\| \leq \|B\|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\star) S(I-B) = I = (I-B)S, \quad S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B^k \in L(X)$.
Ziel ist, z.z.: $S = (I-B)^{-1} \in L(X)$.

i) $(I-B)$ ist injektiv: $x \in N(I-B), \star \rightsquigarrow S(I-B)x = x = S(\Theta) = \Theta$
$\rightsquigarrow N(I-B) = \{\Theta\} \rightsquigarrow I-B$ ist injektiv.

ii) $(I-B)$ ist surjektiv: $x \in X, \star \rightsquigarrow x = (I-B)Sx \rightsquigarrow x \in R(I-B)$
$\rightsquigarrow X = R(I-B) \rightsquigarrow I-B$ ist surjektiv.

iii) $(I-B)^{-1} : X \to X$ ist linear, (klar!)

iv) $(I-B)^{-1}$ ist beschränkt: $S(I-B) = I \rightsquigarrow S = (I-B)^{-1} \in L(X)$, da $S \in L(X)$.

Ungleichung:

$$\rightsquigarrow \|(I-B)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} B^k\| = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=0}^{n} B^k\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|B\|^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \|B\|^k = \frac{1}{1-\|B\|} \quad (3.21) \qquad \square$$

Bemerkung 7.36
Falls $B \in L(X)$ ist mit $\|B\| < 1$, so gilt nach 7.35: $(I-B)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B^k$, und die Reihe auf der rechten Seite heißt Neumannsche Reihe.
Satz 7.35 kann wiefolgt interpretiert werden: Ist $A \in L(X)$ (X Banachraum), und ist $\|I-A\| < 1$, so gilt: A ist stetig invertierbar, und
$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|I-A\|} \quad (B := (I-A)!)$

Satz 7.37 *("Störungslemma")*
Es seien X_1 linearer normierter Raum, X_2 Banachraum, $A, \tilde{A} \in L(X_1, X_2)$, A stetig invertierbar, und es gelte $\|A - \tilde{A}\| < \|A^{-1}\|^{-1}$.
Dann ist auch $\tilde{A}$ stetig invertierbar und es gelten die Ungleichungen:

$$\|\tilde{A}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A-\tilde{A}\|\|A^{-1}\|} \qquad \|A - \tilde{A}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2\|A-\tilde{A}\|}{1-\|A-\tilde{A}\|\|A^{-1}\|}$$

Beweis:
Wir wählen $B := (A-\tilde{A})A^{-1} \in L(X_2) \rightsquigarrow \|B\| = \|(A-\tilde{A}A^{-1}\| \leq \|A-\tilde{A}\|\|A^{-1}\| < 1$.
7.35 $\rightsquigarrow I-B$ ist stetig invertierbar, d.h. $(I-B)^{-1} \in L(X_2)$ und $\|(I-B)^{-1} \leq \frac{1}{1-\|B\|}$.
$\rightsquigarrow \tilde{A} = A-(A-\tilde{A}) = (I-(A-\tilde{A})A^{-1})A = (I-B)A$ und $(I-B)A$ ist stetig invertierbar.
$\rightsquigarrow \tilde{A}$ ist stetig invertierbar und $\tilde{A}^{-1} = [(I-B)A]^{-1} = A^{-1}(I-B)^{-1}$.
Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{A}^{-1}\| &= \|A^{-1}(I-B)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\|(I-B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|B\|} \\
&\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A-\tilde{A}\|\|A^{-1}\|} \\
\|A^{-1}-\tilde{A}^{-1}\| &= \|A^{-1}-A^{-1}(I-B)^{-1}\| = \|A^{-1}(I-(I-B)^{-1})\| \\
&= \|A^{-1}[(I-B)-I](I-B)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\|B\|\|(I-B)^{-1}\| \\
&\leq \|A^{-1}\|^2\|A-\tilde{A}\|\frac{1}{1-\|B\|}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.38
Satz 7.37 besagt, daß um jeden stetig invertierbaren Operator $A \in L(X_1, X_2)$ (X_2 Banachraum) eine (offene) Kugel in $L(X_1, X_2)$ existiert, so daß alle Operatoren aus dieser Kugel ebenfalls stetig invertierbar sind. Also ist die Menge aller stetig invertierbaren Operatoren in $L(X_1, X_2)$ (im Sinne der Operatornorm) offen! Der Radius der entsprechenden Kugel um einen stetig invertierbaren Operator A hängt ab von der Norm von A^{-1}, d.h. der Größe von $\|A^{-1}\|$: Je größer $\|A^{-1}\|$, desto kleiner der Radius. Die Norm von A^{-1} bestimmt in gewisser Weise die "Kondition" des Problems, das den Operator A enthält. Außerdem liefert Satz 7.37 Abschätzungen für die Norm des Inversen des "gestörten" Operators (bzw. der Approximation von A) und den Abstand der inversen Operatoren.

Wir kommen abschließend zu allgemeinen Reihen von Operatoren, nämlich zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k, \quad A \in L(X), a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_o$$

Satz 7.39
Es sei X Banachraum, $A \in L(X)$ mit Spektralradius ρ_A. Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe (in $\mathbb{C}$) mit Konvergenzradius $\rho \in]0, +\infty]$, $a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_o$. Dann konvergiert die Operatorreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ in $L(X)$, falls $\rho_A < \rho$.

<u>**Beweis:**</u>
Wir betrachten die Partialsummen $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k A^k \in L(X), \forall n \in \mathbb{N}$. Seien $m, n \in \mathbb{N}, m > n$.
$\|S_m - S_n\| = \| \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k A^k\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| \|A^k\|$.
Wir zeigen: die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| \|A^k\|$ ist konvergent.
$\rightsquigarrow$ Anwendung des Wurzelkriteriums (3.29):
$\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \|A^n\|} = \underbrace{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{=\frac{1}{\rho}} \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}}_{=\rho_A} = \frac{\rho_A}{\rho} < 1.$
$\rightsquigarrow$ die Reihe ist konvergent.
$\rightsquigarrow$ (S_n) ist Fundamentalfolge in $L(X) \rightsquigarrow (S_n)$ konvergiert in $L(X)$ (7.21!).

Bemerkung 7.40
Hat $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\} \to \mathbb{C}$ die Form $f(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \forall z \in \mathbb{C}, |z| < \rho$, so ist nach Satz 7.39 $f(A) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ definiert $\forall A \in L(X)$ mit $\rho_A < \rho$. Dies sind sog. "Operatorfunktionen"!
Spezialfall: $\exp(A) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad \forall A \in L(X)$, *(beachte: $\rho = +\infty$!)*
Betrachtet man die Funktion $g(t) = \exp(At), \forall t \in \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to L(X)$, (wobei $A \in L(X)$ gegeben), so kann man zeigen:

$$g'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = A \cdot \exp(At), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\rightsquigarrow g'(t) = A \cdot g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(g ist beliebig oft stetig differenzierbar!)
(Übung, Hinweis: man zeige zuerst die Erweiterung der Funktionalgleichung von exp*:*
$\exp(A(t+s)) = \exp(At) \cdot \exp(As), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$,
danach verwende man den Beweisweg von Beispiel 5.7 b))

7.3 Kompakte Mengen in Räumen stetiger Funktionen

Für den (kompakten) metrischen (T, d) wurde in Kap. 4.2 der Raum $X := C(T, \mathbb{R}^K)(= C_b(T, \mathbb{R}^k))$ eingeführt, der mit der Norm $\|x\| := \sup\limits_{t\in T} \|x(t)\|$, für $x \in X$ (vgl. Bsp. 7.6 b)), Banachraum ist.
Unser <u>Ziel</u> in diesem Kapitel ist nun, (relativ) kompakte Mengen in X zu charakterisieren. Dies wird später in Kap. 8 beim Beweis von Existenzsätzen

für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen benötigt.
Wichtig wird hierbei der Begriff der gleichgradigen Stetigkeit einer Menge von Funktionen in X sein (vgl. Def. 4.36). In der Tat beginnen wir mit einer Verschärfung eines Teiles der Aussage von Satz 4.39, die damals den Zusammenhang zwischen der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen klarstellte.

Lemma 7.41
Es sei (T, d) ein kompakter metrischer Raum, $S \subset T$ sei dicht in T und (x_n) eine Folge in $C(T; \mathbb{R}^k)$.
Dann ist (x_n) gleichmäßig konvergent (d.h. bez. der Norm auf X), falls

i) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *gleichgradig stetig ist, und*

ii) $(x_n(t))$ *konvergent ist für jedes $t \in S$.*

<u>**Beweis:**</u>
Es sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt. Nach *i)* existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß $\|x_n(t) - x_n(\tilde{t})\| < \frac{\varepsilon}{3}$, falls $t, \tilde{t} \in T, d(t, \tilde{t}) < \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Es sei nun $t \in T$ beliebig gewählt. Da S dicht in T ist, existiert $\tilde{t} \in S$ mit $d(t, \tilde{t}) < \delta$. Ferner existiert nach *ii)* ein $\tilde{n}_o \in \mathbb{N}$, so daß $\|x_m(\tilde{t}) - x_n(\tilde{t})\| < \frac{\varepsilon}{3}$, falls $m, n \geq \tilde{n}_o$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \|x_m(t) - x_n(t)\| &\leq \|x_m(t) - x_m(\tilde{t})\| + \|x_m(\tilde{t}) - x_n(\tilde{t})\| + \|x_n(\tilde{t}) - x_n(t)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \text{falls } m, n \geq \tilde{n}_o. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $(x_n(t))$ ist Fundamentalfolge im $\mathbb{R}^k$, also konvergent.
$\rightsquigarrow$ (x_n) ist punktweise konvergent: $\forall t \in T \exists$ der Grenzwert $x(t)$.
$\rightsquigarrow$ die Aussage folgt aus Satz 4.38. □

Da T kompakt ist, ergibt sich ein zweiter Beweisweg für obige Aussage aus der Existenz eines endlichen $\frac{\delta}{2}$-Netzes für T (2.39). Die Argumentation läuft dann aber analog. (Im Grunde zeigt dies nur, daß die in T dichte Menge S stets existiert, und daß es sogar eine endliche dichte Teilmenge (eben das $\frac{\delta}{2}$-Netz) gibt.)

Satz 7.42 *(Arzela/Ascoli)*
Es sei (T, d) ein kompakter metrischer Raum. $\mathcal{F} \subseteq C(T, \mathbb{R}^k)$ ist relativ kompakt, gdw.

a) $\mathcal{F}$ *beschränkt ist, und*

b) $\mathcal{F}$ *gleichgradig stetig ist.*

Beweis:

($\rightarrow$) Die Beschränktheit von $\mathcal{F}$ ist klar (Satz 2.39).
Wir zeigen: $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig.
Es sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt. Nach Satz 2.39 existiert nun ein endliches $\frac{\varepsilon}{3}$-Netz $\{x_i : i = 1, \dots, m\} \subseteq C(T, I\!R^k)$ für $\mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} B(x_i, \frac{\varepsilon}{3})$.
Für alle $x \in \mathcal{F}$ existiert also ein $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $\|x - x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$, d.h. insbesondere $\sup\limits_{t \in T} \|x(t) - x_i(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Außerdem sind aber alle x_i, $i = 1, \dots, m$, gleichmäßig stetig auf T (Satz 4.20), d.h. für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ existiert ein $\delta_i > 0$, so daß $\|x_i(t) - x_i(\tilde{t})\| < \frac{\varepsilon}{3}$, falls $d(t, \tilde{t}) < \delta_i$.
Wir wählen $\delta := \min\{\delta_i : i = 1, \dots, m\}$. Seien $t, \tilde{t} \in T$, $d(t, \tilde{t}) < \delta$ und $x \in \mathcal{F}$ beliebig.

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(\tilde{t})\| &\leq \|x(t) - x_i(t)\| + \|x_i(t) - x_i(\tilde{t})\| + \|x_i(\tilde{t} - x(\tilde{t})\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.

($\leftarrow$) Es sei (x_n) eine bel. Folge in $\mathcal{F}$. Wir zeigen: Es existiert eine in $C(T; I\!R^k)$ konvergente Teilfolge.
Da T kompakt, ist T nach 2.38 separabel. Es sei $\{t_m : m \in I\!N\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von T.
Die konvergente Teilfolge wählen wir im folgenden nach dem sogenannten "Diagonalfolgen-Prinzip" aus.
Wir definieren jetzt wie folgt sukzessive Teilfolgen $(x_{n,i})$ $(i \in I\!N)$ von (x_n):
Nach a) ist die Folge $(x_n(t_1))$ beschränkt in $I\!R^k$ (da $\mathcal{F}$ beschränkt ist). Folglich existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n,1})$ von (x_n), so daß $(x_{n,1}(t_1))$ in $I\!R^k$ konvergent ist (Satz 3.15).
Wir betrachten jetzt die Teilfolge $(x_{n,1})$. Analog zur obigen Schlußweise enthält auch diese Folge eine Teilfolge $(x_{n,2})$, so daß $(x_{n,2}(t_2))$ in $I\!R^k$ konvergent ist.
Allgemein konstruieren wir also $(x_{n,i})$ (für $i \in I\!N, i \geq 2$) als Teilfolge von $(x_{n,i-1})$, so daß $(x_{n,i}(t_i))$ in $I\!R^k$ konvergent ist. Nach Konstruktion ist insbesondere $(x_{n,i}(t_j))$, $\forall j = 1, \dots, i$, $i \in I\!N$, konvergent.
Wir betrachten nun die "Diagonalfolge" $(x_{n,n})$, indem wir von der n-ten Folge der $(x_{n,i})$, $i \in I\!N$, das n-te Folgenglied auswählen. Dies ist selbstverständlich eine Teilfolge von (x_n). Ferner stellen wir fest, daß die Folge $(x_{n,n}(t_i))$ für jedes $i \in I\!N$, in $I\!R^k$ konvergent ist, da $(x_{n,n}(t_i))_{n \geq i}$ nach Konstruktion eine Teilfolge von $(x_{n,i}(t_i))$ ist.
Also ist $(x_{n,n})$ punktweise auf einer dichten Teilmenge $S := \{t_m : m \in$

$I\!N\}$ von T konvergent und nach Konstruktion ist $\{x_{n,n} : n \in I\!N\}$ als Teilmenge von $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.
Aus Lemma 7.41 folgt deshalb: $(x_{n,n})$ ist konvergent in $C(T, I\!R^k)$. $\square$

Beispiel 7.43
Bleibt der Satz von Arzela/Ascoli richtig für Mengen $\mathcal{F} \subseteq C_b(T; I\!R^k)$, *wenn* T *nicht kompakt ist? Antwort: Nein: Es sei* $T := [0, +\infty[$ *und wir betrachten die Funktion* $x_n : T \to I\!R, x_n(t) := \sin(\sqrt{t + 4n^2\pi^2})$, $\forall t \in T, \forall n \in I\!N$.
$\mathcal{F} := \{x_n : n \in I\!N\} \subset C_b(T, I\!R)$.
$\mathcal{F}$ *ist beschränkt, da* $\|x_n\| \leq 1, \forall n \in I\!N$; $\mathcal{F}$ *ist gleichgradig stetig, da* $\mathcal{F}$ *gleichmäßig Lipschitz-stetig ist. (Anwendung von 4.37 b)).*

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_n(\tilde{t})| &= |\sin\sqrt{t + 4n^2\pi^2} - \sin\sqrt{\tilde{t} + 4n^2\pi^2} \\ &\leq |\sqrt{t + 4n^2\pi^2} - \sqrt{\tilde{t} + 4n^2\pi^2} \quad \textit{(Mittelwertsatz)} \\ &\leq L_w|t - \tilde{t}|, \quad \forall t, \tilde{t} \in]0, +\infty[, \forall n \in I\!N, \end{aligned}$$

wobei L_w *die Lipschitz-Konstante der Wurzelfunktion auf* $[4\pi^2, +\infty[$ *ist.*
Aber: $\mathcal{F}$ *ist* <u>*nicht*</u> *relativ kompakt.*
Es gilt: $x_n(t) = \sin(2\pi n \underbrace{\sqrt{\frac{t}{4n^2\pi^2} + 1}}_{=:\varepsilon_n(t)}) = \sin \underbrace{2\pi n \varepsilon_n(t)}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *und*
$\|x_n\| = 1, \quad \forall n \in I\!N$.
D.h. keine gleichmäßige Konvergenz einer Teilfolge von x_n*!*

Beispiel 7.44
Es sei $f : [0, 1] \times I\!R^k \to I\!R^k$ *stetig und* $y \in C([0, 1], I\!R^k)$. *Wir definieren einen Operator* $F : C([0, 1], I\!R^k) \to C([0, 1], I\!R^k)$ *durch*

$$(Fx) := y(t) + \int_0^t f(s, x(s))ds, \quad \forall t \in [0, 1], \ \forall x \in C([0, 1], I\!R^k).$$

(Wegen der Stetigkeit von f *ist das Riemann-Integral wohl-definiert und als Funktion der oberen Grenze nach Satz 6.42 stetig!)*

Beh.: *Für jede beschränkte Menge $B \subseteq C([0,1];\mathbb{R}^k)$ ist $F(B)$ relativ kompakt in $C([0,1];\mathbb{R}^k)$.*
(Ein Operator F, der diese Eigenschaft besitzt, heißt auch kompakt; ist er zusätzlich stetig, so heißt er auch vollstetig.)

Bew.: *Es sei B beschränkt in $C([0,1],\mathbb{R}^k)$ und wir betrachten die Menge $\mathcal{F} := F(B)$. Unser Ziel ist die Anwendung von Satz 7.42.*
a) Wir zeigen: $\mathcal{F}$ ist beschränkt.
Da B beschränkt ist, existiert $\alpha := \sup\{\|x\|; x \in B\} < \infty$.
f ist dann auf $[0,1] \times \bar{B}(0,\alpha)$ beschränkt mit Konstante $C_1 > 0$.
Daraus folgt für bel. $t \in [0,1]$ und $x \in B$:

$$\begin{aligned}\|(Fx)(t)\| &\leq \|y\| + \int_0^t \|f(s,x(s))\|ds \qquad \text{(vgl. Bem. 6.38)}\\ &\leq \|y\| + C_1 t \leq \|y\| + C_1, \text{ (siehe oben).}\end{aligned}$$

Also ist $F(B)$ beschränkt (mit $\|y\| + C_1$) in $C([0,1];\mathbb{R}^k)$, da die Abschätzung für alle $t \in [0,1]$ gilt.
b) Wir zeigen: $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig.
Für bel. $t, \tilde{t} \in [0,1]$ und $x \in B$ gilt:

$$\begin{aligned}\|(Fx)(t) - (Fx)(\tilde{t})\| &\leq \|y(t) - y(\tilde{t})\| + \Big\|\int_0^t f(s,x(s))ds - \int_0^{\tilde{t}} f(s,x(s))ds\Big\|\\ &\leq \|y(t) - y(\tilde{t})\| + \Big|\int_t^{\tilde{t}} \|f(s,x(s))\|ds\Big|\\ &\leq \|y(t) - y(\tilde{t})\| + C_1|t - \tilde{t}|\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ *$\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig, da y gleichmäßig stetig auf $[0,1]$ ist.* $\square$

7.4 Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß und seine Anwendungen

Ziel dieses Kapitels ist die Möglichkeit der "Approximation" (oder: Annäherung) einer stetigen (reell- oder komplexwertigen) Funktion durch einfachere Funktionen (insbesondere Polynome und trigonometrische Polynome). Allgemein gesprochen werden wir Aussagen darüber herleiten, wann bestimmte allgemeine Mengen A dicht in $C(T) := C(T,\mathbb{R})$ bzw. $C(T,\mathbb{C})$ (letzterer als linearer Raum über dem Körper $K := \mathbb{C}$ betrachtet) sind, wobei (T,d) ein kompakter metrischer Raum ist.
Der erste wichtige Begriff auf diesem Wege ist der einer "Algebra".

Definition 7.45
Ein linearer Raum X (über einem Körper K) heißt (kommutative) Algebra, wenn für je 2 Elemente $x, y \in X$ eine weitere Operation "Produkt" xy so

definiert ist, daß $xy \in X$ und die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\left.\begin{array}{lll} (i) & x(yz) & = (xy)z \\ (ii) & x(y+z) & = xy + xz \\ (iii) & \alpha(xy) & = (\alpha x)y = x(\alpha y) \\ (iv) & xy & = yx \end{array}\right\} \forall x, y, z \in X, \forall \alpha \in K$$

Ein Element $e \in X$ mit $xe = x$, $\forall x \in X$, heißt <u>Einselement</u> in X. Jede nichtleere Teilmenge A einer Algebra X, für die mit $x, y \in A$, $\alpha \in K$ auch $x + y \in A$, $xy \in A$, $\alpha x \in A$ gilt, heißt <u>Teilalgebra</u> von X.

Beispiel 7.46

a) *Ist X ein linearer normierter Raum, so ist $L(X)$ eine Algebra, wenn als "Produkt" zweier linearer beschränkter Operatoren ihre Hintereinanderausführung verstanden wird. Sie ist allerdings nicht kommutativ, d.h. (iv) gilt nicht!*

b) *Sei (T, d) ein metrischer Raum. Dann sind $X := C(T)$ bzw. $C(T,\mathbb{C})$ (Funktionen-) Algebren, indem kanonisch definiert wird:*

$$(xy)(t) := x(t)y(t), \quad \forall t \in T, \forall x, y \in X.$$

Die Eigenschaften (i)-(iv) in 7.45 sind wegen der Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ erfüllt.
Eine (später wichtige) Teilalgebra von $C(T)$, wobei $T \subseteq \mathbb{R}$, ist die Menge A aller Polynome (eingeschränkt auf T).

Lemma 7.47
Es existiert eine Folge (p_n) von Polynomen in $C([0,1])$, die auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $v \in C([0,1])$, $v(t) := \sqrt{t}$, $\forall t \in [0,1]$, konvergiert.

<u>Beweis:</u>
Wir definieren $p_1(t) := 0$, $\forall t \in [0,1]$, und sukzessive

$$(*) \quad p_{n+1}(t) := p_n(t) + \frac{1}{2}(t - (p_n(t))^2), \quad \forall t \in [0,1] \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\rightsquigarrow p_n$ ist ein Polynom, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Wir zeigen: $p_{n+1}(t) \geq p_n(t)$ und $p_n(t) \leq \sqrt{t}$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ Wegen der Rekursion $(*)$ genügt es, die zweite Eigenschaft zu zeigen. Die erste ergibt sich daraus automatisch. Wir beweisen $p_n(t) \leq \sqrt{t}$, $\forall \in [0,1]$, mit vollständiger Induktion. Für $n = 1$ ist die Aussage offenbar richtig. Sie sei allgemein auch für n richtig und wir beweisen sie für $n+1$: Für bel. $t \in [0,1]$ gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{t} - p_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - p_n(t) - \frac{1}{2}(t - (p_n(t))^2) \\ &= (\sqrt{t} - p_n(t))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \end{aligned}$$

Wegen $p_n(t) \le \sqrt{t}$ gilt aber auch $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t)) \le \sqrt{t} \le 1$ und damit

$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \ge 0, \quad \forall t \in [0,1]$.

Damit ist die Folge $(p_n(t))$ für jedes $t \in [0,1]$ monoton wachsend und beschränkt, und folglich konvergent gegen einen Grenzwert $(v(t)$. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ in $(*)$ folgt aber weiterhin, daß

$$v(t) = v(t) + \frac{1}{2}(t - (v(t))^2) \quad \text{sowie} \quad v(t) \ge 0,$$

und folglich

$$v(t) = \sqrt{t}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Die stetige Funktion v ist also punktweiser Grenzwert einer monoton wachsenden Folge stetiger Funktionen. Nach Satz 4.39 (Dini) konvergiert deshalb (p_n) gleichmäßig gegen v. □

Definition 7.48
Man sagt, eine Teilmenge A von $C(T)$ bzw. $C(T,\mathbb{C})$ <u>trennt</u> die Punkte von T, falls für alle $t, \tilde{t} \in T, t \ne \tilde{t}$ eine Funktion $x \in A$ existiert, so daß

$$x(t) \ne x(\tilde{t}).$$

Satz 7.49 *(Stone/Weierstraß)*
Es sei (T,d) ein kompakter metrischer Raum.
A sei eine Teilalgebra von $C(T)$, die die konstanten Funktionen enthält und die die Punkte von T trennt.
Dann gilt: $\overline{A} = C(T)$, d.h. A ist dicht in $C(T)$.

<u>Beweis:</u>
Der Beweis unterteilt sich in insgesamt 6 Schritte:

(1) <u>Beh.:</u> $x \in A \rightsquigarrow |x| \in \overline{A} = \mathrm{cl}(A)$.
<u>Bew.:</u> Es sei $x \in A, a := \|x\| := \sup\limits_{t \in T} |x(t)|$. Wir betrachten die in Lemma 7.47 konstruierte Folge (p_n) von Polynomen und wir betrachten die Funktionen $y_n(t) := p_n(\frac{1}{a^2}x(t)^2) \in C(T), \forall n \in \mathbb{N}$.
Wegen $x \in A$ und den Eigenschaften einer Algebra gilt $y_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$ (da p_n Polynom ist). Nach Lemma 7.47 gilt ferner

$$y_n \to \sqrt{\frac{1}{a^2}x(\cdot)^2} = \frac{|x(\cdot)|}{a} \quad \text{in} \quad C(T).$$

$\rightsquigarrow \frac{|x|}{a} \in \overline{A} \rightsquigarrow |x| \in \overline{A}$ (siehe(2)). □

(2) <u>Beh.:</u> $\overline{A}$ ist eine Algebra.
<u>Bew.:</u> Seien $x, y \in \overline{A} \rightsquigarrow \exists$ Folgen (x_n), (y_n) in A mit $x_n \to x$, $y_n \to y$ (in $C(T)$.
$\rightsquigarrow x_n + y_n \in A$, $x_n y_n \in A$, $\alpha x_n \in A$, $\forall n \in I\!N$, $\alpha \in I\!R$.
$\rightsquigarrow x + y \in \overline{A}$, $\alpha x \in \overline{A}$.
Ferner gilt $\|x_n y_n - xy\| \leq \|x_n y_n - x_n y\| + \|x_n y - xy\|$
$\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|y\| \|x_n - x\| \to 0$.
$\rightsquigarrow xy \in \overline{A}$.
$\rightsquigarrow \overline{A}$ ist Teilalgebra.

(3) <u>Beh.:</u> $x, y \in \overline{A} \rightsquigarrow \min\{x, y\}, \max\{x, y\} \in \overline{A}$.
<u>Bew.:</u> (1) gilt auch für $\overline{A}$ anstelle von A. Deshalb folgt aus (1) und (2) weiterhin:

$$\begin{aligned} \max\{x, y\} &= \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \in \overline{A} \quad \text{und} \\ \min\{x, y\} &= \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \in \overline{A}. \end{aligned}$$

□

(4) <u>Beh.:</u> Zu jedem Paar verschiedener Punkte $\bar{t}, \tilde{t} \in T$ und jedem Paar reeller Zahlen $\alpha, \beta \in I\!R$ existiert eine Funktion $x \in \overline{A}$ mit

$$x(\tilde{t}) = \alpha, \; x(\bar{t}) = \beta.$$

<u>Bew.:</u> Da A nach Voraussetzung die Punkte von T trennt, existiert ein $y \in A$ mit $y(\bar{t}) \neq y(\tilde{t})$.
Wir betrachten nun die Funktion x definiert durch

$$x(s) := \alpha + \frac{\beta - \alpha}{y(\bar{t}) - y(\tilde{t})}(y(s) - y(\tilde{t})), \quad \forall s \in T.$$

Nach Def. gilt $x(\bar{t}) = \beta$, $x(\tilde{t}) = \alpha$ und nach Vor. gilt $x \in A$. □

(5) <u>Beh.:</u> Für alle $x \in C(T)$, $\forall \bar{t} \in T$, $\forall \varepsilon > 0$ existiert ein $y \in \overline{A}$ mit $y(\bar{t}) = x(\bar{t})$ und $y(t) \leq x(t) + \varepsilon$, $\forall t \in T$.
<u>Bew.:</u> Es seien $x \in C(T)$, $\bar{t} \in T$ und $\varepsilon > 0$ bel. gewählt.
Wir wählen nun für jedes $s \in T$ ein $h_s \in \overline{A}$ mit den Eigenschaften $h_s(\bar{t}) = x(\bar{t})$ und $h_s(s) \leq x(s) + \frac{\varepsilon}{2}$ (für $s = \bar{t}$ ist das trivial und für $s \neq \bar{t}$ ist dies nach (4) möglich).
Da x und h_s stetig sind, existiert eine offene Umgebung U_s von s, so daß $h_s(t) \leq x(t) + \varepsilon$, $\forall t \in U_s$ (für jedes $s \in T$).
$\rightsquigarrow (U_s)_{s \in T}$ ist eine offene Überdeckung von T.
Da T kompakt ist, existiert nach Satz 2.43 (Heine/Borel) eine endliche Teilüberdeckung von T durch U_{s_i}, $i = 1, \ldots, r$.
Wir betrachten nun die Funktion $y \in \overline{A}$ (nach (3)):

$y(t) := \min\limits_{i=1,\dots,r} h_{s_i}(t),\ \forall t \in T.$
$\rightsquigarrow y(\bar{t}) = \min\limits_{i=1,\dots,r} h_{s_i}(t) = x(\bar{t}).$
Sei $t \in T$ bel. gewählt, $\rightsquigarrow \exists i_o \in \{1,\dots,r\} : t \in U_{s_{i_o}} \rightsquigarrow y(t) \leq h_{s_{i_o}}(t) \leq x(t) + \varepsilon,\ \forall t \in T.$ □

(6) Beh.: $\overline{A} = C(T)$.
Bew.: Seien $x \in C(T)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.
Nach (5) existiert für jedes $s \in T$ eine Funktion $y_s \in \overline{A}$, so daß
$y_s(s) = x(s)$ und $y_s(t) \leq x(t) + \varepsilon,\ \forall t \in T.$

Für jedes $s \in T$ existiert nun wegen der Stetigkeit von y_s und x eine offene Umgebung V_s von s, so daß

$$y_s(t) \geq x(t) - \varepsilon, \quad \forall t \in V_s.$$

$(V_s)_{s\in T}$ ist wieder eine offene Überdeckung von T und wir wählen analog eine endliche Teilüberdeckung von T durch V_{s_j}, $j = 1,\dots,l$, aus.
Wir betrachten jetzt die Funktion $y \in C(T)$ mit $y(t) := \max\limits_{j=1,\dots,l} y_{s_j}(t)$, $\forall t \in T$. Nach (3) gilt wieder $y \in \overline{A}$.
Für alle $t \in T$ gilt aber nach Konstruktion $y(t) \geq y_{s_{j_o}}(t) \geq x(t) + \varepsilon$ (mit $y \in V_{s_{j_o}}$), und damit:

$x(t) - \varepsilon \leq y(t) \leq x(t) + \varepsilon \quad \forall t \in T.$
$\rightsquigarrow \quad |x(t) - y(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in T.$
$\rightsquigarrow \quad \|x - y\| \leq \varepsilon \rightsquigarrow x \in \overline{A}$ und alles ist gezeigt. □

Folgerung 7.50
Ist (T,d) kompakter metrischer Raum, so ist $C(T)$ separabel.

Beweis:
T ist nach 2.38 b) auch separabel. Es sei $\{t_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von T. Wir betrachten nun die Menge der offenen Kugeln $\{B(t_i, \frac{1}{m}) : i \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$. Diese abzählbare Menge numerieren wir neu und bezeichnen sie mit $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Wir definieren die folgenden Funktionen $g_n \in C(T)$

$g_n(t) := d(t, T\backslash U_n),\ \forall t \in T, \forall n \in \mathbb{N} \quad$ (o.B.d.A. $T\backslash U_n \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

(die Stetigkeit der g_n folgt aus 2.4e))
Wir betrachten nun die folgende Teilmenge A_o von $C(T)$:

$$A_o := \{\prod_{i=1}^{n} g_i^{\alpha_i} : \alpha_i \in \mathbb{N}_o, i = 1,\dots,n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Diese Menge ist abzählbar (Satz 1.28 b)) und ihre lineare Hülle $A := \mathcal{L}(A_o)$ ist eine Teilalgebra von $C(T)$. A enthält auch die konstanten Funktionen.
Wir zeigen noch: A trennt die Punkte von T.
Seien $t, \tilde{t} \in T$, $t \neq \tilde{t}$. Dann existiert ein U_n so, daß $t \in U_n$ und $\tilde{t} \notin U_n \rightsquigarrow g_n(t) \neq 0$ und $g_n(\tilde{t}) = 0$, sowie $g_n \in A_o \subseteq A$. Also können wir Satz 7.49 anwenden und erhalten:

$\overline{A} = C(T)$.

Damit ist auch die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus A_o mit rationalen Koeffizienten dicht in $C(T)$. Diese Menge ist aber mit A_o auch abzählbar. Also ist $C(T)$ separabel. □

Unsere nächsten Schlußfolgerungen sind nun die klassischen Weierstraß'schen Approximationssätze für stetige Funktionen (durch Polynome).

Folgerung 7.51 *(Approximationssatz von Weierstraß)*
Zu jeder Funktion aus $C([a,b])$ existiert eine Folge von Polynomen auf $[a,b]$, die gleichmäßig gegen diese Funktion konvergiert.

Beweis:
Es sei $A := \{$ Menge aller Polynome auf $[a,b]\}$. A ist eine Algebra, enthält die konstanten Funktionen und A trennt die Punkte von $[a,b]$ (wähle $p \in A$, $p(t) := t$, $\forall t \in [a,b]$). Also ist A nach Satz 7.49 dicht in $C([a,b])$. □

Bemerkung 7.52
Es existieren auch konstruktive Beweise für den Approximationssatz von Weierstraß. Einer basiert auf den sog. Bernstein-Polynomen, die für $x \in C([0,1])$ folgende Gestalt haben:

$$B_n(x;t) := \sum_{j=0}^{n} x(\frac{j}{n})\binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}, \quad \forall t \in [0,1], \forall n \in I\!N.$$

Man kann dann folgendes beweisen:

$$\sup_{t\in[0,1]} |x(t) - B_n(x;t)| \leq \frac{9}{4}\omega(x; n^{-\frac{1}{2}})$$

wobei $\omega(x;\delta) := \sup\{|x(t) - x(\tilde{t})| : t, \tilde{t} \in [0,1], |t - \tilde{t}| < \delta\}$ der sog. Stetigkeitsmodul von x in $[0,1]$ ist.
Da x auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gilt $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(x;\delta) = 0$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - B_n(x;\cdot)\| = 0$.
Jedoch ist ist die Konvergenz i.a. sehr langsam; man kann zeigen, daß sie

selbst im Fall, daß x beliebig oft differenzierbar ist, höchstens wie (cn^{-2}) ist. Deshalb haben die Bernstein-Polynome bisher selten (in letzter Zeit jedoch öfter) Anwendung gefunden. Jedoch sind sie einfach konstruierbar und konvergieren gleichmäßig gegen die gegebene Funktion $x \in C([0,1])$.
(Literatur: E. Isaacson/H.B. Keller, Analyse numerischer Verfahren, Edition Leipzig, 1972, Kap. 5.1)

Wir betrachten die Polynome $B_j^n(t) := \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$, $\forall t \in [0,1], j = 1, \ldots, n$.
$\rightsquigarrow$ B_j^n ist Polynom n-ten Grades, $B_j^n(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,1]$

$$\sum_{j=1}^{n} B_j^n(t) = (t + (1-t))^n = 1, \quad \forall t \in [0,1] \quad \textit{nach Satz 1.11}$$

$\rightsquigarrow$ Bezier-Polynome: $x(t) := \sum\limits_{j=1}^{n} b_j B_j^n(t), \quad \forall t \in [0,1]$,
wobei $b_j \in I\!R^2, j = 0, \ldots, n$ (Bezier-Knoten).
Wegen der Eigenschaften der B_j^n gilt: $x(t)$ liegt für jedes $t \in [0,1]$ in der kleinsten konvexen Menge in $I\!R^2$, die die Punkte $b_o, \ldots, b_n$ enthält (die kleinste konvexe Hülle der $b_o, \ldots, b_n$).
Die Bezier-Polynome sind einfach konstruierbar.
Anwendung: CAGD (Computer Aided Geometric Design)
(Literatur: J. Werner, Numerische Mathematik 1, Vieweg, 1992, Kap. 3.4)

Folgerung 7.53
Ist K eine kompakte Teilmenge von $I\!R^m$, so existiert zu jedem $x \in C(K)$ eine Folge von Polynomen auf K, die gleichmäßig (auf K) gegen x konvergiert

Beweis:
Wie in 7.51 ist die Menge der Polynome (auf K)

$$A := \{\sum_{j=0}^{n} a_j \prod_{i=1}^{m} t_i^{\alpha_{ij}} : \alpha_{ij} \in I\!N_o, a_j \in I\!R,$$
$$j = 0, \ldots, n, i = 1, \ldots, m, \, n \in I\!N\}$$

eine Algebra in $C(K)$, die die konstanten Funktionen enthält ($m = 0, a_{0j} = 0, i = 1, \ldots, n$) und die Punkte von K trennt. Letzteres sieht man wie folgt: Sind $t, \tilde{t} \in K$ mit $t \neq \tilde{t}$, so existiert $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $t_i \neq \tilde{t}_i$.
$\rightsquigarrow$ $p_i(t) := t_i$ ($m = 0, a_j = 1, a_{0j} = \begin{cases} 0 : i \neq j \\ 1 : i = j \end{cases}$) trennt die Punkte. Also folgt die Behauptung wieder aus Satz 7.49. $\square$

Wir kommen nun zur komplexen Version des Satzes von Stone/Weierstraß, über dessen Anwendung wir zur Approximation stetiger Funktionen durch trigonometrische Polynome gelangen.

Satz 7.54
Es sei (T,d) ein kompakter metrischer Raum, A sei eine Teilalgebra von $C(T,\mathbb{C})$, die die konstanten Funktionen enthält, die Punkte von T trennt und die Eigenschaft besitzt, daß mit jedem $x \in A$ auch die konjugiert-komplexe Funktion $\bar{x}$ zu A gehört.
Dann ist A dicht in $C(T,\mathbb{C})$.

<u>**Beweis:**</u>
Es sei A_R die Menge aller reellwertigen Funktionen aus A. A_R ist eine (reelle) Teilalgebra von $C(T)$, die die (reellen) konstanten Funktionen enthält. Für jedes $x \in A$ gilt ferner auch

$$\mathrm{Re}\, x := \frac{1}{2}(x+\bar{x}) \in A_R \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\, x := \frac{1}{2i}(x-\bar{x}) \in A_R.$$

Wir zeigen: A_R trennt die Punkte von T.
Seien $t, \tilde{t} \in T$ mit $t \neq \tilde{t}$. Nach Vor. existiert ein $x \in A$ mit $x(t) \neq x(\tilde{t})$. Deshalb gilt auch $\mathrm{Re}\, x(t) \neq \mathrm{Re}\, x(\tilde{t})$ oder $\mathrm{Im}\, x(t) \neq \mathrm{Im}\, x(\tilde{t})$, und A_R trennt die Punkte von T.
Nach Satz 7.49 ist A_R dicht in $C(T)$.
Es sei nun $x \in C(T,\mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existieren $y_1, y_2 \in A_R$, so daß $\|\mathrm{Re}\, x - y_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|\mathrm{Im}\, x - y_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
$\rightsquigarrow$ $y_1 + iy_2 \in A$ und $\|x - (y_1 + iy_2)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
$\rightsquigarrow$ A ist dicht in $C(T,\mathbb{C})$. $\square$

Folgerung 7.55
Es sei $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Dann existieren für alle $x \in C(S;\mathbb{C})$ und alle $\varepsilon > 0$, eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_o$ und komplexe Zahlen $c_k \in \{-n, \dots, n\}$, so daß $\quad \sup\limits_{z \in S} |x(z) - \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k| < \varepsilon.$

<u>**Beweis:**</u>
Die Menge $A := \{\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k,\ c_k \in \mathbb{C},\ k \in \{-n, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}_o\}$ ist eine Teilmenge von $C(S;\mathbb{C})$ und offenbar eine Algebra. A enthält auch die konstanten Funktionen (setze $n := 0$), und A trennt die Punkte von S (verwende $y(z) := z$, $\forall z \in S$).
Es sei $y \in A$. Dann hat die konjugiert-komplexe Funktion $\bar{y}$ die Gestalt

$$\begin{aligned}
\bar{y}(z) &= \overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k z^k} = \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k \bar{z}^k \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \bar{c}_k z^{-k}, \quad \text{da } \bar{z} = z^{-1},\ \forall z \in S \quad (\text{vgl. } 1.43 \text{ d})).
\end{aligned}$$

Also gilt auch $\bar{y} \in A$ und Satz 7.54 ist anwendbar (S ist kompakt in $\mathbb{C}$): A ist also dicht in $C(S;\mathbb{C})$. □

Definition 7.56
Eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt α-periodisch, falls $x(t+\alpha) = x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ $(\alpha > 0)$.
Eine Funktion $\tau \in C(\mathbb{R})$ heißt trigonometrisches Polynom (mit Periode $\alpha > 0$), falls $n \in \mathbb{N}_o$ und reelle Zahlen a_k, b_k, $k = 0, \ldots, n$, existieren, so daß

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos\frac{2k\pi t}{\alpha} + b_k \sin\frac{2k\pi t}{\alpha})\\ &= a_o + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos\frac{2k\pi t}{\alpha} + b_k \sin\frac{2k\pi t}{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Folgerung 7.57 *(trigonometrische Approximation)*
Zu jeder α-periodischen Funktion $x \in C(\mathbb{R})$ existiert eine Folge von trigonometrischen Polynomen (mit Periode $\alpha > 0$), die gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen x konvergiert.

Beweis:
Wie in 7.55 definieren wir $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, und wir betrachten $g : [0, \alpha] \to S$, $g(t) := \cos\frac{2\pi t}{\alpha} + i \sin\frac{2\pi t}{\alpha}$, $\forall t \in [0, \alpha[$. g ist stetig und bijektiv, $\rightsquigarrow g^{-1} : S \to [0, \alpha]$ ist ebenfalls stetig.
Wir betrachten zu gegebenem α-periodischen $x \in C(\mathbb{R})$ die Funktion $y := x \circ g^{-1} : S \to \mathbb{R}$.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. y ist stetig und es gilt: $y(g(t)) = x(t)$, $\forall t \in [0, \alpha]$. Nach Folgerung 7.55 existieren $n \in \mathbb{N}_o$ und komplexe Zahlen c_k, $k = -n, \ldots, n$, so daß

$$\begin{aligned}&(*) \sup_{t\in[0,\alpha[} |y(g(t)) - \sum_{k=-n}^{n} c_k g(t)^k| < \varepsilon \quad (z := g(t))\\ &\rightsquigarrow \sup_{t\in[0,\alpha[} |x(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \underbrace{(\cos\frac{2\pi t}{\alpha} + i\sin\frac{2\pi t}{\alpha})^k}_{=\cos\frac{2\pi kt}{\alpha} + i \sin\frac{2\pi kt}{\alpha}}\end{aligned}$$

Wir setzen nun $\beta_k := \operatorname{Re} c_k$, $\gamma_k := \operatorname{Im} c_k$, $k = -n, \ldots, n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-n}^{n} c_k(\cos\frac{2\pi kt}{\alpha} + i\sin\frac{2\pi kt}{\alpha})\\ &= \sum_{k=-n}^{n}[(\beta_k \cos\frac{2\pi kt}{\alpha} - \gamma_k \sin\frac{2\pi kt}{\alpha}) + i(\gamma_k \cos\frac{2\pi kt}{\alpha} + \beta_k \sin\frac{2\pi kt}{\alpha})].\end{aligned}$$

Da $x(\cdot) = y(g(\cdot))$ rellwertig ist, folgt deshalb aus $(*)$ sofort:

$$\sup_{t\in[0,\alpha[} |x(t) - \sum_{k=-n}^{n} (\beta_k \cos \frac{2\pi kt}{\alpha} - \gamma_k \sin \frac{2\pi kt}{\alpha})|$$

$$= \sup_{t\in[0,\alpha[} |x(t) - (\beta_0 + \sum_{k=1}^{n}((\beta_k + \beta_{-k}) \cos \frac{2\pi kt}{\alpha} + (\gamma_{-k} - \gamma_k) \sin \frac{2\pi kt}{\alpha}))| < \varepsilon$$

(da $\cos v = \cos(-v)$, $\sin(-v) = -\sin v$, $\forall v \in I\!R$).
Wir setzen nun $a_0 := \beta_0$, $b_0 := 0$, $a_k := \beta_k + \beta_{-k}$, $b_k := \gamma_{-k} - \gamma_k$, $k = 1, \ldots, n$, und erhalten $\sup\limits_{t\in[0,\alpha[} |x(t) - \tau(t)| < \varepsilon$ wobei $\tau(t) := a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos \frac{2\pi kt}{\alpha} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{\alpha})$, $\forall t \in I\!R$, d.h. τ ist trigonometrisches Polynom mit Periode α.
Wegen der α-Periodizität von x und τ gilt dann aber auch:

$$\sup_{t\in I\!R} |x(t) - \tau(t)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Bemerkung 7.58
Folg. 7.57 legt nun die Frage nahe, ob und welche α-periodischen Funktionen $x \in C(I\!R)$ sogar als trigonometrische Reihe darstellbar sind, d.h. wann die Reihenentwicklung

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{2\pi kt}{\alpha} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{\alpha}) \quad (t \in I\!R)$$

im Sinne der punktweisen oder gleichmäßigen Konvergenz gültig ist (wobei $a_n \in I\!R$, $n \in I\!N_o$, $b_n \in I\!R$, $n \in I\!N$, geeignet gewählt sind)? Die Antwort darauf ist schwieriger als Folg. 7.57 und wird im folgenden Kapitel gesucht.

7.5 Fourierreihen

Wir greifen hier die in Bem. 7.58 formulierte Fragestellung in einem zunächst allgemeineren Kontext auf, um später auch für die konkrete Frage aus allgemeinerer Sicht Antworten zu geben.

Definition 7.59
Ein linearer Raum X heißt unitär (oder: Euklidisch), falls eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to I\!R$ existiert mit den Eigenschaften

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \\ (ii) & \langle x + \tilde{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \tilde{x}, y \rangle \\ (iii) & \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \end{array}\right\} \quad \forall x, \tilde{x}, y \in X,\ \alpha \in I\!R.$$

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in X$, und $\langle x, x \rangle = 0$ gdw. $x = 0$.
Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt dann Skalarprodukt.

2 Elemente $x, y \in X$ heißen orthogonal, falls $\langle x, y\rangle = 0$.
Eine Menge $\{x_\lambda : \lambda \in L\} \subseteq X\backslash\{0\}$ heißt Orthogonalsystem, falls $\langle x_\lambda, x_\mu\rangle = 0$, $\forall\lambda, \mu \in L$, $\lambda \neq \mu$. Die Menge heißt Orthonormalsystem (ONS), falls überdies $\langle x_\lambda, x_\lambda\rangle = 1$, $\forall\lambda \in L$.

Lemma 7.60
Es sei X ein Euklidischer Raum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann ist $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, $\forall x \in X$, eine Norm auf X (die sog. "induzierte" Norm auf X), und es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

Beweis:
Völlig analog zu Satz 1.39 beweist man auch in diesem abstrakteren Fall die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, indem man von der Gleichung $0 \leq \langle\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha^2\|x\|^2 + 2\alpha\beta\langle x, y\rangle + \beta^2\|y\|^2$ für alle $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ausgeht.
Es gilt also wieder: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, $\forall x, y \in X$. Die Normeigenschaften folgen dann aus (iv) bzw. (iii) in 7.59, und die Dreiecksungleichung wie in Satz 1.40 aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung sowie der Identität

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in X. \qquad \square$$

Definition 7.61
Ein bezüglich der induzierten Norm vollständiger unitärer Raum heißt Hilbertraum.

Beispiele 7.62

a) *Der m-dimensionale Euklidische Raum $\mathbb{R}^m$ ist ein Hilbertraum.*

b) *$X := C([a, b])$, $\|x\| := \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$, und wir definieren*
   $\langle x, y\rangle := \int\limits_a^b x(t)y(t)dt$, $\forall x, y \in X$.
   Die Eigenschaften (i)-(iii) von 7.57 ergeben sich unmittelbar, (iv) folgt aus den Sätzen 6.14 und 6.17 a).
   Also ist X mit diesem Skalarprodukt unitär.
   Die induzierte Norm ist $\|x\| := (\int\limits_a^b x^2(t)dt)^{\frac{1}{2}}$, $\forall x \in X$.
   Es gilt: $\|x\|^2 \leq (b - a)\sup t \in [a, b]|x(t)|^2 \rightsquigarrow \|x\| \leq \sqrt{b - a}\|x\|_\infty(\star)$
   Beh.: $(X, \|\cdot\|)$ ist separabel
   Bew.: Nach Folg. 7.50 existiert eine abzählbare, bez. $\|\cdot\|_\infty$ dichte Teilmenge von X. Diese Teilmenge ist wegen $(\star)$ auch dicht bez. $\|\cdot\|$.

<u>*Beh.:*</u> $(X, \|\cdot\|)$ *ist* <u>*nicht*</u> *vollständig.*

<u>*Bew.:*</u> *Wir betrachten die Folge* $(x_n)_{n\geq 2}$ *(o.B.d.A.* $a = 0, b = 1$*)*
$n, m \in \mathbb{N}, m > n$*) mit*

$$x_n(t) = \begin{cases} 0: & t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}): & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < t \leq \frac{1}{2} \\ 1: & t > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\rightsquigarrow \|x_n - x_m\| = \int_0^1 (x_n(t) - x_m(t))^2 dt = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} (x_n(t) - x_m(t))^2 dt$$

$$\leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{n}$$

$\rightsquigarrow$ (x_n) *ist Cauchy-Folge in* X*, besitzt aber keinen Grenzwert in* X*.*

Im Raum $X := C([a, b])$ *ist die Menge* $\{1, \cos\frac{2\pi kt}{b-a}, \sin\frac{2\pi t}{b-a} : k \in \mathbb{N}\}$ *ein Orthogonalsystem.*

(Übung: Man beweise mit Hilfe der partiellen Integration die folgenden Formeln für trigonometrische Funktionen, aus denen die obige Aussage folgt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin lt \; dt = 0, \;\forall k, l \in \mathbb{N}_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos lt \; dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \sin lt \; dt = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \pi, & k = l \geq 1 \end{cases}$$

Satz 7.63

Es sei X *ein unitärer Raum (mit Skalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$*).*

a) Jedes Orthogonalsystem in X *ist linear unabhänig, d.h. jede endliche Teilmenge dieses Systems ist linear unabhängig.*

b) Ist $\{\psi_k : k \in \tilde{\mathbb{N}}\} \subseteq X$ *(*$\tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *höchstens abzählbar) linear unabhängig, so ist die Menge* $\{\varphi_k : k \in \tilde{\mathbb{N}}\}$ *definiert durch*

$$\varphi_1 := \psi_1, \; \varphi_n := \psi_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle\psi_n, \varphi_i\rangle}{\langle\varphi_i, \varphi_i\rangle}\varphi_i$$

($n \in \tilde{\mathbb{N}}$*) im Orthogonalsystem in* X*.*
("Schmidtsches Orthogonalisierungsprinzip")

c) Ist X *separabel, so ist jedes Orthogonalsystem in* X *höchstens abzählbar.*

d) Ist X *separabel, so existiert ein höchstens abzählbares Orthonormalsystem* $\{\varphi_k : k \in \tilde{\mathbb{N}}\}$ *in* X*, so daß* $\mathcal{L}(\{\varphi_k : k \in \tilde{\mathbb{N}}\})$ *dicht in* X *ist.*

Beweis:

a) Es sei $\{\varphi_\lambda : \lambda \in L\}$ ein Orthogonalsystem in X und wir betrachten für ein beliebiges $n \in I\!N$ und beliebige $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ die Relation

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{\lambda_i} = \Theta.$$

$\rightsquigarrow$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $\langle \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \varphi_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i} \rangle = 0 = a_j \langle \varphi_{\lambda_j}, \varphi_{\lambda_j} \rangle$
$\rightsquigarrow$ $a_j = 0$, da $\varphi_{\lambda_j} \neq \Theta$.

b) Es sei $\{\psi_k : k \in \tilde{I\!N}\}$ ($\tilde{I\!N}$ höchstens abzählbar) linear unabhängig. Wir zeigen induktiv für die oben definierte Menge $\{\varphi_k : k \in \tilde{I\!N}\}$, daß $\varphi_n \neq \Theta$, $\langle \varphi_n, \varphi_i \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, für jedes $n \in \tilde{I\!N}$.
Für $n = 1$ ist dies richtig; es sei nun auch für $n-1$ richtig.
Aus $\varphi_n = \Theta$ würde
$\psi_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \psi_n, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \varphi_i \in \mathcal{L}(\{\varphi_i, \ldots, \varphi_{n-1}\}) = \mathcal{L}(\{\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}\})$ folgen, d.h. $\psi_1, \ldots, \psi_n$ wären linear abhängig $\rightsquigarrow$ Widerspruch!
Ferner gilt:

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n, \varphi_j \rangle &= \langle \psi_n, \varphi_j \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \psi_n, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \\ &= \langle \psi_n, \varphi_j \rangle - \frac{\langle \psi_n, \varphi_j \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle} \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n-1.\end{aligned}$$

c) Es sei X separabel und $\{\varphi_\lambda : \lambda \in L\}$ sei ein Orthogonalsystem in X.
Wir zeigen: L ist höchstens abzählbar.
Wir definieren $\tilde{\varphi}_\lambda := \frac{\varphi_\lambda}{\|\varphi_\lambda\|}$, $\forall \lambda \in L$, und haben ein ONS $\{\tilde{\varphi}_\lambda : \lambda \in L\}$.

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow \|\tilde{\varphi}_\lambda - \tilde{\varphi}_\mu\|^2 &= \langle \tilde{\varphi}_\lambda - \tilde{\varphi}_\mu, \tilde{\varphi}_\lambda - \tilde{\varphi}_\mu \rangle \\ &= \|\tilde{\varphi}_\lambda\|^2 - \underbrace{2\langle \tilde{\varphi}_\lambda, \tilde{\varphi}_\mu \rangle}_{=0} + \|\tilde{\varphi}_\mu\|^2 = 2, \quad \forall \lambda, \mu \in L.\end{aligned}$$

Wir betrachten die Kugeln $\bar{B}(\tilde{\varphi}_\lambda, \frac{1}{2})$, $\forall \lambda \in L$.
$\rightsquigarrow$ wäre L nicht höchstens abzählbar, so hätten wir überabzählbar viele Kugeln in X, die alle paarweise disjunkt sind. Da X separabel ist, muß aber in jeder dieser Kugeln mindestens ein Element der abzählbaren dichten Teilmenge liegen. Widerspruch! zu L überabzählbar.
$\rightsquigarrow$ L ist höchstens abzählbar.

d) z.z.: es existiert ein ONS $\{\varphi_k : k \in \tilde{I\!N}\}(\tilde{I\!N} \subseteq I\!N)$ mit $\mathcal{L}(\{\varphi_k : k \in \tilde{I\!N}\})$ ist dicht in X.

Da X separabel ist, existiert eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge $\{\psi_i : i \in \tilde{I\!N}\}, (\tilde{I\!N} \subseteq I\!N)$ von X.
Wir "mustern" diese Menge sukzessive durch und behalten nur die Teilmenge $\{\psi_i : i \in \tilde{\tilde{I\!N}}\}$, die linear unabhängig ist. Danach wenden wir das Schmidt'sche Orthogonalisierungsprinzip an und "normalisieren" die Elemente. Wir erhalten das ONS $\{\varphi_n : n \in \tilde{\tilde{I\!N}}\}$.
Es gilt: $\mathcal{L}(\{\varphi_n : n \in \tilde{\tilde{I\!N}}\}) = \mathcal{L}(\{\psi_i : i \in \tilde{I\!N}\}) \supseteq \{\psi_i : i \in \tilde{I\!N}\}$.
$\rightsquigarrow \mathcal{L}(\{\varphi_n : n \in \tilde{\tilde{I\!N}}\})$ ist dicht in X.

Definition 7.64
Es sei $\{\varphi_k : k \in I\!N\}$ ein Orthonormalsystem im (unendlichdimensionalen) unitären Raum X mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$ <u>Fourierreihe</u> von $x \in X$, und die Koeffizienten $\langle x, \varphi_k \rangle, k \in I\!N$ heißen <u>Fourierkoeffizienten</u> von x bez. des ONS $\{\varphi_k : k \in I\!N\}$.

Satz 7.65
Es sei $\{\varphi_k : k \in I\!N\}$ ein Orthonormalsystem im unitären Raum X mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

a) $\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k\| \leq \|x - y\|, \forall x \in X, \forall y \in \mathcal{L}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}), \forall n \in I\!N$,
die Gleichheit gilt gdw. $y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$,

b) *Für alle $x \in X$ und für alle $n \in I\!N$ ist $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$ orthogonal zu jedem Element aus $L = \mathcal{L}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\})$,*

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle^2 \leq \|x\|^2, \forall x \in X$, *("Besselsche Ungleichung")*

d) *Ist X Hilbertraum, so ist jede Fourierreihe konvergent,*

e) $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$ *gdw.* $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k \rangle^2$ *("Parsevalsche Gleichung")*

<u>**Beweis:**</u>

a) Sei $x \in X$, $n \in I\!N$ beliebig, sei $y = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \in \mathcal{L}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\})$ beliebig gewählt.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \|x-y\|^2 &= \|x-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k\|^2 = \langle x-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k, x-\sum_{l=1}^n a_l\varphi_l\rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\langle\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k, x\rangle + \langle\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k, \sum_{l=1}^n a_l\varphi_l\rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^n a_k\langle\varphi_k, x\rangle + \sum_{k,l=1}^n a_k a_l \underbrace{\langle\varphi_k,\varphi_l\rangle}_{\substack{=0, k\neq l \\ =1, k=l}} \\
&= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^n a_k\langle\varphi_k, x\rangle + \sum_{k=1}^n a_k^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n\langle\varphi_k, x\rangle^2 + \sum_{k=1}^n (a_k - \langle\varphi_k, x\rangle)^2 \\
&\geq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n\langle\varphi_k, x\rangle = \|x-\sum_{k=1}^n\langle\varphi_k, x\rangle\varphi_k\|^2
\end{aligned}$$

"$=$" gilt, gdw. $a_k = \langle\varphi_k, x\rangle, \quad \forall k = 1,\ldots,n$

b) Sei $x \in X$, $n \in I\!N$ beliebig.

$\rightsquigarrow z := x - \sum\limits_{k=1}^n \langle\varphi_k, x\rangle\varphi_k$ hat die Eigenschaft:

$\forall y \in L$ d.h. $y = \sum\limits_{k=1}^n a_k\varphi_k$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle z, y\rangle &= \langle x-\sum_{k=1}^n\langle x,\varphi_k\rangle\varphi_k, \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n a_k\langle x\varphi_k\rangle - \sum_{k,l=1}^n a_l\langle x,\varphi_k\rangle\langle\varphi_k,\varphi_l\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n a_k\langle x\varphi_k\rangle - \sum_{k=1}^n a_k\langle x\varphi_k\rangle = 0
\end{aligned}$$

c) Aus a) folgt $\forall x \in X$:$(\star)$ $\|x-\sum\limits_{k=1}^n\langle x,\varphi_k\rangle\varphi_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^n\langle x,\varphi_k\rangle^2 \geq 0$.

$\rightsquigarrow \sum\limits_{k=1}^n\langle x,\varphi_k\rangle^2 \leq \|x\|^2 \rightsquigarrow (\sum\limits_{k=1}^n\langle x,\varphi_k\rangle^2)_{n\in I\!N}$ ist monoton wachsend und beschränkt, d.h. nach 3.3 konvergent.

$\rightsquigarrow \sum\limits_{k=1}^\infty\langle x,\varphi_k\rangle^2 \leq \|x\|^2$ (Majorantenkriterium).

d) X sei Hilbertraum und $x \in X$ beliebig. Wir betrachten $s_n := \sum\limits_{k=1}^n\langle x,\varphi_k\rangle\varphi_k$, $n \in I\!N$ (Partialsummen der Fourierreihe in X).

z.z.: (s_n) ist Fundamentalfolge.
Seien $m, n \in \mathbb{N}, m > n$.

$$\rightsquigarrow \|S_m - s_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k\|^2 = \sum_{k,l=n+1}^{m} \langle x, \varphi_k\rangle\langle x, \varphi_l\rangle\langle \varphi_k, \varphi_l\rangle$$
$$= \sum_{k=n+1}^{m} \langle x, \varphi_k\rangle^2$$

$\rightsquigarrow$ Besselsche Ungleichung impliziert: (s_n) ist Fundamentalfolge.

e) Wir zeigen zuerst: $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \to \mathbb{R}$ ist stetig.
Bew.: Seien $x, y \in X, (x_n), (y_n)$ Folgen in X mit $x_n \to x$, $y_n \to y$.
z.z.: $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

$$\rightsquigarrow |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \le |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle$$
$$= |\langle x - x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y - y_n\rangle|$$
$$\le \|x - x_n\|\|y\| + \|x_n\|\|y - y_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$(\Longrightarrow)$ Es gelte $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k$.
$\rightsquigarrow \langle x, x\rangle = \|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k\rangle^2$

$(\Longleftarrow)$ Es gelte $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \varphi_k\rangle^2$. Nach $(\star)$ folgt für $n \to \infty$:
$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} (\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k\rangle^2) = 0$
$\rightsquigarrow$ die Fourierreihe von $x \in X$ konvergiert gegen $x \in X$

Bemerkung 7.66
Satz 7.65 a) besagt: $\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k\| = d(x, L)$, $L = \mathcal{L}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.
In 7.15 hatten wir (allgemeiner in normierten Räumen) gezeigt, daß für jedes $x \in X$ *ein* $x_* \in L$ *existiert, so daß* $\|x - x_*\| = d(x, L)$. *7.65 a) besagt, daß* x_* *hier eindeutig bestimmt ist und gibt auch eine Formel für* x_**! Außerdem sagt 7.65 b), daß* $x - x_* = x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k$ *orthogonal zu* L *ist. Deswegen heißt die Abbildung* $P : X \to L, Px = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k$, $\forall x \in X$ *orthogonale Projektion von* X *auf* L. *Es gilt natürlich* $Px = x$, $\forall x \in L$.
Eigenschaften von P*:* $\|x - Px\| = d(x, L), \langle x - Px, y\rangle = 0 \quad \forall x \in X, \forall y \in L$.

Wir betrachten jetzt wieder den Raum $X := C([-\pi, \pi])$ mit dem Skalarprodukt $\langle x, y\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt, \forall x, y \in X$ und der Norm $\|x\| := (\int_{-\pi}^{\pi} (x(t))^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ (vgl. 7.62).
Wir betrachten in X das ONS $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt\}_{k\in\mathbb{N}}$ (vgl. 7.62 b))

(Die Koeffizienten normieren die Elemente.)
Bezeichnug: $\varphi_o(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi_{2k-1}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt, \varphi_{2k} := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt$, $\forall n \in I\!N$.
$\rightsquigarrow$ Fourierreihe von $x \in X$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, \varphi_k\rangle\varphi_k &= \langle x, \varphi_o\rangle\varphi_o + \sum_{k=1}^{\infty}(\langle x, \varphi_{2k-1}\rangle\varphi_{2k-1} + \langle x, \varphi_{2k}\rangle\varphi_{2k}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos ktdt}_{=:a_n}\,\varphi_{2k-1} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin ktdt}_{=:b_n}\,\varphi_{2k})\end{aligned}$$

($a_k, b_k : k \in I\!N_o$ heißen <u>trigonometrische Fourierkoeffizienten</u>).
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x, \varphi_k\rangle\varphi_k = \frac{a_o}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)$ ("Trigonometrische Fourierreihe")
$(a_k := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos ktdt = \frac{1}{\pi}\langle x, \varphi_{2k-1}\rangle, b_k := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin ktdt = \frac{1}{\pi}\langle x, \varphi_{2k}\rangle)$
(Fourierkoeffizienten).

$X := C([-\pi, \pi]), \langle x, y\rangle := \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt, \|x\| = (\int\limits_{-\pi}^{\pi}(x(t))^2dt)^{\frac{1}{2}}$ ist kein Hilbertraum!

Folgerung 7.67

a) *Ist $x \in C([-\pi, \pi])$ beliebig und s_n die n-te Partialsumme der trigonometrischen Fourierreihe von x. dann gilt:*

$$\|x - s_n\| \leq \|x - \tau_n\|$$

$\forall$ trigonometrische Polynome $\tau_n \in \mathcal{L}(\{\varphi_o, \varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}, k = 1, \ldots, n\})$.

b) $\frac{1}{2\pi}a_o^2 + \frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \|x\|^2$ *("Besselsche Ungleichung")*

<u>**Beweis:**</u>

a) folgt aus Satz 7.65 a)

b) 7.65 c) sagt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x, \varphi_k\rangle^2 \leq \|x\|^2$.

In unserem Fall: $\langle x, \varphi_o\rangle^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\langle x, \varphi_{2k-1}\rangle^2 + \langle x, \varphi_{2k}\rangle^2)$.
Die Aussage folgt also aus der Gestalt der trigonometrischen Fourierkoeffizienten. □

Satz 7.68
Für jedes $x \in X := C([-\pi,\pi])$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (x(t) - (\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)))^2 dt = 0,$$

wobei $a_k, b_k, k \in I\!N_o$, die trigonometrischen Fourierkoeffizienten zu x sind, d.h. die Fourierreihe von x konvergiert im Sinne der Norm in X ("im quadratischen Mittel").

<u>Beweis:</u>
Ziel ist die Anwendung von Folg. 7.57 (aus dem Satz von Stone/Weierstraß).
Sei $x \in C([-\pi,\pi])$ beliebig, $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Es genügt zu zeigen: $\exists n \in I\!N, \exists$ trigonometrisches Polynom
$\tau_n \in \mathcal{L}(\{\varphi_o, \varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}, k = 1,\dots,n\})$ so, daß $\|x - \tau_n\| < \varepsilon$.
Denn daraus folgt nach 7.67 a): $\|x - s_n\| \le \|x - \tau_n\| < \varepsilon$, wobei s_n die n-te Partialsumme der Fourierreihe ist.
Ferner gilt für $m > n$: $\|x - s_n\|^2 = \|(x - s_m) + (s_m - s_n)\|^2 = \|x - s_m\|^2 + 2\underbrace{\langle x - s_m, s_m - s_n\rangle}_{=0\ (7.65\ b))} + \|s_n - s_m\|^2$.
$\rightsquigarrow \|x - s_m\| \le \|x - s_n\| \rightsquigarrow \|x - s_m\| < \varepsilon, \quad \forall m \ge n.$
Wir zeigen jetzt die Existenz von τ_n mit Hilfe von 7.57.
Problem: x ist nicht 2π-periodisch (es gilt i.a. nicht: $x(-\pi) = x(\pi)$).
$\rightsquigarrow$ x ist nicht stetig und 2π-periodisch auf $I\!R$ fortsetzbar.
Wir betrachten deshalb für jedes $m \in I\!N$ die folgende Funktion:

$$\tilde{x}_m(t) := \begin{cases} x(t) & ,\forall t \in [-\pi, \pi - \frac{1}{m}] \\ x(-\pi) + m(\pi - t)(x(\pi - \frac{1}{m}) - x(-\pi)) & ,\forall t \in]\pi - \frac{1}{m}, \pi] \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \tilde{x}_m \in X$, $\forall m \in I\!N$ und $\tilde{x}_m$ ist 2π-periodisch und stetig auf $I\!R$ fortsetzbar.
Es gilt:

$$\begin{aligned}\|x - \tilde{x}_m\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (x(t) - \tilde{x}_m(t))^2 dt = \int_{\pi - \frac{1}{m}}^{\pi} (x(t) - \tilde{x}_m(t))^2 dt \\ &\le \frac{1}{m}(\sup_{t \in [\pi - \frac{1}{m}, pi]} |x(t) - \tilde{x}_m(t)|)^2 \le \frac{4}{m}\|x\|_\infty^2\end{aligned}$$

wegen: $|x(t) - \tilde{x}_m(t)| \le |x(t)| + |\tilde{x}_m(t)| \le \|x\|_\infty + \|x\|_\infty = 2\|x\|_\infty$.
$\tilde{x}_m(t) = (1 - m(\pi - t))x(-\pi) + m(\pi - t)x(\pi - \frac{1}{m})$, $\forall t \in [\pi - \frac{1}{m}, \pi]$
$\rightsquigarrow |\tilde{x}_m(t)| \le (1 - m(\pi - t))|x(-\pi)| + m(\pi - t)|x(\pi - \frac{1}{m})| \le \|x\|_\infty$.
$\rightsquigarrow \|x - \tilde{x}_m\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (Konvergenz in dieser Norm, obwohl nicht punktweise Konvergent)
Wir wählen jetzt $m \in I\!N$ so, daß für $\tilde{x} = \tilde{x}_m$ gilt: $\|x - \tilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\tilde{x}$ bezeichne jetzt auch die stetig fortgesetzte auf $I\!R$ 2π-periodische Funktion. Nach Folgerung 7.57 existiert ein trigonometrisches Polynom $\tau_n \in \mathcal{L}(\{\varphi_o, \varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}, k = 1, \ldots, n\})$ so, daß $\sup\limits_{t \in I\!R} |\tilde{x}(t) - \tau_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \|x - \tau_n\| < \|x - \tilde{x}\| + \|\tilde{x} - \tau_n\| &< \frac{\varepsilon}{2} + \Big(\int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{x}(t) - \tau_n(t))^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + [2\pi(\sup_{t \in [-\pi,\pi]} |\tilde{x}(t) - \tau_n(t)|)^2]^{\frac{1}{2}} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + [2\pi(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}})^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ (s_n) konvergiert in X gegen x. $\square$

Bemerkung 7.69
Satz 7.68 bleibt richtig für Funktionen, die auf $[-\pi, \pi]$ (nur) Riemann-integrierbar sind.
Die punktweise (oder gar gleichmäßige) Konvergenz von Fourierreihen folgt aus Satz 7.68 i.a. <u>nicht</u>! Ursache: aus der Konvergenz im Sinne von $\|\cdot\|$ folgt i.a. nicht die punktweise Konvergenz (vgl. die im Beweis von 7.68 konstruierte Funktion $\tilde{x}_m$).
Die Konvergenztheorie von Fourierreihen in Richtung punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz erfordert einen substantiell anderen Zugang (vgl. Heuser Bd. 1, Kap. 135-137).
Klar ist dabei folgendes:
Konvergiert die Fourierreihe von x, d.h. $\frac{a_o}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ punktweise gegen x auf $[-\pi, \pi]$, so konvergiert sie auch punktweise auf $I\!R$, und zwar gegen eine 2π-periodische Funktion, deren Einschränkung auf $[-\pi, \pi]$ gerade x ist. Deswegen kümmert man sich stets gleich um die punktweise Konvergenz in $I\!R$ gegen eine 2π-periodische Funktion $x : I\!R \to I\!R$.

Satz 7.70 *Es sei $x : I\!R \to I\!R$ 2π-periodisch, und x lasse sich auf $[-\pi, \pi]$ als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellen.*
Dann konvergiert die Fourierreihe von x $\forall t \in I\!R$ punktweise gegen

$$s(t) := \frac{1}{2}(x(t+) + x(t-)).$$

Ist x stetig in t, so konvergiert sie gegen $x(t)$. Ist $x \in C(I\!R)$, so ist die trigonometrische Fourierreihe (auf $I\!R$) gleichmäßig konvergent gegen x.

<u>**Beweis:**</u>
vgl. Heuser Bd. 2, Kap. 135-137

Beispiele 7.71

a) *$x(t) := t^2$, $\forall t \in [-\pi, \pi]$, 2π-periodisch fortgesetzt auf $I\!R$.*

$$a_o := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi}\frac{t^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos kt dt = \underbrace{\frac{1}{\pi}[t^2\frac{\sin kt}{k}]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin kt dt$$

$$= -\frac{2}{k\pi}([-t\frac{\cos kt}{k}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt dt)$$

$$= \frac{4}{k^2\pi}\pi\cos k\pi + \underbrace{\frac{2}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt dt}_{=0} = \frac{4}{k^2}(-1)^k$$

$$b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin kt dt = 0 \quad \textit{(analog!)}$$

$\rightsquigarrow$ *Fourierreihe von x:* $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kt$.
Satz 7.70 $\rightsquigarrow t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kt$, $\forall t \in [-\pi, \pi]$, *und die Konvergenz ist gleichmäßig.*
Spezialfälle: $t = 0$, $t = \pi$:

$$t = 0 : 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{k^2} \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$t = \pi : \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

b) *$x(t) := |t|$, $\forall t \in [-\pi, \pi]$, und 2π-periodisch fortgesetzt.*
Anwendung von 7.70 liefert die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe

$$x(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2}, \quad \forall t \in I\!R \quad \textit{(Übung)}$$

8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1 Aufgabenstellung und Beispiele

Differentialgleichung (DGL): Gleichung, für eine (gesuchte) Funktion, wobei in der Gleichung die Funktion selbst und einige ihrer Ableitungen auftreten.

Man unterscheidet gewöhnliche DGLen (die gesuchte Funktion hängt von einer reellen Variablen ab) und partielle DGLen (die gesuchte Funktion hängt von mehreren reellen Variablen ab, und es treten also partielle Ableitungen in der Gleichung auf).

allgemeine Form einer gewöhnlichen DGL:

$$(\star) \qquad F(x^{(k)}(t), x^{(k-1)}(t), \ldots, x'(t), x(t), t) = 0, \quad \forall t \in I,$$

wobei $F : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m}_{k+1} \times I \to \mathbb{R}^m$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall.

Gesucht: $x : I \to \mathbb{R}^m$ so, daß x k-mal differenzierbar auf I ist und die Gleichung $(\star)$ erfüllt.

Bemerkung 8.1

Die Gleichung $(\star)$ kann stets in eine DGL äquivalent umgeformt werden, die nur Ableitungen erster Ordnung enthält.

Idee: Man setze $x_i(t) := x^{(i-1)}(t), i = 1, \ldots, k,\ t \in I$, und betrachte die folgenden Gleichungen:

$$x_i'(t) = x_{i+1}(t),\ i = 1, \ldots, k-1,\ \forall t \in I.$$

$$\begin{array}{lrcll}
\rightsquigarrow & F(x_k'(t), x_k(t), x_{k-1}(t), \ldots, x_1(t), t) & = & 0 & \textit{entsteht aus } (\star) \\
(+) & x_{k-1}'(t) - x_k(t) & = & 0 & \\
 & & \vdots & & \\
 & x_1'(t) - x_2(t) & = & 0, & \forall t \in I.
\end{array}$$

Dies ist eine DGL für die Funktion $(x_1(\cdot), \ldots, x_k(\cdot)) : I \to \mathbb{R}^{mk}$. Die Äquivalenz von $(\star)$ und $(+)$ bedeutet also folgendes: Für jede Lösung x von $(\star)$ ist $(x(\cdot), x'(\cdot), \ldots, x^{(k-1)}(\cdot))$ Lösung von $(+)$, und für jede Lösung $(x_1(\cdot), \ldots, x_k(\cdot))$ von $(+)$ ist $x(\cdot) := x_1(\cdot)$ Lösung von $(\star)$.
Allerdings erhöht sich beim Übergang von $(\star)$ zu $(+)$ die Dimension des Wertebereichs der gesuchten Funktion von m auf mk.

$\rightsquigarrow$ *Standardform für gewöhnliche DGLen:*

$$(0) \qquad F(x'(t), x(t), t) = 0, \quad \forall t \in I$$

Bemerkung 8.2
(0) *heißt (implizite) DGL (bzw. DGL-System, falls $m, n > 1$) 1. Ordnung.*
(0) *heißt explizit, wenn man* (0) *in der Form*

$$x'(t) = f(x(t), t), \quad \forall t \in I$$

schreiben kann, wobei $f : I\!R^m \times I \to I\!R^m$.
In allen anderen Fällen heißt (0) *implizit.*
(0) *heißt linear, wenn* $F(y, x, t) = A(t)y + B(t)x + c(t)$, $\forall x, y \in I\!R^m, \forall t \in I$, *wobei* $A(t), B(t)$ *Matrizen geeigneter Dimension sind:*
$A(t), B(t) \in L(I\!R^m, I\!R^n), c(t) \in I\!R^m$, $\forall t \in I$.

Wir befassen uns in diesem Kapitel mit expliziten (gewöhnlichen) DGLen 1. Ordnung, d.h. der Form

$$(1) \qquad x'(t) = f(x(t), t), \quad \forall t \in I,$$

wobei $f : I\!R^m \times I \to I\!R^m$.

Definition 8.3
Eine Funktion $x : I \to I\!R^m$ *heißt Lösung von* (1)*, falls* x *differenzierbar ist auf* I *(d.h. einseitige Ableitungen in eventuellen Randpunkten sollen auch existieren), und* $x'(t) = f(x(t), t)$, $\forall t \in I$.

Bemerkung 8.4
Mit Definition 8.3 kann keine Eindeutigkeit einer Lösung von (1) *erwartet werden (z.B.* $f \equiv 0$*, d.h. unendlich viele Lösungen!). Deshalb benötigt man weitere Bedinungen an* x*, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Diese Bedingungen ergeben sich meist bei der Modellierung realer Prozesse "kanonisch", z.B.*

- *Anfangsbedingung:* $x(t_o) = x_o$, $t_o \in I, x_o \in I\!R^m$ *("Anfangswert") vorgegeben*
- *Randbedingung (auf* $I := [a, b]$*):* $r(x(a), x(b)) = 0, r : I\!R^m \times I\!R^m \to I\!R^m$
  Bsp.: $x(a) = x(b)$ *(periodische Lösung)*

Wir kommen nun zu Beispielen von gewöhnlichen DGLen 1. Ordnung.
Literatur: Martin Braun, Differentialgleichungen und ihre Anwendungen, Springer Verlag, 2. Auflage 1991

Beispiele 8.5

a) *Populationsdynamik (siehe Kap. 0 Einleitung, Braun Kap. 1.5)*

$p : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ zeitlicher Verlauf einer Population einer gegebenen biologischen Art.

DGL: $p'(t) = ap(t) - bp(t)^2, \quad \forall t \in [0, +\infty[$, wobei

$p'(t)$ – Populationsgeschwindigkeit,

$ap(t)$ – Wachstum proportional zur Population,

$bp(t)^2$ – Konkurrenz-/ Konfliktterm.

Später wird gezeigt, daß diese Gleichung der Populationsdynamik genau eine Lösung besitzt. Dazu wird aber ein theoretischer Vorlauf benötigt.

Lösung: $p(t) = \frac{ap(t_o)}{bp(t_o)+(a-bp(t_o))\exp(-a(t-t_o))}, \quad \forall t \in I, t_o \in I$ fest. (In der Regel gilt: $a \gg b > 0$.)

Präziser: Dies ist Lösung der DGL mit Anfangswert $p(t_o)$.

Nachprüfen, ob dies Lösung ist:

$$p'(t) = \frac{p(t_o)}{-\frac{b}{a}p(t_o) - (a - bp(t_o))\exp(-a(t - t_o))}$$

Man kann zeigen: $p'(t) = ap(t) - bp(t)^2$.

Aus der Lösungsgestalt folgt: $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \frac{a}{b}$ (Limes existiert).

Für $I = \mathbb{R}$ gilt auch: $\lim\limits_{t\to-\infty} p(t) = 0$.

Weiterhin ist $p(\cdot)$ monoton wachsend, d.h. es gilt: $0 \le p(t) \le \frac{a}{b}$ (bzw. $p'(t) \ge 0, \forall t \in I$).

$$\text{Ferner gilt: } p''(t) = ap'(t) - 2bp(t)p'(t) = (a - 2bp(t))p'(t)$$
$$= (a - 2bp(t))p(t)(a - bp(t))$$

$\rightsquigarrow p''(t) = 0$ gdw. $p(t) = \frac{a}{2b}$.

Bsp.: menschliche Population: $a = 0.029$, $b = 2.941 \cdot 10^{-12}$

$p(2000) = 5.74 \cdot 10^9$, $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \frac{a}{b} = 9.86 \cdot 10^9$.

b) *Räuber-Beute-Modell (Braun, Kap. 4.9)*

"Warum kam es während des ersten Weltkrieges prozentual zu einem dramatischen Anstieg der Anzahl der Haie im Mittelmeer?"

$x(t)$ – Beutepopulation,

$y(t)$ – Räuberpopulation (zum Zeitpunkt t).

$$\rightsquigarrow x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \quad \text{, wobei}$$

$x'(t)$ – Populationsgeschwindigkeit,

$ax(t)$ – Wachstum proportional zur Population,

$bx(t)y(t)$ – Konfliktterm: proportional zu Kontakten von Räubern und Beute.

$$\rightsquigarrow y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \quad \text{, wobei}$$

$-cy(t)$ – natürliche Sterberate,
$dx(t)y(t)$ – Wachstum proportional zu $y(t)$ und zum Futtervorrat $x(t)$.

Man kann zeigen:
Bei vorgegebenen positiven Anfangswerten $x(0), y(0)$ sind $x(\cdot), y(\cdot)$ periodische Funktionen, d.h. es existiert ein $T < 0$ so, daß $x(\cdot), y(\cdot)$ T-periodische Funktionen sind.
$\rightsquigarrow$ *Mittelwerte von $x(\cdot), y(\cdot)$:*

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\,dt, \quad \bar{y} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T y(t)\,dt$$

Man kann ebenfalls zeigen: $\bar{x} = \frac{c}{d}, \quad \bar{y} = \frac{a}{b}$.
Einbeziehung des Fischfangs ("angemessener" Fischfang: $\varepsilon < a$):

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow x'(t) &= (a-\varepsilon)x(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) &= -(c+\varepsilon)y(t) + dx(t)y(t) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ *Mittelwerte $\bar{x} = \frac{c+\varepsilon}{d}, \bar{y} = \frac{a-\varepsilon}{b}$.*
$\rightsquigarrow$ *bei Zurückgang des Fischfangs wächst der Mittelwert der Räuberpopulation; bzw. ein angemessener Fischfang führt zu einer Erhöhung der Beutepopulation.*

c) *Reaktionskinetik*
A, B seien chemische Stoffe, die miteinander reagieren.
Wir setzen voraus, daß je ein Molekül von A mit einem von B reagiert.
$x(t)$ – Anzahl der Mole (Stoffmenge) von A(bzw. B), die reagiert hat,
t_o – Startpunkt der Reaktion, d.h. $x(t_o) = 0$,
a, b – die Stoffmengen von A, B zum Zeitpunkt t_o ($b > a$),
$a - x(t)$ – Stoffmenge von A zum Zeitpunkt t,
$b - x(t)$ – Stoffmenge von B zum Zeitpunkt t,
$x'(t)$ – Reaktionsgeschwindigkeit.
Chemisches Gesetz: Die Reaktionsgeschwindigkeit ist proportional zum Produkt der Anzahl der Mole beider Stoffe, d.h. $\exists k \in \mathbb{R}$:

$$x'(t) = k(a - x(t))(b - x(t)), \quad t \in [t_o, +\infty[, \; x(t_o) = 0$$

Bestimmung der Lösung: Wir betrachten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\ln\frac{a-x(t)}{b-x(t)}) &= \frac{b-x(t)}{a-x(t)} \cdot \frac{-x'(t)(b-x(t)) + (a-x(t))x'(t)}{(b-x(t))^2} \\ &= \frac{x'(t)(a-x(t)-(b-x(t)))}{(a-x(t))(b-x(t))} \\ &= \frac{(a-b)x'(t)}{(a-x(t))(b-x(t))} = k(a-b) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \ln \frac{a-x(t))}{b-x(t))} = k(a-b)(t-t_o) + \alpha, \quad \forall t \in [t_o, +\infty[$
$t = t_o : \ln \frac{a}{b} = \alpha \rightsquigarrow \frac{a}{b} = \exp(\alpha)$
$\rightsquigarrow \frac{a-x(t)}{b-x(t)} = \frac{a}{b} \exp(k(a-b)(t-t_o))$
Auflösung nach $x(t)$:

$$x(t) = ab\frac{\exp(k(a-b)(t-t_o)) - 1}{a\exp(k(a-b)(t-t_o)) - b}, \quad \forall t \in [t_o, +\infty[$$

d) *Netzwerkanalyse (Elektronik)*
Zweige und Knoten in einem elektr. Netzwerk:
U_{ab} bzw. I_{ab} – gerichtete Spannung bzw. Strom zwischen den Knoten a und b.
$U_{ab} = -U_{ba}, I_{ab} = -I_{ba}$.
In jedem Zweig sei genau ein "Bauelement" (Widerstand, Induktivität, Kapazität, Quelle).

Ohmsche Gesetze: $U_{ab} = RI_{ab} \quad (U_{ab}(t), I_{ab}(t))$
$U_{ab} = L\dot{I}_{ab}$
$I_{ab} = C\dot{U}_{ab}$
$U_{ab} = U$

Kirchhoffsche Gesetze: *1. Knotenregel:* $\sum\limits_{j=1}^{n} I_{a_j b} = 0,$

2. Maschenregel: $\sum\limits_{j=1}^{n-1} U_{a_j a_{j-1}} + U_{a_n a_1} = 0.$

Netzwerkanalyse: Bestimmung von bestimmten Strömen und Spannungen in gewissen Zweigen, d.h. an gewissen Baulelementen.
Methode: Aufstellen von DGlen für die Ströme in den Zweigen (aus den Kirchhoffschen und Ohmschen Gesetzen).
Bsp.(elektr. Schwingkreis): Ziel: DGL für $I = I_{ab}$ aufstellen.

Knotenregel: a: $I_{ba} + I_{dc} = 0$
b: $I_{cb} + I_{ab} = 0$
c: $I_{bc} + I_{dc} = 0$
d: $I_{cd} + I_{ad} = 0$

Maschenregel: $U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} = 0$
$\dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bc} + \dot{U}_{cd} + \dot{U}_{da} = 0$

Ohmsche Gesetze: $U_{ab} = L\dot{I}_{ab}$
$U_{bc} = RI_{bc}$
$C\dot{U}_{cd} = I_{cd}$
$U_{ad} = U$

$\rightsquigarrow L\ddot{I}_{ab} + R\dot{I}_{bc} + \frac{1}{c}I_{cd} - \dot{U} = 0$

$\rightsquigarrow L\ddot{I}_{ab} + R\dot{I}_{bc} + \frac{1}{c}I_{cd} = \dot{U}$ *(Maschenregeln)*

Dies ist eine gewöhnliche lineare DGL 2. Ordnung, und (natürlich) ist eine Umformung als DGL-System 1. Ordnung entsprechend Bemerkung 8.1 möglich.

Idealer Schwingkreis ($R = 0, U \equiv 0$):

$$\rightsquigarrow \qquad \ddot{I}_{ab} + \frac{1}{LC}I_{ab} = 0$$

Lösung: $I_{ab}(t) = \sin \omega t, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

8.2 Anfangswertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen: Existenz- und Einzigkeitsaussagen

Problem: (1) $x'(t) = f(x(t), t), \quad \forall t \in I, x(t_o) = x_o$,
wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $t_o \in I$, $x_o \in \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \times I \to \mathbb{R}^m$.

Beispiel 8.6
$x'(t) = x^2(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}, x(1) = -1$.
Lösung auf $]0, +\infty[$: $x(t) = -\frac{1}{t}$.
Diese Funktion ist nicht fortsetzbar auf $x = 0$!
I.a. kann man also nur die lokale Lösbarkeit erwarten!
$\rightsquigarrow$ präzisierte Problemstellung: Existenz und Einzigkeit von Lösungen von (1) auf "kleinen" Intervallen um t_o.

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.
$C_m(I) := C(I; \mathbb{R}^m)$ – Menge der stetigen Funktionen von I in $\mathbb{R}^m$.
$C_m^1(I) := C^1(I; \mathbb{R}^m)$ – Menge der stetig differenzierbaren Funktionen von I in $\mathbb{R}^m$.

Lemma 8.7
Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $t_o \in I$, $f : \mathbb{R}^m \times I \to \mathbb{R}^m$.
Ist $x_* \in C_m^1(I)$ eine Lösung von (1), so ist x_* Lösung von

$$(2) \qquad x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(x(s), s)\, ds, \quad \forall t \in I.$$

Ist umgekehrt für ein $x_* \in C_m(I)$ auch $f(x(\cdot), \cdot) \in C_m^1(I)$, und ist x_* Lösung von (2), so gilt sogar $x_* \in C_m^1(I)$, und x_* ist eine Lösung von (1).

Beweis:
($\longrightarrow$): Sei $x \in C^1_m(I)$ Lösung von (1) $\leadsto x'_* \in C_m(I)$.

$$6.44 \leadsto x_*(t) - \underbrace{x_*(t_o)}_{=x_o} = \int_{t_o}^{t} x'_*(s)ds = \int_{t_o}^{t} f(x_(s), s)ds, \, \forall t \in I$$

$$x_*(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(x_*(s), s)ds, \quad \forall t \in I,$$

d.h. x_* ist Lösung von (2).
($\longleftarrow$): Sei $x_* \in C_m(I), f(x_*(\cdot), \cdot) \in C_m(I) \leadsto \int_{t_o}^{t} f(x(s), s)ds$ ist definiert.
(komponentenweise Riemann-Integrierbarkeit)
Ferner gilt nach Voraussetzung: $(\star) \quad x_*(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(x_*(s), s)ds, \quad \forall t \in I.$
Nach Satz 6.43 ist die Funktion $g(t) := \int_{t_o}^{t} f(x_*(s), s)ds$, $\forall t \in I$ ($f : I \to I\!R^m$!) differenzierbar (wobei mit derselben Methode wie in 6.42 auch die einseitige Differenzierbarkeit in (möglichen) Randpunkten von I gezeigt werden kann), und es gilt $g'(t) = f(x_*(t), t), \quad \forall t \in I.$
Wegen $(\star)$ gilt ferner: $\exists x'_*(t) = g'(t)$, $\forall t \in I.$
$\leadsto x_* \in C^1_m(I)$, und x_* ist Lösung von (1). $\square$

Bemerkung 8.8
Ist $f : I\!R^m \times I \to I\!R^m$ stetig, so besagt Lemma 8.7:
x_* ist Lösung von (1) gdw. x_* ist Lösung von (2).

Satz 8.9 *(Cauchy/Peano)*
Es sei $I \subseteq I\!R$ ein Intervall, es seien $t_o \in I, x_o \in I\!R^m, r > 0$, $f : I\!R^m \times I \to I\!R^m$, und f sei stetig auf $\bar{B}(x_o, r) \times I$.
Dann existieren ein Intervall $I_o \subseteq I$ mit $t_o \in I_o$ und eine Funktion $x \in C^1_m(I_o)$ mit

$$x'(t) = f(x(t), t), \quad \forall t \in I_o, \, x(t_o) = x_o$$

Beweis:
(Anwendung des Satzes von Arzela/Ascoli, Satz 7.42)
O.B.d.A. $\exists \eta > 0 : [t_o, t_o + \eta] \subseteq I.$ (ansonsten $[t_o - \eta, t_o]$ betrachten!)
Wir wählen η wie folgt: $I_o := [t_o, t_o + \eta] \subseteq I$ und

$$\eta \max\{\|f(v, t)\| : t \in [t_o, t_o + \eta], \, v \in \bar{B}(x_o, r)\} \leq r.$$

Wir definieren den Banachraum $X := C_m(I_o)$ mit $\|x\| = \max_{t\in I_o} \|x(t)\|$, $\forall x \in X$.
Wir konstruieren eine Menge $\mathcal{F}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} t_j &:= t_o + \frac{j}{n}\eta,\ j = 1,\dots,n; \\ x_n(t) &:= x_n(t_{j-1}) + f(x_n(t_{j-1}), t_{j-1})(t - t_{j-1}), \\ x_n(t_o) &:= x_o, \\ & \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j],\ \forall n \in I\!N \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow x_n \in C_m(I_o)$, $\forall n \in I\!N$.

<u>Ziel:</u> $\mathcal{F}$ ist relativ kompakt.
Nach 7.42 genügt es, zu zeigen: (a) $\mathcal{F}$ ist beschränkt,
(b) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig.

Wir zeigen zunächst induktiv: $\|x_n(t_j) - x_o\| \leq \frac{j}{n}\eta M$, $\forall j = 1,\dots,n$ ($\forall n \in I\!N$).
Sei $n \in I\!N$ beliebig, $j = 1$: $\|x_n(t_1) - x_o\| = \|f(x_o, t_o)(t_1 - t_o)\| \leq M\frac{\eta}{n} (\leq r)$
$\rightsquigarrow$ insbesondere ist $x_n(t_1) \in \bar{B}(x_o, r)$.
Es sei jetzt für $j-1$ richtig:

$$\begin{aligned} \|x_n(t_j) - x_o\| &\leq \|x_n(t_{j-1} - x_o)\| + \underbrace{\|f(x_n(t_{j-1}), t_{j-1})\|}_{\leq M}(t_j - t_{j-1}), \\ & \qquad (\text{da } x_n(t_j) \in \bar{B}(x_o, r)) \\ &\leq \underbrace{\frac{j-1}{n}\eta}_{=t_{j-1}-t_o} M + M(t_j - t_{j-1}) = \frac{j}{n}\eta M \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also: $x_n(t_j) \in \bar{B}(x_o, r)$, $\forall j = 1,\dots,n, \forall n \in I\!N$.
Sei $n \in I\!N$ beliebig, $t \in I_o = [t_o, t_o + \eta] \rightsquigarrow \exists j \in \{1,\dots,n\} : t \in [t_{j-1}, t_j]$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \|x_n(t) - x_o\| &\leq \|x_n(t_{j-1}) - x_o\| + \|f(x_n(t_{j-1}), t_{j-1})\|(t - t_{j-1}) \\ &\leq \underbrace{\frac{j-1}{n}\eta}_{=t_{j-1}-t_o} M + M(t - t_{j-1}) = (t - t_o)M \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \|x_n(t) - x_o\| \leq \eta M \leq r$

$\rightsquigarrow x_n(t) \in \bar{B}(x_o, r)$, $\forall t \in I_o, \forall n \in I\!N$.
Also ist $\mathcal{F}$ beschränkt.

Sei $n \in I\!N$ beliebig, und es seien $i, j \in \{1,\dots,n\}, i \leq j$:

$$\begin{aligned} \|x_n(t_j) - x_n(t_i)\| &\leq \|x_n(t_j) - x_n(t_{j-1})\| + \|x_n(t_{j-1}) - x_n(t_i)\| \\ &\leq \sum_{k=i+1}^{j} \|x_n(t_k) - x_n(t_{k+1})\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad \text{(sukzessive Dreiecksungleichung)}\\
&\leq \sum_{k=i+1}^{j} \|f(x_n(t_{k-1}),t_{k-1})\|(t_k-t_{k-1}) \leq M \sum_{k=i+1}^{j}(t_k-t_{k-1})\\
&= M(t_j-t_i).
\end{aligned}$$

Seien $t,s \in I_o$ beliebig, $s<t$ ($\rightsquigarrow \exists i,j \in \{1,\ldots,n\} : s \in [t_{i-1},t_i], t \in [t_{j-1},t_j]$):

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \|x_n(t)-x_n(s)\| &\leq \|x_n(t)-x_n(t_{j-1})\| + \|x_n(t_{j-1})-x_n(t_i)\|\\
&\quad + \|x_n(t_i)-x_n(s)\|\\
&\leq M(t-t_{j-1}) + M(t_{j-1}-t_i) + M(t_i-s) = M(t-s),
\end{aligned}$$

wobei zu zeigen bleibt: $\|x_n(t_i)-x_n(s)\| \leq M(t_i-s)$:
Es gilt: $\begin{aligned} x_n(s) &= x_n(t_{i-1}) + f(x_n(t_{i-1}),t_{i-1})(s-t_{i-1})\\ x_n(t_i) &= x_n(t_{i-1}) + f(x_n(t_{i-1}),t_{i-1})(t_i-t_{i-1}) \end{aligned}$.
$\rightsquigarrow x_n(t_i)-x_n(s) = f(x_n(t_{i-1}),t_{i-1})(t_i-s)$
$\rightsquigarrow \|x_n(t_i)-x_n(s)\| \leq M(t_i-s)$.

$\rightsquigarrow \|x_n(t)-x_n(s)\| \leq M(t-s), \quad \forall t,s \in I_o, \forall n \in I\!N$

$\rightsquigarrow \mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig (vgl. Bsp. 4.37).

7.42 $\rightsquigarrow \mathcal{F}$ ist relativ kompakt in $X = C_M(I_o)$.
$\rightsquigarrow \exists$ Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit (x_{n_k}) ist konvergent in $X \rightsquigarrow \exists x \in C_m(I_o)$: $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{t\in I_o} \|x_{n_k}(t)-x(t)\| = 0$.

<u>Nächstes Ziel:</u> Diese Funktion x erfüllt $x'(t) = f(x(t),t)$, $\forall t \in I_o$, $x(t_o) = x_o$.
Wegen $x_n(t_o) = x_o$, $\forall n \in I\!N$, gilt auch $x(t_o) = x_o$.
Wegen $x_n(t) \in \bar{B}(x_o,r)$, $\forall t \in I_o, \forall n \in I\!N$, gilt auch $x(t) \in \bar{B}(x_o,r)$, $\forall t \in I_o$.
zu zeigen bleibt: $x'(t) = f(x(t),t)$, $\forall t \in I_o$, nach Lemma 8.7 genügt es, zu zeigen: $x(t) = x_o + \int\limits_{t_o}^{t} f(x(s),s)ds$, $\forall t \in I_o$.
(Die Voraussetzungen von Lemma 8.7 sind erfüllt, da f stetig ist auf $\bar{B}(x_o,r)\times I$, und $x(t) \in \bar{B}(x_o,r)$, $\forall t \in I_o$, sowie $x \in X$.)

Nach Konstruktion von x_n gilt $\forall n \in I\!N, t \in I_o$ ($\rightsquigarrow \exists j \in \{1,\ldots,n\} : t \in [t_{j-1},t_j]$).

$$\begin{aligned}
x_n(t) &= x_n(t_{j-1}) + f(x_n(t_{j-1}),t_{j-1})(t-t_{j-1})\\
&\;\vdots\\
&= x_o + \sum_{i=0}^{j-2} f(x_n(t_i),t_i)(t_{i+1}-t_i) + f(x_n(t_{j-1}),t_{j-1})(t-t_{j-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_o + \sum_{i=0}^{j-2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x_n(t_i), t_i)ds + \int_{t_{j-1}}^{t} f(x_n(t_{j-1}), t_{j-1})ds \\
&= x_o + \int_{t_o}^{t} g_n(s)ds, \quad \forall t \in I_o, \text{ wobei}
\end{aligned}
$$

$$
g_n(t) = \begin{cases} f(x_n(t_i), t_i), \text{ falls } t \in]t_i, t_{i+1}], \ i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ f(x_n(t_o), t_o), \text{ falls } t \in [t_o, t_1]. \end{cases}
$$

D.h. g_n ist stückweise konstant (und damit Riemann-integrierbar).

Insbesondere gilt: $\underbrace{x_{n_k}}_{\substack{\longrightarrow \\ k\to\infty} x(t)} = x_o + \underbrace{\int_{t_o}^{t} g_{n_k}(s)ds}_{\substack{\longrightarrow \\ k\to\infty} \int_{t_o}^{t} f(x(s),s)ds\ ?}$, $\forall t \in I_o, \forall k \in I\!N$.

z.z.: $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{t\in I_o} \|g_{n_k}(t) - f(x(t), t)\| = 0$.

Schlußfolgerung: $\int_{t_o}^{t} g_{n_k}(s)ds \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_o}^{t} f(x(s), s)ds$, $\forall t \in I_o$ (6.17)

$\rightsquigarrow x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(x(s), s)ds, \quad \forall t \in I_o$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. f ist gleichmäßig stetig auf $\bar{B}(x_o, r) \times I_o$.
$\rightsquigarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, daß $\forall (u, t), (v, s) \in \bar{B}(x_o, r) \times I_o : \max\{\|u - v\|, |t - s|\} < \delta$ gilt: $\|f(u, t) - f(v, s)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Wir wählen $k_o \in I\!N$ so, daß $\|x - x_{n_k}\|_\infty = \max\limits_{t\in I_o} \|x(t) - x_{n_k}(t)\| < \delta$, und $\max\{1, M\}\frac{\eta}{n} < \delta, \quad \forall k \geq k_o$.
Sei $k \geq k_o$ und $t \in I_o$ beliebig gewählt.

$\rightsquigarrow \exists j \in \{1, \ldots, n_k\} : t \in \begin{cases}]t_{j-1}, t_j], & \text{wobei } t_j := t_o + \frac{j}{n_k}\eta, \ j > 1 \\ [t_o, t_1], & \text{falls } j = 1 \end{cases}$

$\rightsquigarrow |t - t_{j-1}| < \frac{\eta}{n_k} < \delta$, und

$$
\begin{aligned}
\|x_{n_k}(t) - x_{n_k}(t_{j-1})\| &= \|f(x_{n_k}(t_{j-1}), t_{j-1})\|(t - t_{j-1}) \\
&= M\frac{\eta}{n_k} < \delta.
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow \max\{\|x_{n_k}(t) - x_{n_k}(t_{j-1})\|, |t - t_{j-1}|\} < \delta$.
$\rightsquigarrow \|f(x_{n_k}(t), t) - f(x_{n_k}(t_{j-1}), t_{j-1})\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$
\begin{aligned}
\rightsquigarrow \|g_{n_k}(t) - f(x(t), t)\| &= \|f(x_{n_k}(t_{j-1}), t_{j-1}) - f(x(t), t)\| \\
&\leq \|f(x_{n_k}(t_{j-1}), t_{j-1}) - f(x_{n_k}(t), t)\| \\
&\quad + \|f(x_{n_k}(t), t) - f(x(t), t)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{da } \|x_{n_k}(t) - x(t)\| < \delta
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow \sup_{t\in I_o} \|g_{n_k}(t) - f(x(t),t)\| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_o.$

Grenzübergang $k \to \infty$: $x(t) = x_o + \int\limits_{t_o}^{t} f(x(s),s)\,ds, \quad \forall t \in I_o.$

gdw. (8.7) $x'(t) = f(x(t),t), \quad \forall t \in I_o, x(t_o) = x_o$ □

Bemerkung 8.10

Satz 8.9 ist eine "lokale" Existenzaussage in dem Sinne, daß für hinreichend kleines $\eta > 0$ die Existenz einer Lösung von (1) auf dem Intervall $[t_o, t_o + \eta]$ gezeigt wird.
Analog zum obigen Beweis zeigt man auch die Existenz einer Lösung auf $[t_o - \eta, t_o + \eta]$ (mit geeignetem $\eta > 0$), falls $t_o \in \operatorname{int}(I)$.

Der Beweis von Satz 8.9 liefert auch Aussagen über die Konvergenz des sog. Eulerschen Polygonzug-Verfahrens. Hat nämlich (1) auf I_o genau eine Lösung, so muß die gesamte Folge (x_n) gegen diese Lösung konvergieren.
Eulersches Verfahren:

$$\begin{aligned} x_{n,j} &:= x_n(t_j) = \underbrace{x_n(t_{j-1})}_{x_{n,j-1}} + f(x_{n,j-1}, t_{j-1}) \underbrace{(t_j - t_{j-1})}_{=\frac{j}{n}\eta}, \quad j = 1,\ldots,n \\ x_{n,o} &:= x_o. \end{aligned}$$

Wir erhalten aus dem Beweis, falls die Lösung eindeutig ist:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{j=1,\ldots,n} \|x_{n,j} - x(t_j)\| = 0$$

(Konvergenzaussage für Euler-Verfahren).

Frage: Ist unter den Voraussetzungen von Satz 8.9 die Lösung von (1) eindeutig bestimmt?

Beispiel 8.11

$x'(t) = x(t)^{\frac{1}{3}}, \forall t \in [0,+\infty[, x(0) = 0.$
(Satz 8.9: $f(v,t) = v^{\frac{1}{3}}, \forall (v,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\rightsquigarrow f$ ist stetig, $\rightsquigarrow$ Existenz einer "lokalen" Lösung.)
Lösung: $x(t) := (\frac{2}{3}t)^{\frac{3}{2}}, \forall t \in [0,+\infty]$
$(\rightsquigarrow x'(t) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}(\frac{2}{3}t)^{\frac{1}{2}} = (\frac{2}{3}t)^{\frac{1}{2}} \rightsquigarrow x'(t) = x(t)^{\frac{1}{3}}.)$
unendlich viele Lösungen: $x_c(t) := \begin{cases} (\frac{2}{3}t)^{\frac{2}{3}}, & \forall t \in [c,+\infty[\\ 0, & \forall t \in [0,c[\end{cases} \quad \forall c \geq 0.$

Ursache: *Wir benötigen stärkere Stetigkeitseigenschaften von f, um eindeutige Lösungen zu erhalten!*

Satz 8.12 *(Picard/Lindelöf)*
Es sei $I \subseteq I\!R$ ein Intervall, es seien $t_o \in I, x_o \in I\!R^m, r > 0$, und $f : I\!R^m \times I \to I\!R^m$ sei stetig auf $\bar{B}(x_o, r) \times I$. Ferner existiere eine Konstante $L > 0$ mit $\|f(y,t) - f(z,t)\| \leq L\|y - z\|$, $\forall (y,t), (z,t) \in \bar{B}(x_o, r) \times I$.
Dann existieren ein Intervall $I_o \subseteq I$ mit $t_o \in I_o$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $x \in C^1_m(I_o)$ mit

$$x'(t) = f(x(t), t), \quad \forall t \in I_o, x(t_o) = x_o$$

Beweis:
Ziel: Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes auf die Integralgleichung (2) (auf einem geeigneten Intervall $I_o \subseteq I$)!
O.B.d.A. $\exists \eta > 0 : [t_o, t_o + \eta] \subseteq I$.
Wahl von η: $[t_o, t_o + \eta] \subseteq I, \quad M\eta \leq r, \quad L\eta < 1$, wobei
$M := \max\{\|f(v,t)\| : v \in \bar{B}(x_o, r), t \in [t_o, t_o + \eta]\}$.
$\rightsquigarrow I_o := [t_o, t_o + \eta]$ (η ist durch die zusätzliche Bedingung i.a. kleiner als in Satz 8.9).
Nach Lemma 8.7 genügt es, die Integralgleichung
(2) $x(t) = x_o + \int\limits_{t_o}^{t} f(x(s), s) ds$, $\forall t \in I_o$,
zu betrachten und zu zeigen, daß (2) genau eine Lösung besitzt.

Wahl des metrischen Raumes:
$X := \{x \in C_m(I_o) : x(t) \in \bar{B}(x_o, r), \forall t \in I_o\}$ mit der Metrik
$d(x, \tilde{x}) := \sup\limits_{t \in I_o} \|x(t) - \tilde{x}(t)\|$
$\rightsquigarrow (X, d)$ ist metrischer Raum (vgl. Kap. 4.2).
Beh.: (X, d) ist vollständig.
Bew.: Sei (x_n) Fundamentalfolge in (X, d).
$\rightsquigarrow (x_n)$ ist Fundamentalfolge in $C_m(I_o)$.
$\rightsquigarrow (x_n)$ ist konvergent in $C_m(I_o)$ gegen $x \in C_m(I_o)$ (Satz 4.34)
$\rightsquigarrow x_n(t) \to x(t), \forall t \in I_o \rightsquigarrow x(t) \in \bar{B}(x_o, r), \forall t \in I_o$,
da $x_n(t) \in \bar{B}(x_o, r), \forall t \in I_o, \forall n \in I\!N$.
$\rightsquigarrow x \in X \rightsquigarrow X$ ist vollständig.

Definition des Operators:
$F : X \to C_m(I_o), (Fx)(t) := x_o + \int\limits_{t_o}^{t} f(x(s), s)\, ds, \quad \forall t \in I_o$.
F ist wohl-definiert nach Voraussetzung.
Fixpunkte von F sind gerade Lösung der Integralgleichung (2).
Wir zeigen: $F : X \to X$, d.h. $\forall x \in X : \|(Fx)(t) - x_o\| \leq r$, $\forall t \in I_o$.
Sei $x \in X$ beliebig, $t \in I_o$ beliebig.

$$\rightsquigarrow \|(Fx)(t) - x_o\| \;=\; \|\int\limits_{t_o}^{t} f(x(s), s) ds\| \leq \int\limits_{t_o}^{t} \underbrace{\|f(x(s), s)\|}_{\leq M} ds$$

$$\leq \; M\eta \leq r$$

Wir zeigen: F ist kontraktiv.
Seien $x, \tilde{x} \in X$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow d(Fx, F\tilde{x}) &= \sup_{t\in I_o} \|x_o + \int_{t_o}^{t} f(x(s),s)ds - (x_o + \int_{t_o}^{t} f(\tilde{x}(s),s)ds)\| \\
&= \sup_{t\in I_o} \| \int_{t_o}^{t} [f(x(s),s) - f(\tilde{x}(s),s)]ds\| \\
&\leq \sup_{t\in I_o} \int_{t_o}^{t} \underbrace{\|f(x(s),s) - f(\tilde{x}(s),s)\|}_{\leq L\|x(s)-\tilde{x}(s)\|} ds \\
&\leq \; L\eta \sup_{t\in I_o} \underbrace{\|x(t) - \tilde{x}(t)\|}_{d(x,\tilde{x})}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Kontraktionskonstante $\alpha := L\eta \in]0,1[$!

Nach Satz 2.28 existiert genau ein Fixpunkt von F und damit genau eine Lösung von (2) und folglich (Lemma 8.7) genau eine Lösung von

$$x'(t) = f(x(t),t), \forall t \in I_o, x(t_o) = x_o \qquad \square$$

Bemerkung 8.13
Hinreichende Bedingung für die Lipschitz-Stetigkeit von f (bez. der ersten Komponente) in Satz 8.12 ergeben sich aus Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an f und den Mittelwertsätzen im R^m (Kap. 5.3).
Ist z.B. für ein $R < r$ $f(\cdot,t)$, $\forall t \in I_o$, Fréchet-differenzierbar auf $\bar{B}(x_o,R)$ mit Fréchet-Ableitung $f'_x(x,t)$ in $x \in \bar{B}(x_o,R)$, dann gilt:

$$\|f(y,t) - f(z,t)\| \leq \sup_{\tau\in[0,1]} \|f'_x(y + \tau(z-y),t)\|\|y-z\|.$$

Ist also die Norm der Ableitung beschränkt mit $L > 0$ auf $\bar{B}(x_o,r) \times I_o$, so ist die Bedingung in Satz 8.12 erfüllt.

Für die Beispiele in 8.5 ist diese Bedingung erfüllt!

<u>Nächstes Ziel:</u> Fortsetzung lokaler Lösungen

Definition 8.14

a) *Ein Paar $(\tilde{I}, \tilde{x})$ heißt* <u>*lokale Lösung*</u> *von (1), falls $\tilde{I} \subseteq I\!R$ ein Intervall mit $t_o \in \tilde{I}, \tilde{I} \subseteq I$, und $\tilde{x}$ Lösung von*
$x'(t) = f(x(t), t), \quad \forall t \in \tilde{I},\ x(t_o) = x_o$, ist.

b) *Eine lokale Lösung $(\hat{I}, \hat{x})$ heißt* <u>*Fortsetzung*</u> *von $(\tilde{I}, \tilde{x})$, falls $\tilde{I} \subseteq \hat{I}$ und $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t),\ \forall t \in I$. Man nennt die Fortsetzung* <u>*strikt*</u>*, falls $\tilde{I} \subset \hat{I}$.*

c) *Eine lokale Lösung $(\tilde{I}, \tilde{x})$ heißt* <u>*maximale Lösung*</u> *von (1), falls keine lokale Lösung von (1) existiert, die strikte Fortsetzung von $(\tilde{I}, \tilde{x})$ ist.*

d) *$(\tilde{I}, \tilde{x})$ heißt* <u>*globale Lösung*</u> *von (1), falls $(\tilde{I}, \tilde{x})$ eine lokale Lösung von (1) ist, und $\tilde{I} = I$.*

Beispiele 8.15

a) *(vgl. Bsp. 8.6), $x'(t) = x(t)^2,\ \forall t \in I\!R, x(1) = 1$.*
$x_*(t) = -t^{-1},\ \forall t \in]0, +\infty[$.
$\rightsquigarrow$ $(]0, +\infty[, x_*)$ ist maximale Lösung der obigen Anfangswertaufgabe.

b) *$x'(t) = -2tx(t)^2,\ \forall t \in I\!R, x(0) = 1$.*
$\rightsquigarrow$ $(I\!R, x_*)$, wobei $x_*(t) = \frac{1}{1+t^2},\ \forall t \in I\!R$, ist globale Lösung dieser Aufgabe (da $x_*'(t) = -2t(1+t^2)^{-2}$).

c) *$x'(t) = 2tx(t)^2,\ \forall t \in I\!R, x(0) = 1$.*
Ansatz: $x_*(t) = (1-t^2)^{-1},\ \forall t \in]-1, 1[$ $(x_*'(t) = 2t(1-t^2)^{-2})$.
$\rightsquigarrow$ $(]-1, 1[, x_*)$ ist maximale Lösung der obigen Anfangswertaufgabe

Lemma 8.16
Existiert eine lokale Lösung von (1), so existiert auch eine maximale Lösung von (1), die diese lokale Lösung fortsetzt.

<u>**Beweis:**</u>
O.B.d.A. existiere ein $\eta > 0$ so, daß $I = [t_o, t_o + \eta]$.
Es sei $(\tilde{I}, \tilde{x})$ eine lokale Lösung von (1).
$\mathcal{M}_o :=$ Menge aller lokalen Lösungen von (1), die $(\tilde{I}, \tilde{x})$ fortsetzen.
$\rightsquigarrow \mathcal{M} \neq \emptyset$.
$\tau_o := \sup\{t : \exists([t_o, t], x) \in \mathcal{M}_o\}$
Wir wählen $([t_o, t_1], x_{(1)}) \in \mathcal{M}_o$ so, daß $\tau_o \geq t_1 \geq \tau_o - 1$.
$\mathcal{M}_1 :=$ Menge aller lokalen Lösungen von (1), die $([t_o, t_1], x_{(1)})$ fortsetzen.
$\tau_1 := \sup\{t : \exists([t_o, t], x) \in \mathcal{M}_1\}$
Wir wählen $([t_o, t_2], x_{(2)}) \in \mathcal{M}_1$ so, daß $\tau_1 \geq t_2 \geq \tau_2 - \frac{1}{2}$, usw.
Allgemein definieren wir für jedes i:
$\mathcal{M}_i :=$ Menge aller lokalen Lösungen von (1), die $([t_o, t_i], x_{(i)})$ fortsetzen.
$\tau_i := \sup\{t : \exists([t_o, t], x) \in \mathcal{M}_i\}$, wobei $\tau_i \geq t_{i+1} \geq \tau_i - \frac{1}{i+1}$.

Nach Konstruktion gilt: $t_{i+1} \geq t_i, \tau_{i+1} \leq \tau_i, t_{i+1} \leq \tau_{i+1}$.
$\rightsquigarrow t_i \leq t_{i+1} \leq \tau_{i+1} \leq \tau_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow (t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sind als monotone beschränkte Folgen beide konvergent gegen denselben Grenzwert $\tau \in I$.

$$\rightsquigarrow \lim_{i\to\infty} t_i = \tau = \lim_{i\to\infty} \tau_i$$

Wir definieren eine Funktion $\hat{x} : [t_o, \tau[\to \mathbb{R}$, $\hat{x}(t) := x_{(i)}(t), \quad \forall t \in [t_o, t_i]$.
$\hat{x}$ ist damit wohl-definiert, da $x_{(i+1)}$ Fortsetzung von $x_{(i)}$ ist, $\forall i \in \mathbb{N}$.
Außerdem ist $([t_o, \tau[, \hat{x})$ lokale Lösung von (1), da, $\forall i \in \mathbb{N}, ([t_o, t_i], x_{(i)})$ lokale Lösung ist. Ferner ist $([t_o, \tau[, \hat{x})$ eine Fortsetzung von $(\tilde{I}, \tilde{x})$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $([t_o, \tau[, \hat{x})$ ist maximale Lösung,

(ii) es existiert eine lokale Lösung $([t_o, \bar{t}], \bar{x})$ von (1), die eine strikte Fortsetzung von $([t_o, \tau[, \hat{x})$ ist, d.h. $\tau \leq \bar{t}$.
$\rightsquigarrow$ nach Konstruktion müßte dann gelten: $([t_o, \bar{t}], \bar{x}) \in \mathcal{M}_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$,
$\rightsquigarrow \tau_i \geq \bar{t}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow \tau \leq \bar{t} \leq \tau_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, und $\tau_i \to \tau$.
$\rightsquigarrow \bar{t} = \tau$.
$\rightsquigarrow ([t_o, \tau], \bar{x})$ ist maximale Lösung von (1) $\square$

Satz 8.17
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_o \in I$ sei linker Randpunkt von I, $x_o \in \mathbb{R}^m$, und $f : \mathbb{R}^m \times I \to \mathbb{R}^m$ sei stetig.
Dann existiert eine maximale Lösung $(\tilde{I}, \tilde{x})$ von (1), und diese ist entweder eine globale Lösung von (1) oder $\tilde{I}$ hat die Form $[t_o, t_1[$ mit $t_1 \in I$, und $\tilde{x}$ ist nicht beschränkt auf $\tilde{I}$.

Beweis:
Nach Satz 8.9 (Cauchy/Peano) existiert eine lokale Lösung von (1) und nach Lemma 8.16 folglich eine maximale Lösung $(\tilde{I}, \tilde{x})$ von (1), die die lokale Lösung fortsetzt.
Wir unterscheiden vier Fälle

i) $\tilde{I} = I$, d.h. $(\tilde{I}, \tilde{x})$ ist globale Lösung.

ii) $\tilde{I} = [t_o, t_1] \subseteq I, t_1 \in \text{int}(I)$. Wir setzen $x_1 := \tilde{x}(t_1)$ und betrachten die Anfangswertaufgabe

$$(\star) \qquad x'(t) = f(x(t), t), \forall t \in [t_1, +\infty[\cap I,\ x(t_1) = x_1$$

Nach Satz 8.9 existieren ein $\eta_1 > 0$ und eine Funktion $y \in C^1_m([t_1, t_1 + \eta])$, die Lösung von $(\star)$ ist. Wir definieren $\hat{x} : [t_o, t_1 + \eta] \to I\!R^m$,

$$\hat{x}(t) := \begin{cases} \tilde{x}(t), \ \forall t \in [t_o, t[\\ y(t), \text{ sonst} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \hat{x} \in C^1_m([t_o, t_1 + \eta])$ und ist lokale Lösung von (1), die $(\tilde{I}, \tilde{x})$ fortsetzt.
$\rightsquigarrow$ Widerspruch!

iii) $\tilde{I} = [t_o, t_1[$, und $\tilde{x}$ ist nicht beschränkt auf $\tilde{I}$.

iv) $\tilde{I} = [t_o, t_1[$, und $\tilde{x}$ ist beschränkt auf $\tilde{I}$.
Wir definieren $\hat{x}(t) = \tilde{x}(t)$, $\forall t \in \tilde{I}$.
Ziel: $\hat{x}$ auf das Intervall $[t_o, t_1]$ fortsetzen und $\hat{x}$ ist lokale Lösung von (1). $\rightsquigarrow$ Widerspruch zu $(\tilde{I}, \tilde{x})$ maximale Lösung.
Wir betrachten die Integrale $\int\limits_{t_o}^{t} f(\tilde{x}(s), s)ds$, $\forall t \in \tilde{I}$.
Wir zeigen: $\exists \lim\limits_{t \to t_1} \int\limits_{t_o}^{t} f(\tilde{x}(s), s)ds$. Sei (t_n) eine Folge mit $t_n \to t_1, t_n \in \tilde{I}$, $\forall n \in I\!N$, und sei o.B.d.A. $t_n < t_m$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \left\| \int_{t_o}^{t_n} f(\tilde{x}(s), s)ds - \int_{t_o}^{t_m} f(\tilde{x}(s), s)ds \right\| &= \left\| \int_{t_n}^{t_m} f(\tilde{x}(s), s)ds \right\| \\ &\leq \int_{t_n}^{t_m} \|f(\tilde{x}(s), s)\| ds \\ &\leq C(t_m - t_n), \end{aligned}$$

wobei in C die Beschränktheit von $\tilde{x}$ und die Stetigkeit von f "eingeht".
$\rightsquigarrow \exists \lim\limits_{t \to t_1} \int\limits_{t_o}^{t} f(\tilde{x}(s), s)ds$,
$\rightsquigarrow \hat{x}(t_1) := x_o + \lim\limits_{t \to t_1} \int\limits_{t_o}^{t} f(\underbrace{\tilde{x}(s)}_{=\hat{x}(s)}, s)ds = \lim\limits_{t \to t_1} \tilde{x}(t) = x_o + \int\limits_{t_o}^{t_1} f(\hat{x}(s), s)ds.$
$\rightsquigarrow ([t_o, t_1], \hat{x})$ ist lokale Lösung von (1). $\rightsquigarrow$ Widerspruch! $\square$

Bemerkung 8.18
Tritt der zweite Fall in der Behauptung von Satz 8.17 auf, so sagt man, daß die (maximale) Lösung "explodiert" (vgl. Bsp. 8.15 a),c)).

Frage: Welche Bedingungen an die DGL (d.h. also an die Funktion f) verhindern eine Explosion von maximalen Lösungen?

Lemma 8.19 *(Gronwall)*
Es seien $w, g \in C([a,b]), c > 0$, und es gelte:

$$0 \leq w(t) \leq g(t) + c\int\limits_a^b w(s)ds, \quad \forall t \in [a,b] \quad (\text{"Integralungleichung"})$$

Dann gilt: $w(t) \leq \max\limits_{t\in[a,b]} |g(t)| \exp(c(t-a)), \quad \forall t \in [a,b].$

<u>**Beweis:**</u>
Wir betrachten die Funktion $u(t) := \max\limits_{s\in[a,b]} |g(t)| + c\int\limits_a^t w(s)ds$, $\forall t \in [a,b]$.
$\rightsquigarrow u \in C([a,b])$ und sogar setig differenzierbar. Außerdem gilt:
$w(t) \leq u(t)$, $\forall t \in [a,b]$
$u'(t) = cw(t) \leq cu(t)$, $\forall t \in [a,b]$.
Wir betrachten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[u(t)\exp(-c(t-a))] &= \underbrace{(u'(t) - cu(t))}_{\leq 0}\underbrace{\exp(-c(t-a))}_{>0}, \forall t \in [a,b]\\ &\leq 0\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ die Funktion $v(t) := u(t)\exp(-c(t-a))$, $\forall t \in [a,b]$ ist monoton fallend.
$\rightsquigarrow v(t) \leq v(a) = u(a)$, $\forall t \in [a,b]$,
$\rightsquigarrow u(t)\exp(-c(t-a)) \leq u(a) = \max\limits_{s\in[a,b]} |g(s)|$, $\forall t \in [a,b]$.
$\rightsquigarrow w(t) \leq u(t) \leq \max\limits_{s\in[a,b]} |g(s)| \exp(c(t-a))$, $\forall t \in [a,b]$. $\square$

Satz 8.20
Es sei $I := [t_o, t_o + T]$ $(T > 0)$, $f : \mathbb{R}^m \times I \to \mathbb{R}^m$ stetig, und es existiere ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{R}^m$ mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|$ und eine beschränkte Riemann-integrierbare Funktion $l : I \to \mathbb{R}^m$ so, daß

$$\langle f(v,t), v\rangle \leq l(t)(1 + \|v\|^2), \ \forall (v,t) \in \mathbb{R}^m \times I.$$

Dann existiert (mindestens) eine globale Lösung von (1).

<u>**Beweis:**</u>
<u>Ziel:</u> Anwendung von Satz 8.17, indem wir zeigen, daß jede lokale Lösung von (1) beschränkt ist. Satz 8.17 besagt dann die Existenz einer maximalen Lösung, die globale Lösung sein muß.
Es sei $(\tilde{I}, x)$ eine lokale Lösung von (1), und wir betrachten die Funktion
$u(t) := \|x(t)\|^2, \quad \forall t \in \tilde{I}, \rightsquigarrow u : I \to \mathbb{R}.$

Wir zeigen zunächst: u ist differenzierbar, und die Ableitung hat folgende Gestalt: $u'(t) = 2\langle x'(t), x(t)\rangle$, $\forall t \in \tilde{I}$.
Bws.: Sei $t \in \tilde{I}, h \in I\!R\backslash\{0\}$ mit $t+h \in \tilde{I}$.

$$
\begin{aligned}
\rightsquigarrow \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t)) &= \frac{1}{h}(\|x(t+h)\|^2 - \|x(t)\|^2) \\
&= \frac{1}{h}(\langle x(t+h), x(t+h)\rangle - \langle x(t), x(t)\rangle) \\
&= \langle \frac{1}{h}(x(t+h)-x(t), x(t+h))\rangle \\
&\quad +\langle x(t), \frac{1}{h}(x(t+h)-x(t))\rangle \\
\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} &\quad \langle x'(t), x(t)\rangle + \langle x(t), x'(t)\rangle = 2\langle x'(t), x(t)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 &= 2\langle x'(t), x(t)\rangle = 2\langle f(x(t),t), x(t)\rangle \\
&\leq 2l(t)(1+\|x(t)\|^2),\ \forall t \in \tilde{I}.
\end{aligned}
$$

$$\rightsquigarrow \|x(t)\|^2 - \|x(t_o\|^2 \leq 2\int_{t_o}^{t} l(s)(1+\|x(t)\|^2 ds,\ \forall t \in \tilde{I}.$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\|x(t)\|^2}_{=:w(t)} \leq \underbrace{[\|x(t_o)\|^2 + 2\int_{t_o}^{t} l(s)ds]}_{=:g(t)} + \underbrace{2\int_{t_o}^{t} l(s)\|x(s)\|^2 ds}_{\leq c\int_{t_o}^{t}\|x(s)\|^2 ds}, \quad \forall t \in \tilde{I},$$

wobei $\quad c := 2\sup_{s\in I}|l(s)|,\ x_o := x(t_o)$.
Lemma 8.19: $w(t) = \|x(t)\|^2 \leq \max_{t\in I}|g(t)|\exp(c(t-t_o)),\ \forall t \in \tilde{I}$.
$\rightsquigarrow$ die beliebig gewählte lokale Lösung ist beschränkt! $\square$

Beispiel 8.21
Gleichung der Populationsdynamik: $x'(t) = ax(t) - bx(t)^2, x(t_o) = x_o$.
"Exakte" Formulierung der DGL:

$$x'(t) = f(x(t)), \quad f(v) := \begin{cases} av - bv^2 & , v \geq 0 \quad (a,b>0) \\ 0 & , v < 0 \end{cases}$$

Ziel: Anwendung von Satz 8.20.
$\rightsquigarrow$ *$f : I\!R \to I\!R$ ist stetig, $\langle r, \tilde{r}\rangle := r\tilde{r},\ \forall r, \tilde{r} \in I\!R$.*

$$\rightsquigarrow f(v)v = \begin{cases} av^2 - bv^3 & , 0 \leq av^2 \leq a(1+v^2), v > 0 \\ 0, & v < 0 \end{cases}$$

8.20 $\rightsquigarrow$ die DGL der Populationsdynamik besitzt auf jedem Intervall der Form $[t_o, t_o+T]$ eine Lösung!

Bemerkung 8.22
Ist $(\tilde{I}, x)$ eine lokale Lösung von (1), und gilt für alle $t \in \tilde{I}$, daß $(x(t), t) \in M \subseteq I\!R^m \times I$, so kann man mit der Technik im Beweis von Satz 8.20 zeigen, daß x beschränkt ist, falls

$$\langle f(v,t), v\rangle \leq l(t)(1 + \|v\|^2), \quad \forall (v,t) \in M$$

Ist I rechtsseitig offen, d.h. $I = [t_o, t_o + T[$ oder $I = [t_o, +\infty[$, so bleibt die Aussage von Satz 8.20 richtig, wenn man fordert, daß l auf jedem Intervall der Form $[t_o, t]$, $\forall t \in I$, beschränkt und Riemann-integrierbar ist.

Folgerung 8.23
Es sei $I := [t_o, t_o + T], (T > 0)$, $f : I\!R^m \times I \to I\!R^m$ sei stetig, und es existiere eine beschränkte R-integrierbare Funktion $l : I \to I\!R$ so, daß

$$(\star) \qquad \|f(v,t)\| \leq l(t)(1 + \|v\|), \quad \forall (v,t) \in I\!R^m \times I$$

($\|\cdot\|$ ist dabei eine beliebige Norm im $I\!R^m$).
Dann existiert mindestens eine globale Lösung von (1).

Beweis:
Ziel: Anwendung von Satz 8.20
Da alle Normen im $I\!R^m$ äquivalent sind, ist (nur durch Multiplikation von l mit einer positien Konstanten) $(\star)$ auch erfüllt für die Euklidische Norm. Dann gilt für das zugehörige Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}\langle f(v,t), v\rangle &\leq \|f(v,t)\|\|v\| \leq l(t)(1 + \|v\|)\|v\| \\ &\leq l(t)(1 + \|v\|)(1 + \|v\|) \leq 2l(t)(1 + \|v\|^2)\end{aligned}$$

(unter Verwendung der Ungleichung $2\|v\| \leq 1 + \|v\|^2$) □

Folgerung 8.23 besagt, daß DGLen, deren rechte Seiten linear wachsen, stets globale Lösungen besitzen. Aber: Man beachte, daß Folgerung 8.23 nicht auf Beispiel 8.21 anwendbar ist!

Nächstes Ziel: Eindeutigkeit von Lösungen!

Satz 8.24
Es sei $I \subseteq I\!R$ ein Intervall, t_o sei linker Randpunkt von I, $x_o \in I\!R^m$, und $f : I\!R^m \times I \to I\!R^m$ sei stetig.
Ferner existiere ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $I\!R^m$ mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|$, und eine Funktion $l \in C(I)$ so, daß

$$\langle f(v,t) - f(\tilde{v},t), v - \tilde{v}\rangle \leq l(t)\|v - \tilde{v}\|^2, \forall v, \tilde{v} \in I\!R^m, \forall t \in I.$$

Dann besitzt (1) eine globale Lösung, und jede lokale Lösung von (1) ist Einschränkung dieser globalen Lösung.

(Bem.: Es gibt Beispiele, die eine einzige globale Lösung besitzen, aber unendlich viele lokale Lösungen, die keine Einschränkung der globalen Lösung sind.)

Beweis:
1. Existenz (mit Hilfe von Satz 8.20)
Wir zeigen, daß die Wachstumsbedingung von Satz 8.20 erfüllt ist.
$\tilde{v} = 0 \rightsquigarrow \langle f(v,t) - f(0,t), v\rangle \leq l(t)\|v\|^2$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \langle f(v,t), v\rangle &\leq \langle f(0,t), v\rangle + l(t)\|v\|^2 \\ &\leq \|f(0,t)\|\|v\| + l(t)\|v\|^2 \\ &\leq \underbrace{(\|f(0,t)\| + l(t))}_{=:\tilde{l}(t)}(1 + \|v\|^2), \quad \forall v \in I\!R^m, \forall t \in I \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Satz 8.20 (man beachte Bemerkung 8.22) liefert die Existenz einer globalen Lösung.

2. Es seien $(\tilde{I}, \tilde{x}), (I, x)$ eine lokale bzw. globale Lösung von (1).
Wir zeigen: $\tilde{x}(t) = x(t), \quad \forall t \in \tilde{I}$.
Wir betrachten die Funktion $\varphi(t) := \exp(-2L(t))\|x(t) - \tilde{x}(t)\|^2$, $\forall t \in \tilde{I}$,
wobei $L(t) := \int\limits_{t_o}^{t} l(s)ds$, $\forall t \in I$.
$\rightsquigarrow \varphi(t_o) = 0$, da $x(t_o) = \tilde{x}(t_o) = x_o$,

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \varphi'(t) &= \|x(t) - \tilde{x}(t)\|^2(-2L(t))\exp(-2L(t)) \\ &\quad +2\exp(-2L(t))\langle x'(t) - \tilde{x}'(t), x(t) - \tilde{x}(t)\rangle \\ &\quad \text{(vgl. Bws. von 8.19)} \\ &= 2\exp(-2L(t))[\langle x'(t)-\tilde{x}'(t), x(t)-\tilde{x}(t)\rangle - l(t)\|x(t)-\tilde{x}(t)\|^2], \ \forall t \in \tilde{I} \\ &= \underbrace{2\exp(-2L(t))}_{\geq 0}\underbrace{[\langle f(x(t),t)-f(\tilde{x}(t),t), x(t)-\tilde{x}(t)\rangle - l(t)\|x(t)-\tilde{x}(t)\|^2]}_{\leq 0 \quad \textit{nach Voraussetzung}, \forall t \in \tilde{I}} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \varphi'(t) \leq 0, \quad \forall t \in \tilde{I}$,
$\rightsquigarrow \varphi$ ist monoton fallend, $\rightsquigarrow 0 \leq \varphi(t) \leq \varphi(t_o) = 1\|x_o - x_o\|^2 = 0$,
$\rightsquigarrow \varphi(t) = 0$, $\forall t \in\tilde{}$ $\quad \rightsquigarrow \tilde{x}(t) = x(t)$, $\forall t \in \tilde{I}$. □

Beispiel 8.25
DGL der Populationsdynamik (Fortsetzung von Beispiel 8.21):

$$f(v) := \begin{cases} av - bv^2 & ,v \geq 0, (a,b > 0) \\ \quad 0 & ,v < 0 \end{cases}.$$

Nachprüfen der Voraussetzungen von Satz 8.24: (o.B.d.A. $v < \tilde{v}$)

$$(f(v)-f(\tilde{v}))(v-\tilde{v}) = \begin{cases} (a(v-\tilde{v}) - b(v^2 - \tilde{v}^2))(v - \tilde{v}) & ,v, \tilde{v} \geq 0 & \leq a(v-\tilde{v}) \\ (-a\tilde{v} + b\tilde{v}^2)(v - \tilde{v}) & ,v < 0 \leq \tilde{v} & ?? \\ 0 & ,v, \tilde{v} < 0 & = 0 \end{cases}$$

Die Abschätzung in Satz 8.24 gilt also für alle $v, \tilde{v} \geq 0$, d.h. für den Bereich, in dem die Lösungen der DGL liegen. Folglich liefert der Beweisweg die Übereinstimmung von lokaler und eingeschränkter globaler Lösung.

Folgerung 8.26 *(Cauchy/Lipschitz)*
Es sei $I \subseteq I\!R$ ein Intervall, $t_o \in I$ linker Randpunkt von I. Es sei $f : I\!R^m \times I \to I\!R^m$ stetig, und es existiere eine Konstante $L_o > 0$ so, daß

$$\|f(v,t) - f(\tilde{v},t)\| \leq L_o\|v - \tilde{v}\|, \forall v, \tilde{v} \in I\!R^m, \quad \forall t \in I.$$

Dann existiert für alle $x_o \in I\!R^m$ eine L"osung von (1), und jede lokale Lösung ist Einschränkung dieser Lösung.

<u>**Beweis:**</u>
Die Lipschitz-Bedingung für f gilt (mit einer evtl. veränderten Konstanten L_o) auch für die Euklidische Norm $\|\cdot\|$.

$$\rightsquigarrow \langle f(v,t) - f(\tilde{v},t), v - \tilde{v}\rangle \leq \|f(v,t) - f(\tilde{v},t)\|\|v - \tilde{v}\| \\ \leq L_o\|v - \tilde{v}\|^2, \forall v, \tilde{v} \in I\!R^m$$

$\rightsquigarrow$ Voraussetzungen von Satz 8.24 erfüllt mit $l(t) := L_o$. □

Bemerkung 8.27
Die Aussage von 8.26 bleibt richtig, falls anstelle von L_o eine stetige Funktion $l : I \to I\!R$ in der Abschätzung
"$\|f(v,t) - f(\tilde{v},t)\| \leq l(t)\|v - \tilde{v}\|$" auftritt. Dies hat lediglich Konsequenzen für unbeschränkte Intervalle I!

Für kompaktes I existiert ein alternativer Beweis von Folgerung 8.26 mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Dazu betrachten wir den linearen Raum $X := C_m(I), I = [t_o, t_o + T]$. Wir betrachten die folgenden Normen auf X:

$$\|x\|_k := \sup_{t\in I} \exp(-k(t - t_o))\|x(t)\|, \; k > 0 (\|\cdot\| - \textit{ Norm im } I\!R^m)$$

Dreiecksungleichung $\|x + y\|_k \leq \|x\|_k + \|y\|_k$, und $\|\lambda x\|_k = |\lambda|\|x\|_k$ folgen analog zum Nachweis der Normeigenschaften für die übliche Norm; $\|x\|_k \geq 0, \forall x \in X$ und $\|x\|_k = 0$ gdw. $x = \Theta$.
Es gilt überdies: $\exp(-kT) \sup_{t\in I} \|x(t)\| \leq \|x\|_k \leq \sup_{t\in I} \|x(t)\|$,
d.h. die übliche Norm in X und die "neuen" Normen $\|\cdot\|_k, \forall k > 0$, sind äquivalent!

Fixpunktgleichung: $x = Fx, (Fx)(t) := x_o + \int_{t_o}^{t} f(x(s), s)ds, \forall t \in I, \forall x \in X$.
(Lemma 8.7 besagt, daß unter den Voraussetzungen jede L"osung von (1) Fixpunkt von F ist und umgekehrt.)

Der Banachraum $(X, \|\cdot\|_k)$, ($k > 0$ fixiert) ist (wegen der Äquivalenz der Normen!) vollständig.
Wir zeigen: F ist kontraktiv bez. $\|\cdot\|_k$ für ein geeignet gewähltes $k > 0$.

$$\begin{aligned}
\|(Fx)(t) - (F\tilde{x})(t)\| &= \|\int_{t_o}^{t} [f(x(s), s) - f(\tilde{x}(s), s)]ds \\
&\leq \int_{t_o}^{t} \|f(x(s), s) - f(\tilde{x}(s), s)\|ds \\
&\leq L_o \int_{t_o}^{t} \|x(s) - \tilde{x}(s)\|ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow \exp(-k(t-t_o))\|(Fx)(t) - (F\tilde{x})(t)\| \\
&\leq L_o \exp(-k(t-t_o)) \int_{t_o}^{t} \exp(k(s-t_o)) \underbrace{[\exp(-k(s-t_o))\|x(s) - \tilde{x}(s)\|]}_{\leq \|x-\tilde{x}\|_k} ds \\
&\leq (L_o \exp(-k(t-t_o)) \int_{t_o}^{t} \exp(k(s-t_o))ds) \|x - \tilde{x}\|_k \\
&= L_o \exp(-k(t-t_o))[\frac{1}{k}\exp(k(s-t_o))]_{t_o}^{t} \|x-\tilde{x}\|_k \\
&= \frac{L_o}{k}(1 - \exp(-k(t-t_o))\|x - \tilde{x}\|_k \leq \frac{L_o}{k}\|x-\tilde{x}\|_k
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow (Fx) - F\tilde{x}\|_k \leq \frac{L_o}{k}\|x - \tilde{x}\|_k \rightsquigarrow$ *F ist kontraktiv bez. $\|\cdot\|_k$, falls $L_o < k$.* $\square$

Abschließendes Ziel (für Kap. 8.2): "Störungsresultat" für Anfangswertprobleme bei Fehlern in der rechten Seite und in den Anfangswerten.

Satz 8.28
Es sei $I = [t_o, t_o + T]$, un für $f : \mathbb{R}^m \times I \to \mathbb{R}^m$ seien die Voraussetzungen von Folgerung 8.26 erfüllt. Es seien $g \in C_m(I), \alpha \in \mathbb{R}^m, \varepsilon_o, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, und $x_o \in \mathbb{R}^m$. x sei die Lösung von

$$x'(t) = f(x(t), t),\ \forall t \in I,\ x(t_o) = x_o,$$

x_ε sei die eindeutig bestimmte Lösung von

$$x_\varepsilon'(t) = f(x_\varepsilon(t), t) + \varepsilon_1 g(t),\ \forall t \in I,\ x_\varepsilon(t_o) = x_o + \varepsilon_o \alpha.$$

Dann gilt: $\exists K_o > 0 : \sup_{t \in I} \|x(t) - x_\varepsilon(t)\| < K_o(|\varepsilon_o| + |\varepsilon_1|)$.

Beweis:

Es gilt (8.7): $\left.\begin{aligned} x(t) &= x_o + \int\limits_{t_o}^{t} f(x(s),s)ds, \\ x_\varepsilon(t) &= x_o + \varepsilon\alpha + \int\limits_{t_o}^{t} f(x_\varepsilon(s),s)ds + \varepsilon_1 \int\limits_{t_o}^{t} g(s)ds \end{aligned}\right\} \forall t \in I.$

$$\rightsquigarrow \|x(t) - x_\varepsilon(t)\| \leq |\varepsilon_o|\|\alpha\| + \int_{t_o}^{t} \underbrace{\|f(x(s),s) - f(x_\varepsilon(s),s)\|}_{\leq L_o\|x(s)-x_\varepsilon(s)\|} ds + |\varepsilon_1| \int_{t_o}^{t} \|g(s)\|ds$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\|x(t) - x_\varepsilon(t)\|}_{w(t)} \leq [|\varepsilon_o|\|\alpha\| + |\varepsilon_1| \int_{t_o}^{t_o+T} \|g(s)\|ds] + L_o \int_{t_o}^{t} \underbrace{\|x(s) - x_\varepsilon(s)\|}_{w(s)} ds, \forall t \in I$$

$\rightsquigarrow$ Anwendung von Lemma 8.19 (Gronwall):

$\rightsquigarrow w(t) = \|x(t) -_\varepsilon (t)\| \leq [|\varepsilon_o|\|\alpha\| + |\varepsilon_1| \int\limits_{t_o}^{t_o+T} \|g(s)\|ds] \exp(L_o T).$

$\rightsquigarrow \sup\limits_{t\in I} \|x(t) - x_\varepsilon(t)\| \leq \exp(L_o T) \max\{\|\alpha\|, \int\limits_{t_o}^{t_o+T} \|g(s)\|ds\}(|\varepsilon_o| + |\varepsilon_1|).$ □

8.3 Anfangswertaufgaben für lineare DGL-Systeme

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

(2) $\qquad x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad \forall t \in [t_o, t_o + T],\ x(t_o) = x_o,$

wobei $A : I \to L(\mathbb{R}^m)$, $b : I \to \mathbb{R}^m$, $x_o \in \mathbb{R}^m$.

Folgerung 8.29
Es seien $A \in C(I, L(\mathbb{R}^m)), b \in C_m(I)$.
Dann hat (2) für jedes $x_o \in \mathbb{R}^m$ genau eine Lösung.

Beweis:
Anwendung von Folgerung 8.26. Die Funktion f (von dort) hat hier die Gestalt
$f(v,t) := A(t)v + b(t)$, $\forall v \in \mathbb{R}^m, \forall t \in I$.
$\rightsquigarrow f : \mathbb{R}^m \times I \to \mathbb{R}^m$ ist stetig, und es gilt:

$$\begin{aligned} \|f(v,t) - f(\tilde{v},t)\| &= \|A(t)v - A(t)\tilde{v}\| = \|A(t)(v - \tilde{v})\| \\ &\leq \|A(t)\|\|v - \tilde{v}\| \leq \sup_{t\in I} \|A(t)\|\|v - \tilde{v}\| \\ &\quad (\forall v, \tilde{v} \in \mathbb{R}^m, \forall t \in I) \end{aligned}$$

Die Abbildung $t \to \|A(t)\|$ (von I in $\mathbb{R}$) ist nach Voraussetzung stetig. Folglich gilt $L_o := \sup\limits_{t\in I} \|A(t)\| < +\infty$.

$\rightsquigarrow$ Die Aussage folgt also jetzt aus Folgerung 8.26. $\square$

Ziel: Berechnung der eindeutig bestimmten Lösung von (2).
Wir betrachten dazu zunächst die sog. "homogene" DGL

$$(3) \qquad x'(t) = A(t)x(t), \quad \forall t \in [t_o, t_o + T],$$

wobei $A \in C(I, L(\mathbb{R}^m))$ vorausgesetzt wird.

Lemma 8.30
Sei $A \in C(I, L(\mathbb{R}^m))$.
$\mathcal{L} := \{x \in C_m^1(I) : x$ ist Lösung von (3)$\}$ ist ein linearer Raum.
Außer $x = \Theta$ verschwindet kein Element von $\mathcal{L}$ in einem Punkt von I.

Beweis:
$C_m^1(I)$ ist ein linearer Raum. Seien $x, \tilde{x}$ Lösungen von (3). Dann gilt für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha x + \beta \tilde{x})' = \alpha x' + \beta \tilde{x}' = \alpha A(\cdot)x + \beta A(\cdot)\tilde{x} = A(\cdot)(\alpha x + \beta \tilde{x})$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{L}$ ist linearer Raum.

Annahme: $\exists \tilde{x} \in \mathcal{L}, \tilde{x} \neq \Theta, \exists \tilde{t} \in I : \tilde{x}(\tilde{t}) = 0$.
Nach Folgerung 8.29 hat die Aufgabe $x'(t) = A(t)x(t), \forall t \in I$, $x(\tilde{t}) = 0$, genau eine Lösung (obwohl $\tilde{t}$ i.a. nicht linker Randpunkt von I ist, liefern die allgemeinen Resultate die Existenz und Eindeutigkeit). Offenbar ist aber $x = \Theta$ Lösung, und folglich müßte $\tilde{x} = \Theta$ gelten. $\rightsquigarrow$ Widerspruch! $\square$

Bemerkung 8.31
Betrachtet man $X := C_m^1(I)$ mit der Norm $\|x\| := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$, wobei $\|z\|_\infty := \sup\limits_{t \in I} \|z(t)\|_{\mathbb{R}^m}$, so gilt für den Operator

$$\bar{A} : X \to Y := C_m(I), \quad (\bar{A}x)(t) := x'(t) - A(t)x(t), \quad \forall t \in I,$$

daß $\bar{A} \in L(X, Y)$, und $N(\bar{A}) = \mathcal{L}$. (Übung).

Definition 8.32
Es sei $A \in C(I, L(\mathbb{R}^m))$, und $\mathcal{L}$ sei wie in 8.30 definiert.
Ein System $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{L}$ heißt Fundamentalsystem von (3), falls für alle $t \in I$, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t) \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig sind.

Lemma 8.33
Es sei $A \in C(I, L(\mathbb{R}^m))$.

a) *Es existiert ein Fundamentalsystem $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ von (3) mit*
$\quad \varphi_j(t_o) = e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \forall j = 1, \ldots, m.$

b) *Wir definieren für jedes $t \in I$, $Q(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$,*

$Q(t)y := \sum\limits_{j=1}^{m} y_j \varphi_j(t), \quad \forall y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m,$

wobei $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ das Fundamentalsystem aus a) ist.

Dann gilt:

- $Q(t_o)y = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$;
- $Q(t) \in L(\mathbb{R}^m)$ *ist bijektiv,* $\forall t \in I$ *(d.h.* $N(Q(t)) = \{0\}$*);*
- *für alle* $a \in C^1_m(I)$ *gilt:* $Q(\cdot)a(\cdot) \in C^1_m(I)$, *und* $\frac{d}{dt}[Q(t)a(t)] = Q(t)a'(t) + A(t)Q(t)a(t), \quad \forall t \in I$;
- *für alle* $x_o \in \mathbb{R}^m$ *ist* $Q(\cdot)x_o$ *Lösung von (3) mit Anfangswert* x_o

Beweis:

a) Nach Folgerung 8.29 existieren eindeutig bestimmte Lösungen φ_j der Aufgabe

$$x'(t) = A(t)x(t), \, \forall t \in I, \, x(t_o) = e_j, \, \forall j = 1, \ldots, m.$$

zu zeigen: $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{L}$ ist Fundamentalsystem.

Annahme: $\exists \tilde{t} \in I$ so, daß $\varphi_1(\tilde{t}), \ldots, \varphi_m(\tilde{t})$ linear abhängig sind.

$\rightsquigarrow \exists c = (c_1, \ldots, c_m) \neq 0 : \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(\tilde{t}) = 0.$

Wir betrachten $\tilde{x}(t) := \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(t), \, \forall t \in I. \rightsquigarrow \tilde{x} \in \mathcal{L}, \, \tilde{x}(\tilde{t}) = 0 \rightsquigarrow \tilde{x} = \Theta.$

$\rightsquigarrow \tilde{x}(t_o) = 0 \rightsquigarrow \sum\limits_{i=1}^{m} c_i e_i = 0 \rightsquigarrow$ Widerspruch!

b) $Q(t)$ ist darstellbar als folgende Matrix:

$Q(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) \qquad$ ($\varphi_i(t)$ sind jetzt Spalten)

- $Q(t_o)y = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j e_j = y$;
- $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ sind für jedes $t \in I$ linear unabhängig, $\rightsquigarrow Q(t)\mathbb{R}^m = R(Q(t)) = \mathbb{R}^m, \, N(Q(t)) = \{0\}$;
- Sei $a \in C^1_m(I)$. $\rightsquigarrow Q(t)a(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j(t)\varphi_j(t) \rightsquigarrow Q(\cdot)a(\cdot) \in C^1_m(I)$, und

$$\begin{aligned} [Q(\cdot)a(\cdot)]'(t) &= \sum_{j=1}^{m} [a_j'(t)\varphi_j(t) + a_j(t)\varphi_j'(t)] \\ &= Q(t)a'(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j(t)A(t)\varphi_j(t) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow [Q(\cdot)a(\cdot)]'(t) = Q(t)a'(t) + A(t)Q(t)a(t)$;

· Sei $x_o \in I\!R^m$.
$\rightsquigarrow x(\cdot) := Q(\cdot)x_o = \sum\limits_{j=1}^{m} x_{oj}\varphi_j(\cdot) \in \mathcal{L}$,
und $x(t_o) = Q(t_o)x_o = x_o$ $\square$

Satz 8.34
Es seien $A \in C(I, L(I\!R^m)), b \in C_m(I), x_o \in I\!R^m$, und $Q(t)$, $t \in I$, sei wie in 8.33 definiert.
Dann ist die Funktion $x \in C^1_m(I)$, $x(t) := Q(t)[x_o + \int\limits_{t_o}^{t} Q^{-1}(s)b(s)ds]$, $\forall t \in I$, die eindeutig bestimmte Lösung von (2).

<u>**Beweis:**</u>
$Q^{-1}(t)$ existiert für jedes $t \in I$ nach Lemma 8.33 b). Nach Störungslemma 7.37 gilt $Q^{-1} \in C(I, L(I\!R^m))$, da auch $Q \in C(I, L(I\!R^m))$ ist.
$\rightsquigarrow$ das Integral $\int\limits_{t_o}^{t} Q^{-1}(s)b(s)ds$ ist als komponentenweises Integral über stetige Integranden wohl-definiert.
Es genügt zu zeigen: $x \in C^1_m(I)$ und ist Lösung von (2). (Die Eindeutigkeit folgt aus 8.29!)
Wir definieren $a(t) := x_o + \int\limits_{t_o}^{t} Q^{-1}(s)b(s)\, ds, \quad \forall t \in I.$
Nach 8.33 gilt: $x \in C^1_m(I)$, falls $a \in C^1_m(I)$.
Es gilt: $\frac{d}{dt}\int\limits_{t_o}^{t} Q^{-1}(s)b(s)ds = Q^{-1}(t)b(t)$. (Kap. 6.2, Satz 6.44 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
$\rightsquigarrow x \in C^1_m(I)$ und

$$\begin{aligned} 8.33 \rightsquigarrow x'(t) &= Q(t)a'(t) + A(t)Q(t)a(t) = Q(t)Q^{-1}(t)b(t) + A(t)x(t) \\ x(t_o) &= Q(t_o)x_o = x_o \quad \rightsquigarrow x \text{ ist Lösung von (2).} \end{aligned}$$ $\square$

Bemerkung 8.35
Durch Satz 8.34 wird die Berechnung der eindeutig bestimmten Lösung von (2) für beliebige $b \in C_m(I)$ und $x_o \in I\!R^m$ auf die Berechnung eines Fundamentalsystems $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ mit $\varphi_j(x_o) = e_j$, $j = 1, \ldots, m$, von (3) zurückgeführt. Folglich ergibt sich die Frage, ob, wann und wie man solche Fundamentalsysteme von (3) bestimmen kann.
Wir gehen darauf in Beispielen ein und behandeln danach den Fall $A(t) \equiv A$.

Beispiel 8.36 *(skalare lineare DGL 1. Ordnung)*
$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \quad \forall t \in I$, $x(t_o) = x_o$, *Voraussetzung:* $a, b \in C(I)$.
Lösung der homogenen DGL: $\varphi(t) = \exp(\int\limits_{t_o}^{t} a(s)ds)$, $\forall t \in I$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \varphi'(t) &= a(t)\exp(\int_{t_o}^{t} a(s)ds) = a(t)\varphi(t) \\ \varphi(t_o) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.34 \rightsquigarrow x(t) &= \varphi(t)[x_o + \int_{t_o}^{t} \frac{1}{\varphi(s)} b(s)ds] \\ &= \exp(\int_{t_o}^{t} a(s)ds)[x_o + \int_{t_o}^{t} \exp(\int_{t_o}^{s} a(u)du) b(s)ds], \, \forall t \in I \end{aligned}$$

ist einzige Lösung der skalaren linearen DGL 1. Ordnung.

Beispiel 8.37 *(skalare lineare DGL m-ter Ordnung)*

$$(\star)\ x^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)x^{(m-i)}(t) + b(t),\ \forall t \in I,\ x^{(j)}(t_o) = x_{oj},\ j = 0, \ldots, m-1$$
$$(I = [t_o, t_o + T],\ m \in I\!N),$$

wobei $a_i, b \in C(I)$, $\forall i = 1, \ldots, m$, $x_{oj} \in I\!R$, $j = 0, \ldots, m-1$.

Analog zu Bemerkung 8.1 transformieren wir diese DGL in ein DGL-System 1. Ordnung (mit m Gleichungen). Wir führen dazu die folgenden Bezeichnungen ein:
$\bar{x}_o := (x_{o,o}, x_{o,1}, \ldots, x_{o,m-1})^T$ *und* $\bar{x}(\cdot) := (x(\cdot), x'(\cdot), \ldots, x^{(m-1)}(\cdot))^T$,

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_m(t) & a_{m-1}(t) & & \ldots & & a_1(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{b}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

$\rightsquigarrow$ $(\star)$ *ist im Sinne von Bemerkung 8.1 äquivalent zu folgendem DGL-System:*

$$(\star\star) \qquad \bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t), \quad \forall t \in I,\ \bar{x}(t_o) = \bar{x}_o,$$

d.h. $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(\cdot) \\ x'(\cdot) \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(\cdot) \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x(\cdot) \\ x'(\cdot) \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(\cdot) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung ist $A : I \to L(I\!R^m)$ *stetig, und ebenfalls* $\bar{b} : I \to I\!R$.
$\rightsquigarrow$ *allgemeine Theorie ist anwendbar, z.B. existiert also genau eine Lösung des DGL-Systems, und diese hat die Gestalt wie in Satz 8.36. Das Ergebnis von 8.34 läßt sich auf diesen besonderen Fall spezialisieren.*

Wir betrachten zur Vereinfachung nur den Fall $m = 2$, d.h.

$$x''(t) = a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) + b(t), \quad \forall t \in I,\ x(t_o) = x_{oo},\ x'(t_o) = x_{o1}$$

(Voraussetzung: $a_1, a_2, b \in C(I)$)
Es seien $\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \end{pmatrix} \in C_2^1(I)$, $\varphi_i(t_o) = e_i$, $i = 1, 2$, ($e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1}$), mit
$\varphi_i'(t) = A(t)\varphi_i(t)$, $\forall t \in I$,
d.h. $\begin{pmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_2(t) & a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \end{pmatrix}, \quad \forall t \in I.$
Lösungsgestalt für ($\star\star$) (mit $m = 2$) nach Satz 8.34:

$$\bar{x}(t) = Q(t)[\bar{x}_o + \int\limits_{t_o}^{t} Q^{-1}(s)\bar{b}(s)ds],$$

wobei $Q(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{21}(t) \\ \varphi_{12}(t) & \varphi_{22}(t) \end{pmatrix}.$
Insbeondere interessiert uns nur die erste Komponente $x(\cdot)$ von $\bar{x}(\cdot)$, d.h. die Lösung der obigen skalaren DGL 2. Ordnung.
Nach Lemma 8.33 ist $Q(t)$ nichtsingulär für alle $t \in I$. Es gilt:

$$Q(t)^{-1} = \frac{1}{w(t)} \begin{pmatrix} \varphi_{22}(t) & -\varphi_{21}(t) \\ -\varphi_{12}(t) & \varphi_{11}(t) \end{pmatrix},$$

$w(t) := \det Q(t) = \varphi_{11}(t)\varphi_{22}(t) - \varphi_{12}(t)\varphi_{21}(t)$
("Wronski-Determinante")

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow x(t) &= \varphi_{11}(t)x_{oo} + \varphi_{21}(t)x_{o1} \\ &\quad + \varphi_{11}(t)\int\limits_{t_o}^{t} \frac{-\varphi_{21}(s)b(s)}{w(s)}ds + \varphi_{21}(t)\int\limits_{t_o}^{t} \frac{\varphi_{11}(s)b(s)}{w(s)}ds \\ &= \varphi_{11}(t)[x_{oo} - \int\limits_{t_o}^{t} \frac{\varphi_{21}(s)b(s)}{w(s)}ds] + \varphi_{21}(t)[x_{o1} + \int\limits_{t_o}^{t} \frac{\varphi_{11}(s)b(s)}{w(s)}ds] \end{aligned}$$

Beispiel 8.38 *(DGL-System mit konstanten Koeffizienten)*
Spezialfall von (2): $A(t) \equiv A$, A reelle (m, m)-Matrix.
In diesem Fall läßt sich die "Fundamentalmatrix" $Q(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ explizit angeben. Es gilt:

$$Q(t) = \exp(A(t - t_o)),\ \forall t \in I \quad \textit{(vgl. Bem. 7.40 bzw. Algebra-Vorlesung)}$$

Als Anwendung der Jordan-Normalform wurde in der Algebra-Vorlesung die Matrix $\exp(At)$ wie folgt charakterisiert:

Satz 8.39
Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte der Matrix A, und μ_j sei die Größe des größten zu λ_j gehörenden Jordan-Kästchens, $j = 1, \ldots, r$, wobei $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s$ komplexe und $\lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_r$ reelle Eigenwerte von A sind. Dann gilt

$$\exp(At) = \sum_{j=1}^{s} (B_j(t) \cos \omega_j t + C_j(t) \sin \omega_j t) \exp(a_j t) + \sum_{j=2s+1}^{r} D_j(t) \exp(\lambda_j t),$$

wobei $\lambda_j = a_j + i\omega_j$, $j = 1, \ldots, s$, und die B_j, C_j, D_j (reelle) Polynom-Matrizen vom Grad $< \mu_j$ sind.
Die eindeutig bestimmte Lösung von $x'(t) = Ax(t) + b(t)$, $\forall t \in I$, $x(t_o) = x_o$, ist

$$x(t) = \exp(A(t - t_o))x_o + \int_{t_o}^{t} \exp(A(t-s))b(s)\, ds, \quad \forall t \in I.$$

$((Q(t)Q^{-1}(s))' = \exp(A(t - t_o)) \exp(-A(s - t_o)) = \exp(A(t - s)))$

<u>**Beweis:**</u>
siehe Algebra-Vorlesung, Satz 8.34, Bemerkung 7.40.

Bemerkung 8.40
Betrachtet man die Aufgabe (2) auf dem unendlichen Intervall $[t_o, +\infty[$, wobei $A \in C(I, L(\mathbb{R}^m)), b \in C_m(I)$, so existiert nach Folgerung 8.29 (8.26 bzw. Bemerkung 8.27) auch genau eine Lösung von (2) auf I.
(wegen $f(v,t) = A(t)v + b(t)$, $\|f(v,t) - f(\tilde{v},t)\| \le \underbrace{\|A(t)\|}_{L(t)} \|v - \tilde{v}\|$, $L : I \to \mathbb{R}$ stetig, und die allgemeine Theorie ist anwendbar.)

Folgerung 8.41
Für die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ der Matrix A gelte $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, $\forall i = 1, \ldots, r$.
$x \in C_m^1([t_o, +\infty[)$ sei die eindeutig bestimmte Lösung (gemäß 8.40) von
$x'(t) = Ax(t), \quad \forall t \in [t_o, +\infty[$, $x(t_o) = x_o$.
Dann gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

<u>**Beweis:**</u>
Nach Satz 8.39 gilt: $x(t) = \exp(A(t-t_o))x_o$, $\forall t \in [t_o, +\infty[$, und $\exp(A(t-t_o))$ hat die dortige Struktur.
Die Aussage folgt nun daraus, daß $\exp(a_j t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $j = 1, \ldots, s$, $\exp(\lambda_j t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $j = 2s + 1, \ldots, r$, und diese Konvergenz schneller ist als die Divergenz der Polynome (in B_j, C_j, D_j) gegen ∞.

Beispiel 8.42 *(mechanische Schwingungen)*
Es sei W–Gewicht, R–Rückstellkraft der Feder, D–Dämpfungskraft, F–äußere Kraft, dann gilt:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= W+R+D+F = mg - K(\Delta l + x) - c\dot{x} + F, \quad (mg = K\Delta l) \\ &= -Kx - c\dot{x} + F \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t), \quad , t \in [0, +\infty]$
F–periodische Erregung, $F(t) = F_o \cos\omega_o t$.
Voraussetzung: $c^2 < 4km$.

Ziel: Berechnung von x!
Transformation auf DGL-System 1. Ordnung (vgl. Bsp. 8.37): $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{F}{m}$.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F(t)}{m} \end{pmatrix}}_{=:b(t)}$$

$$\text{8.39} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \exp(A(t-t_o)) \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} + \int_o^t \exp(A(t-t_o)) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_o}{m}\cos\omega_o s \end{pmatrix}}_{=:b(s)} ds.$$

Eigenwerte von A:
$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda + \frac{c}{m} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda + \frac{c}{m}) + \frac{k}{m}$.
$0 = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m}$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow x_{1/2} &= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4km} \\ &= \underbrace{-\frac{c}{2m}}_{=:a} \pm i \underbrace{\frac{1}{2m}\sqrt{4km - c^2}}_{=:\omega}. \end{aligned}$$

Satz 8.39 $\rightsquigarrow \exp(At) = (C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)\exp(at)$ *mit gewissen Matrizen C_1, C_2.*

Berechnung von C_1, C_2:
$t = 0$: $I = (C_1 + (C_2 \cdot 0)) \cdot 1 = C_1 \rightsquigarrow C_1 = I$.
Wir betrachten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\exp(At) &= A\exp(At) \\ &= (-C_1\omega \sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t)\exp(at) \\ &\quad +(C_1\cos\omega t + C_2 \sin\omega t)a\exp(at) \\ &= (C_1(-\omega\sin\omega t + a\cos\omega t) + C_2(\omega\cos\omega t + a\sin\omega t))\exp(at) \end{aligned}$$

$t=0$: $A = C_1 a + C_2\omega = aI + \omega C_2 \rightsquigarrow C_2 = \frac{1}{\omega}(A - aI)$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \exp(At) &= (I\cos\omega t + \frac{1}{\omega}(A-aI)\sin\omega t)\exp(at)\\
&= \begin{pmatrix} \cos\omega t - \frac{a}{\omega}\sin\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\frac{k}{m\omega}\sin\omega t & \cos\omega t - (\frac{c}{m\omega}+\frac{a}{\omega})\sin\omega t \end{pmatrix}\exp(at)
\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \int_0^t \exp(A(t-s))\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_o}{m}\cos\omega_o t\end{pmatrix} ds$$
$$= \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-s)\frac{F_o}{m}\cos\omega_o s \\ (\cos\omega(t-s) - (\frac{c}{m\omega}+\frac{a}{\omega})\sin\omega(t-s))\frac{F_o}{m}\cos\omega_o s \end{pmatrix}\exp(a(t-s))ds.$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow x(t) &= [(\cos\omega t - \frac{a}{\omega}\sin\omega t)x(0) + \frac{1}{\omega}\sin\omega t\dot{x}(0)]\exp(at)\\
&\quad + \frac{F_o}{\omega m}\int_0^t \sin\omega(t-s)\exp(a(t-s))\cos\omega_o s\, ds, \quad \forall t\in[0,T]
\end{aligned}$$

ist Lösung unserer DGL $\quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o\cos\omega_o t,\ \forall t \in [0,T]$.

<u>Spezialfall:</u> Dämpfung ist vernachlässigbar, d.h. $c = 0 \rightsquigarrow a = 0, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$\rightsquigarrow x(t) = \cos\omega t\, x(0) + \frac{1}{\omega}\sin\omega t\,\dot{x}(0) + \frac{F_o}{\omega m}\int_0^t \sin\omega(t-s)\cos\omega_o s\, ds.$

Es gilt: $\sin\omega(t-s) = \sin\omega t\cos\omega s - \cos\omega t\sin\omega s$.

$\rightsquigarrow \int_0^t \sin\omega(t-s)\cos\omega_o s ds = \sin\omega t\int_0^t\cos\omega s\cos\omega_o s ds - \cos\omega t\int_0^t \sin\omega s\cos\omega_o s ds.$

1.Fall: $\omega \neq \omega_o \rightsquigarrow$ die beiden obigen Integrale berechnen sich dann zu $[\frac{\sin(\omega-\omega_o)s}{2(\omega-\omega_o)} + \frac{\sin(\omega+\omega_o)s}{2(\omega+\omega_o)}]_o^t$ *bzw.* $-[\frac{\cos(\omega-\omega_o)s}{2(\omega-\omega_o)} + \frac{\cos(\omega+\omega_o)s}{2(\omega+\omega_o)}]_0^t$.

$\rightsquigarrow x(\cdot)$ ist eine Funktion, die polynomial in $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\sin\omega_o t$, $\cos\omega_o t$ ist.

$\rightsquigarrow x(\cdot)$ ist oszillierend, aber mit fester Amplitude.

2.Fall: $\omega = \omega_o$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow x(t) &= \cos\omega_o t x(0) + \frac{1}{\omega_o}\sin\omega_o t\dot{x}(0)\\
&\quad + \frac{F_o}{\omega_o m}[\sin\omega_o t\int_0^t (\cos\omega_o s)^2 ds - \cos\omega_o t\int_0^t \sin\omega_o s\cos\omega_o s ds],
\end{aligned}$$

und diese beiden Integrale berechnen sich dann zu $[\frac{1}{2}s + \frac{1}{4\omega_o}\sin 2\omega_o s]_0^t$ *bzw.* $[\frac{1}{2\omega_o}(\sin\omega_o s)^2]_0^t$

$\rightsquigarrow$ $x(\cdot)$ ist eine Funktion, die polynomial in $\sin\omega_o t$, $\cos\omega_o t$ ist und den <u>kritischen</u> Term $\frac{F_o}{2\omega_o m}t\sin\omega_o t$ enthält!

$\rightsquigarrow$ *oszillierender Term mit wachsender Amplitude!*

Das ist der sog. Resonanzeffekt bzw. die sog. Resonanzkatastrophe (Frequenz der äußeren periodischen Erregung ist gleich der Eigenfrequenz ω*!)*

Bemerkung: Bei vorhandener Dämpfung $c > 0$ *entsteht der Term*

$$\frac{F_o}{2\omega_o m} t \exp(\frac{-c}{2m} t) \sin \omega_o t,$$

bei kleinem $c > 0$ *überwiegt zunächst* t*, und nur asymptotisch konvergiert die Amplitude gegen* 0.

9 Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Aufgabe: geg.: $f : D(f) \to I\!R^m$, $D(f) \subseteq I\!R^m$
ges.: $x_* \in D(f)$ mit $f(x_*) = (f_1(x_*), \ldots, f_m(x_*)) = 0$

Spezialfälle und Anwendungen

a) klassische Spezialfälle:
$f(x) := Ax - b$, $A \in L(I\!R^m)$, $b \in I\!R^m$ (lineares Gleichungssystem (GLS))
$f(x)$–Polynom in x $(m = 1)$ (Nullstellenbestimmung von Polynomen)

b) Minimumprobleme ohne Restriktionen:
$(\star)$ $\min\{g(x) : x \in I\!R^m\}$, $g : I\!R^m \to I\!R^m$.
Besitzt g alle partiellen Ableitungen, so sind Lösungen von $(\star)$ zugleich Lösungen des nichtlinearen GLS $f(x) = J_g(x) = 0$.

c) Bei der numerischen Berechnung komplizierter Aufgaben, z.B. DGLen, entstehen als Teilaufgaben nichtlineare GLS.
Beispiel: Zweipunkt-Randwertaufgabe für gewöhnliche DGL
$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, $\forall t \in [t_o, T]$, $f : I\!R^m \times I\!R \to I\!R$,
$r(x(t_o), x(T)) = 0$, $r : I\!R^m \times I\!R^m \to I\!R^m$. (vgl. Bem. 8.4)
Sei $x(\cdot; x_o)$ Lösung der DGL mit Anfangswert $x(t_o) = x_o$. Lösung des Randwertproblems bedeutet dann die Bestimmung eines Anfangswertes x_o mit $r(x_o, x(T, x_o)) = 0$. (Nichtlin. GLS für den Anfangswert x_o)

d) praktische Aufgabenstellungen führen oftmals direkt zu nichtlin. GLS, z.B. sind stationäre Zustände elektrischer Netzwerke Lösungen großer (m groß) nichtlinearer GLS.

Problematik der Aufgabenstellung

a) Die Situation bez. der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen ist kompliziert. Denkbar sind z.B.: keine, eine, endlich viele, abzählbar viele, überabzählbar viele Lösungen.
Beispiele:

i) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2 + \alpha, -x_1 + x_2^2 + \alpha)$, $\forall x_1, x_2 \in I\!R$.
$f(x_1, x_2) = 0 \leftrightarrow (x_1, x_2)$ Schnitt- oder Berührpunkte der beiden Parabeln $x_2 = x_1^2 + \alpha$ und $x_1 = x_2^2 + \alpha$ ist.

$$\begin{array}{rcl} \alpha > \frac{1}{4} & \rightsquigarrow & \text{keine Lösung} \\ \alpha = \frac{1}{4} & \rightsquigarrow & \text{genau eine Lösung} \\ \alpha \in [0, \frac{1}{4}[& \rightsquigarrow & \text{zwei Lösungen} \\ \alpha < 0 & \rightsquigarrow & \text{3 oder 4 Lösungen} \end{array}$$

ii) $f(x_1, x_2) = (\sin x_1 - x_2, x_2^2)$, $\quad (x_1, x_2) \in I\!R^2$.
$\rightsquigarrow$ Lösugen: $(x_1, x_2) : \sin x_1 = 0,\ x_2 = 0$.

iii) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1^2 - x_2^2)$, $\quad (x_1, x_2) \in I\!R^2$.
$\rightsquigarrow$ überabzählbar viele Lösungen: $(x_1, x_2) : x_1 = x_2$

b) Existenzsätze für Lösungen nichtlinearer GLS gibt es nicht für hinreichend allgemeine Fälle, z.B. ist die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes möglich, führt aber nur in speziellen Situationen zum Erfolg.
Notwendig für eine erfolgreiche numerische Behandlung ist eine "geometrisch isolierte" Lösung, d.h. in einer gewissen Umgebung gibt es keine weitere Lösung.
Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$
$\rightsquigarrow$ 0 ist nicht isoliert.
Später setzen wir als stärkere Bedingung voraus, daß in der Lösung x_* von $f(x) = 0$ die Jacobi-Matrix existiert und regulär ist.

c) Numerische Verfahren, die in endlich vielen Schritten eine Lösung bestimmen, sind eine Ausnahme. Deshalb finden hier generell nur iterative Verfahren vom Typ $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ Anwendung.
Im folgenden wird eine Klasse von Funktionen Φ_k $(k \in I\!N)$ konstruiert, so daß bei hinreichender Nähe des Startpunktes zur Lösung x_* Konvergenz $x_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} x_*$ gezeigt werden kann.

9.1 Newton- und Newton-ähnliche Verfahren

Die Grundidee eines iterativen Verfahrens zur Lösung nichtlinearer GLS $f(x) = 0$ besteht in der sukzessiven Linearisierung von f in der Iterierten x_k für alle $k \in I\!N_o$ und Berechnung von x_{k+1} als Nullstelle der linearisierten

Funktion.
Die Linearisierung von f hat die Gestalt

$$\tilde{f}_k : I\!R^m \to I\!R^m,\ \tilde{f}_k(x) = f(x_k) + A_k(x - x_k),\ \forall x \in I\!R^m,$$

wobei A_k eine (m,m)-Matrix ist ($\in L(I\!R^m)$).
x_{k+1} wird als Nullstelle der Linearisierung $\tilde{f}_k(x)$ bestimmt: $\tilde{f}_k(x_{k+1}) = 0$.
"Prototyp" einer solchen Linearisierung ist $A_k = f'(x_k)$, falls f Fréchet-differenzierbar ist. (vgl. Kap. 5.2)

Allgemeiner Verfahrensansatz:
Vor.: $D(f) \subseteq I\!R^m$ offen, $f : D(f) \to I\!R^m$ Fréchet-differenzierbar,

$$x_{k+1} := x_k - [F(x_{m_k}, h_k)]^{-1}(f(x_k)), \quad k \in I\!N_o, x_o \in D(f),$$

wobei $0 \le m_k \le k$ ($k \in I\!N$) und F wie folgt definiert ist:
$F : \{(x,h) : x \in D(f),\ h \in I\!R,\ x + he_j \in D(f)(j = 1, \dots, m)\} \to L(I\!R^m)$,
$F(x, 0) = f'(x),\ \forall x \in D(f)$
$F(x,h) = (\frac{1}{h}(f(x + he_1) - f(x)), \dots, \frac{1}{h}(f(x + he_m) - f(x))),\ h \neq 0.$

Spezialfälle dieser allgemeinen Verfahrensklasse:

a) $h_k = 0, m_k = k,\ \forall k$ (Newton-Verfahren)
$\rightsquigarrow x_{k+1} = x_k - [f'(x_k)]^{-1}(f(x_k)$

b) $h_k = 0, m_k = 0,\ \forall k$ (vereinfachtes Newton-Verfahren)
(andere Varianten: m_k wächst langsamer als k)

c) $h_k > 0, m_k = k,\ \forall k$ (Sekanten-Verfahren)
Hier entspricht die zugrundeliegende Linearisierung (anders als beim Newton-Verfahren) der linearen Funktion $\tilde{f}_k$ mit $\tilde{f}_k(x_k) = f(x_k)$ und $\tilde{f}_k(x_k + he_j) = f(x_k + he_j),\ j = 1, \dots, m$

Probleme:

- Durchführbarkeit des Verfahrens? (z.B. $x_k \in D(f)$, $\exists [F(x_{m_k}, h_k)]^{-1}$?)
- Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit gegen x_*
- Wahl von x_o

Lemma 9.1 *Sei $D(f) \subseteq I\!R^m$ offen, $f : D(f) \to I\!R^m$ stetig differenzierbar.*

a) *Für alle $x_* \in D(f)$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, daß*

$$\|F(x,h) - f'(x_o)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in \bar{B}(x_o, \delta),\ \forall h : |h| \le \delta$$

b) *Sei $J_f(x_o)$ in $x_o \in D(f)$ regulär. Dann existieren $C > 0$, $\delta > 0$ so, daß für alle $x \in \bar{B}(x_o, \delta)$ und für alle h mit $|h| \leq \delta$ $F(x,h)$ stetig invertierbar ist, und $\|[F(x,h)]^{-1}\| \leq C$.*

<u>**Beweis:**</u>

a) Sei $x_o \in D(f)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, sei f in x_o stetig differenzierbar $\rightsquigarrow$ f ist in x_o Fréchet-differenzierbar (Satz 5.32). Sei $D(f)$ offen $\rightsquigarrow \exists \delta_o > 0$: $\bar{B}(x_o, \delta_o) \subseteq D(f)$.
Wir wählen $\delta_1 > 0$ so, daß $\delta_1(1 + \max\limits_{j=1,\ldots,m} \|e_j\|) < \delta_o$.
Sei nun $x \in \bar{B}(x_o, \delta_1)$ und $h \in I\!R$, $|h| \leq \delta_1$ beliebig. Dann gilt: $x + he_j \in \bar{B}(x_o, \delta_o) \subseteq D(f)$, $(j = 1, \ldots, m)$, weil
$\|(x+he_k)-x_o\| \leq \|x-x_o\|+\|he_j\| \leq \delta_1+\delta_1\|e_j\| \leq \delta_1(1+\max\limits_{j=1,\ldots,m} \|e_j\|) < \delta_o$.
$\rightsquigarrow F(x,h)$ ist definiert.

Da auf $I\!R^m$ alle Normen äquivalent sind (Satz 7.10), existiert eine Konstante $K > 0$ so, daß

$$\begin{aligned}\|F(x,h) - f'(x_o)\| &\leq K\|F(x,h) - f'(x_o)\|_\infty \\ &= K \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{m} |\frac{1}{h}(f_i(x+he_j) - f_i(x)) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)|\end{aligned}$$

Aus Satz 5.43 folgt, daß $\forall i, j = 1, \ldots, m \, \exists \Theta_{ij} \in [0,1]$ so, daß

$$\frac{1}{h}(f_i(x+he_j) - f_i(x)) = \frac{1}{h} f_i'(x + \Theta_{ij} he_j)(he_j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o).$$

Da nach Voraussetzung alle partiellen Ableitungen von f in x_o stetig sind, existiert ein $\bar{\delta} \leq \delta_o$ so, daß
$|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)| < \frac{\varepsilon}{mk}$, $\forall y \in \bar{B}(x_o, \bar{\delta})$.
Wir wählen nun $\delta > 0$ so, daß $\delta(1 + \max\limits_{j=1,\ldots,m} \|e_j\|) < \bar{\delta}$, $\delta \leq \delta_1$.
Dann folgt (analog zu oben): $\|F(x,h) - f'(x_o)\| \leq K \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{mK} = \varepsilon$.

b) Da $J_f(x_o)$ regulär ist, ist $f'(x_o) \in L(I\!R^m)$ stetig invertierbar.
$(f'(x_o)z = J_f(x_o)z, \forall z \in I\!R^m)$
Aus a) folgt: Es existiert $\delta > 0$ so, daß $\forall x \in \bar{B}(x_o, \delta)$, $\forall h, |h| \leq \delta$
$\|F(x,h) - f'(x_o)\| \leq \frac{1}{2\|f'[(x_o)]^{-1}\|}$. Aus Satz 7.37 (Störungslemma) folgt: $F(x,h)$ ist stetig invertierbar, und $\|[F(x,h)]^{-1}\| \leq \|[f'(x_o)]^{-1}\|$.

Satz 9.2 *("lokaler Konvergenzsatz")*
Sei $D(f) \subseteq I\!R^m$ offen, $f : D(f) \to I\!R^m$ stetig differenzierbar. Es existiere $x_* \in D(f)$ mit $f(x_*) = 0$, und $J_f(x_*)$ sei regulär.
Dann existiert ein $\delta > 0$ so, daß für alle $x_o \in \bar{B}(x_*, \delta)$, $(h_k)_{k\in I\!N_o}$ und $(m_k)_{k\in I\!N_o}$ mit $|h_k| \leq \delta$, $0 \leq m_k \leq k$, $\forall k \in I\!N$, das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} := x_k - [F(x_{m_k}, h_k)]^{-1}(f(x_k)), \quad (k \in I\!N_o)$$

durchführbar ist, und daß gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x_*\| = 0$.

<u>**Beweis:**</u>
Sei $\alpha \in]0,1[$ beliebig gewählt. Aus Lemma 9.1 folgt die Existenz von $C > 0$, $\delta > 0$ so, daß $\forall x \in \bar{B}(x_*, \delta)$, $\forall h : |h| \leq \delta$:

$$\|[F(x,h)]^{-1}\| \leq C \quad \text{und} \quad \|F(x,h) - f'(x_*)\| \leq \frac{\alpha}{2C}$$

Sei nun $x_o \in \bar{B}(x_*, \delta)$ und $|h_k| \leq \delta, 0 \leq m_k \leq k$, $\forall k \in I\!N_o$. Wir zeigen induktiv: $x_k \in \bar{B}(x_*, \delta)$, $\forall k \in I\!N_o$.
Sei bereits $x_i \in \bar{B}(x_*, \delta)$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \|x_{k+1} - x_*\| &= \|x_k - x_* - [F(x_{m_k}, h_k)]^{-1}(f(x_k) - \underbrace{f(x_*)}_{=0})\| \\
&\leq \|[F(x_{m_k})]^{-1}\|\|f(x_k) - f(x_*) - F(x_{m_k}, h_k)(x_k - x_*)\| \\
&\leq C\|f(x_k) - f(x_*) - F(x_{m_k}, h_k)(x_k - x_*) \\
&\qquad + f'(x_*)(x_k - x_*) - f'(x_*)(x_k - x_*)\| \\
&\leq C(\|f(x_k) - f(x_*) - f'(x_*)(x_k - x_*)\| \\
&\qquad + \underbrace{\|f'(x_*) - F(x_{m_k}, h_k)\|}_{\leq \frac{\alpha}{2C}} \|x_k - x_*\|) \\
&\leq C(\sup_{t\in[0,1]} \|\underbrace{f'(x_* + t(x_k - x_*))}_{F(x_* + t(x_k - x_*), 0)} - f'(x_*)\|\|x_k - x_*\| + \frac{\alpha}{2C}\|x_k - x_*\| \\
&\qquad \text{(nach Folgerung 5.47 b))} \\
&\leq C(\frac{\alpha}{2C} + \frac{\alpha}{2C})\|x_k - x_*\| = \alpha \underbrace{\|x_k - x_*\|}_{\leq \delta} < \delta
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow x_{k+1} \in \bar{B}(x_*, \delta)$.
Insgesamt: $x_k \in \bar{B}(x_o, \delta)$, $\forall k \in I\!N_o$. $\rightsquigarrow$ Verfahren ist durchführbar.
$\rightsquigarrow \|x_{k+1} - x_*\| \leq \alpha\|x_k - x_*\| \leq \alpha^{k+1} \underbrace{\|x_o - x_*\|}_{\leq \delta} \leq \alpha^{k+1}\delta \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x_*\| = 0$ □

Übung 9.3
Unter den Voraussetzungen von Satz 9.2 existiert ein $\delta > 0$ so, daß die Kugel $\bar{B}(x_*, \delta)$ keine weitere Lösung von $f(x) = 0$ (als x_*) enthält, (d.h. x_* ist geometrisch isolierte Lösung von $f(x) = 0$).

(Hinweis: Man führe den Beweis indirekt!)

Bemerkung 9.4
Satz 9.2 besagt: Setzt man für eine stetig differenzierbare Funktion f die Existenz einer Lösung x_* von $f(x) = 0$ mit $J_f(x_*)$ regulär voraus, so konvergiert das allgemeine Iterationsverfahren

$$x_{k+1} := x_k - [F(x_{m_k}, h_k)]^{-1} f(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen x_*, wenn man nur den Anfangswert x_o "genügend nahe" an x_* und die Schrittweite h_k hinreichend klein wählt.
Der Radius δ des "Einzugsbereiches" $\bar{B}(x_*, \delta)$ kann dabei sehr klein sein: er existiert aus Stetigkeitsargumenten und ist folglich kaum quantifizierbar (vgl. Bem. 9.8). Die Anwendung des Satzes muß also wie folgt verstanden werden: Entweder kann durch genaue Untersuchung der Aufgabenstellung ein geeigneter Startwert x_o gewählt werden, oder man versucht durch andere Methoden (zu "Globalisierung" und Einbettungsmethoden in Kap. 9.2) einen Startwert x_o zu bestimmen. Pragmatisch geht man so vor, daß man x_o und h_o wählt und nach Durchführung der ersten Iteration(en), abhängig vom Ergebnis derselben, evtl. neue Entscheidungen über die Wahl von x_o und h_o trifft.
Die eindimensionalen Varianten des allgemeinen Iterationsverfahrens sind die bekannten Newton- bzw. Sekantenverfahren für reelle Funktionen:

Algorithmus 9.5
Step 0: Wähle $x_o \in I\!R^m, h_o \in I\!R$; setze $k = 0, m_k = 0$; wähle $\varepsilon > 0$,
Step 1: Löse das lineare Gleichungssystem:
$$F(x_{m_k}, h_k) z_k = -f(x_k)$$
Step 2: $x_{k+1} := x_k + z_k$
Step 3: Teste $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ bzw. $\|f(x_{k+1})\| < \varepsilon$
ja: ENDE
Step 4: $k := k + 1$, wähle evtl. neues $h_k \in I\!R, m_k \in I\!N$; GOTO Step 1

Beispiel 9.6
Für $m = 2$ betrachten wir das nichtlineare Gleichungssystem (vgl. einleitendes Beispiel)

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 - y - 1 \\ -x + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exate Lösung:
$$\begin{aligned} -x + (x^2-1)^2 - 1 &= 0\\ -x + x^4 - 2x^2 &= 0\\ x(-1+x^3-2x) &= 0\\ x(x+1)(x^2-x-1) &= 0 \end{aligned}$$
Lösungen: $x_* = \begin{pmatrix} 0\\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$

Wir wenden nun das Newton-Verfahren an (partielle Ableitungen sind leicht berechenbar).

Jacobi-Matrix $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1\\ -1 & 2y \end{pmatrix}$, $\det J_f(x,y) = 4xy - 1$.

$\rightsquigarrow [J_f(x,y)]^{-1} = \frac{1}{4xy-1}\begin{pmatrix} 2x & 1\\ 1 & 2y \end{pmatrix}, \quad \forall (x,y) \in I\!R^2 : xy \neq \frac{1}{4}.$

Newton-Verfahren konkret:

Step 0: $(x_o, y_o) \in I\!R^2$, $\varepsilon > 0$, $k := 0$

Step 1: *Löse* $\begin{pmatrix} 2x_k & -1\\ -1 & 2y_k \end{pmatrix} z_k = -\begin{pmatrix} x_k^2 - y_k - 1\\ -x_k + y_k^2 - 1 \end{pmatrix}$

Step 2: $\bar{x}_{k+1} := \bar{x}_k + z_k, \quad (\bar{x}_k := \begin{pmatrix} x_k\\ y_k \end{pmatrix})$

Step 3: $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ *bzw.* $\|f(x_{k+1}) < \varepsilon$*?*
ja: ENDE

Step 4: $k := k+1$, *GOTO Step 1*

Beispiel: $(x_o, y_o) := (0,0)$, $\varepsilon := 5 \cdot 10^{-3}$

$\rightsquigarrow \bar{x}_{k+1} := \bar{x}_k - \frac{1}{4x_ky_k-1}\begin{pmatrix} 2x_k & 1\\ 1 & 2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k^2 - y_k - 1\\ -x_k + y_k^2 - 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \bar{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1\\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ -1 \end{pmatrix},$

$\rightsquigarrow \bar{x_2} = \begin{pmatrix} -1\\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$

$\rightsquigarrow \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{21}\\ -\frac{13}{21} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.619047\\ -0.619047 \end{pmatrix}$, *exakt:* 0.618034, $\|f(\bar{x}_3)\|_2 = 0.32 \cdot 10^{-3}$.

andere Startpunkte:

$\bar{x}_o := (1,1) \rightsquigarrow \bar{x}_1 := (2,2) \to$ *wahrscheinlich gegen* $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},$

$\bar{x}_o := (1,0) \rightsquigarrow \bar{x}_1 := (-1,-4)!?, \bar{x}_2 := (\frac{1}{15}, -\frac{32}{15}).$

Also: Die Wahl des Startpunktes ist problematisch, wenn eine bestimmte Nullstelle berechnet werden soll. (Man beachte in diesem Zusammenhang, daß das "Newton-Fractal" z.B. die grafische Darstellung des Konvergenzverhaltens des Newton-Verfahrens für bestimmte Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist!)*

Zur genaueren Untersuchung der Konvergenzeigenschaften der betrachteten Iterationsverfahren benötigen wir die genauere Charakterisierung der Stetigkeitseigenschaften von $F(x,h)$ (unter stärkeren Voraussetzungen als in Lemma 9.1).

Lemma 9.7
Es sei $D(f) \subseteq I\!R^m$ offen, $f : D(f) \to I\!R^m$ stetig differenzierbar in $D(f)$, und alle partiellen Ableitungen von f seien Lipschitz-stetig in $D(f)$ (mit Konstante L).
Dann existiert eine Konstante $K_1 > 0$ so, daß für alle $x_o \in D(f)$ ein $\delta > 0$ existiert, mit

$$\|F(x,h) - f'(x_o)\| \le K_1 L(\|x - x_o\| + |h|), \quad \forall x \in \bar{B}(x_o,\delta), \forall h : |h| \le \delta.$$

Beweis:
Sei $x_o \in D(f)$ beliebig gewählt. Wie in Lemma 9.1 wählen wir zunächst $\delta > 0$ so, daß für alle $x \in \bar{B}(x_o,\delta)$ und alle $h \in I\!R$ mit $|h| \le \delta$ die Matrix $F(x,h)$ definiert ist.
Seien nun $x \in \bar{B}(x_o,\delta)$ und h mit $|h| \le \delta$ beliebig gewählt. Wie in Lemma 9.1 schätzen wir mit geeigneter Konstanten $K > 0$ folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned}
\|F(x,h) - f'(x_o)\| &\le K \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{m} |\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + \Theta_{ij} h e_j) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)|, \; (\Theta_{ij} \in]0,1[) \\
&\le K \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{m} L\|x - x_o + \Theta_{ij} h e_j\| \\
&\le KL \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{m} (\|x - x_o\| + |h|\|e_j\|) \\
&= KL \sum_{j=1}^{m} (\|x - x_o\| + |h|\|e_j\|) \\
&\le KL \sum_{j=1}^{m} (\|x - x_o\| + |h|\|e_j\|)(1 + \|e_j\|) \\
&= \underbrace{K \sum_{j=1}^{m} (1 + \|e_j\|)}_{=:K_1} L(\|x - x_o\| + |h|) \qquad \Box
\end{aligned}$$

Satz 9.8
Es seien die Voraussetzungen von Satz 9.2 erfüllt, $\delta > 0$ wie dort gewählt. Mit $x_o \in \bar{B}(x_o,\delta)$, $|h| \le \delta$, $0 \le m_k \le k$, $(k \in I\!N_o)$ betrachten wir die Iterationsfolge

$$x_{k+1} := x_k - [F(x_{m_k}, h_k)]^{-1} f(x_k).$$

a) *Falls $h_k \to 0$ und $m_k \to \infty$, so gilt für $(x_k)_{k\in I\!N_o}$ entweder $x_{k_o} = x_*$ für ein $k_o \in I\!N_o$, oder $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|} = 0$.*

b) *Sind zusätzlich alle partiellen Ableitungen von f Lipschitz-stetig in $D(f)$, so existiert ein $C_o > 0$ so, daß im Falle $h_k \to 0$, $m_k \to \infty$ ür hinreichend große k gilt:*

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq C_o(\|x_k - x_*\| + \|x_{m_k} - x_*\| + |h_k|)\|x_k - x_*\|.$$

Insbesondere erhalten wir für $m_k = k$, $h_k = 0$ ($k \in I\!N_o$) für hinreichend großes k:

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq 2C_o\|x_k - x_*\|^2 \qquad \text{("Newton-Verfahren")}$$

Beweis:

a) Sei (h_k) Nullfolge, und es gelte $m_k \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.
z.z.: Entweder existiert $k_o \in I\!N$ mit $x_{k_o} = x_*$ oder $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|} = 0$.
Verwendung der entsprechenden Abschätzung im Beweis von Satz 9.2:

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_*\| &\leq C\|f(x_k) - f(x_*) - F(x_{m_k}, h_k)(x_k - x_*)\| \\
&\leq C(\|f(x_k) - f(x_*) - f'(x_*)(x_k - x_*)\| \\
&\quad +\|(f'(x_*) - F(x_{m_k}, h_k))(x_k - x_*)\|) \\
(\star) \quad \|x_{k+1} - x_*\| &\leq C(\sup_{t\in[0,1]} \|f'(x_* + t(x_k - x_*)) - f'(x_*)\|\|x_k - x_*\| \\
&\quad +\|f'(x_*) - F(x_{m_k}, h_k)\|\|x_k - x_*\|) \\
&\quad \text{(nach Folgerung 5.47 b)}
\end{aligned}$$

1.Fall: $\exists k_o \in I\!N : x_{k_o} = x_*$, und die Folge (x_k) ist ab $k = k_o$ konstant.
2.Fall: $\forall k \in I\!N : x_k \neq x_*$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \frac{\|x_{k+1} - x_*\|}{\|x_k - x_*\|} &\leq C(\sup_{t\in[0,1]} \|f'(x_* + t(x_k - x_*)) - f'(x_*)\| \\
&\quad +\|f'(x_*) - F(x_{m_k}, h_k)\|)
\end{aligned}$$

Wir wissen: $x_k \to x_*$ (Satz 9.2), und $x_{m_k} \to x_*$, $h_k \to 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach Lemma 9.1 existiert ein $\delta_o > 0$ so, daß $\|f'(x_*) - F(x, h)\| < \frac{\varepsilon}{2C}$, $\forall x \in \bar{B}(x_*, \delta_o)$, $\forall h \in I\!R : |h| \leq \delta_o$.
Nach Voraussetzung existiert ein $j_o \in I\!N$ so, daß $|h_k| \leq \delta_o$, $x_k \in \bar{B}(x_*, \delta_o)$, $x_{m_k} \in \bar{B}(x_*, \delta_o)$, $\forall k \geq j_o$.
$\rightsquigarrow$ für alle $k \geq j_o$ gilt: $\frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|} < C(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}) = \varepsilon$.
$\rightsquigarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1}-x_*\|}{\|x_k-x_*\|} = 0$.

b) Seien nun die partiellen Ableitungen von f auf $D(f)$ Lipschitz-stetig (mit gemeinsamer Lipschitz-Konstanten L), und es gelte $m_k \to \infty$, $h_k \to 0$.
Wir beginnen mit Ungleichung $(\star)$ aus Teil a).
Lemma 9.7 besagt (für $x_o = x_*$): $\exists K_1 > 0$, $\exists \delta > 0$:
$\|F(x,h) - f'(x_*)\| \leq K_1 L(\|x - x_*\| |h|)$, $\forall x \in \bar{B}(x_*, \delta)$, $\forall h : |h| \leq \delta$.
$\rightsquigarrow$ für hinreichend großes $k \in I\!N$ folgt dann aus $(\star)$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\| &\leq C(K_1 L \sup_{t\in[0,1]} \|x_* + t(x_k - x_*) - x_*\| \\ &\qquad + K_1 L(\|x_{m_k} - x_*\| + |h_k|))\|x_k - x_*\| \\ &\leq \underbrace{C K_1 L}_{C_o}(\|x_k - x_*\| + \|x_{m_k} - x_*\| + |h_k|)\|x_k - x_*\| \end{aligned}$$

Spezialfall: Newton-Verfahren: $h_k := 0$, $m_k := k$

$$\rightsquigarrow \|x_{k+1} - x_*\| \leq 2C_o \|x_k - x_*\|^2 \qquad \square$$

Bemerkung 9.9
*Ist für das Verfahren $x_{k+1} := x_k - [F(x_{m_k}, h_k)]^{-1} f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, die Konvergenzeigenschaft aus 9.8 a) erfüllt, so sagt man, daß das Verfahren <u>überlinear</u> konvergiert. In Satz 9.2 war nur dessen sog. <u>lineare</u> Konvergenz bewiesen worden, d.h. $\|x_{k+1} - x_*\| \leq \alpha \|x_k - x_*\|$, $\forall k \in I\!N_o$, $\alpha \in]0,1[$.
Überlineare Konvergenz ist in praktischen Anwendungen erstrebenswert!
Ist die Ungleichung $\|x_{k+1} - x_*\| \leq \mathrm{const} \|x_k - x_*\|^2$ für hinreichend großes $k \in I\!N$ erfüllt, so heißt das Verfahren <u>quadratisch</u> konvergent.*

Für Sekantenverfahren, d.h. $h_k \neq 0$ mit $m_k := k$ erhält man aus b) die folgende Abschätzung:

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq C_o(2\|x_k - x_*\|^2 + |h_k| \|x_k - x_*\|$$

*(Bei bekannter Lösung x_* könnte $h_k \leq \|x_k - x_*\|$ gewählt werden, und man erhielte quadratische Konvergenz.)
Idee für die Wahl von h_k: $h_k := \beta \|x_k - x_{k-1}\|$, $\forall k \in I\!N$, wobei $\beta > 0$ konstant.
Man erhält dadurch folgende Konvergenzgeschwindigkeit:*

$$\|x_k - x_*\| \leq C\alpha^{\tau^k}, \quad \textit{für hinreichend großes } k \in I\!N,$$

*wobei $C > 0$; $\alpha \in]0,1[$, $\tau^2 = t + 1$, $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Satz 9.2 hätte nur die lineare Konvergenz, d.h. $\tau = 1$, geliefert!*

(Literatur: H. Schwetlick: Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen, Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979, Kap. 5.3)

Beim Implementieren von Sekanten-Verfahren sollte neben der obigen Wahl der Schrittweiten außerdem beachtet werden, daß h_k nicht "zu klein" gewählt wird, damit bei der Berechnung der Differenz $f(x_k + h_k e_j) - f(x_k)$ kein zu großer Informationsverlust auftritt. ("Auslöschung" der richtigen Stellen) (Schwetlick, Kap. 5.3)

Beispiel 9.10

Newton-Verfahren für $m = 1$: $x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
Wir betrachten $f(x) = x^2 - a$, $(a > 0)$, und untersuchen dafür das Newton-Verfahren.

$$\leadsto x_{k+1} := x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}(2x_k - x_k - \frac{a}{x_k}) = \frac{1}{2}(x_k - \frac{a}{x_k}),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

In Beispiel 3.11 g) wurde gezeigt, daß die Folge x_k für beliebigen Startwert $x_o > 0$ monoton fallend gegen $x_* = \sqrt{a}$ konvergiert. Für f sind die Voraussetzungen von Satz 9.8 auf $D(f) = \mathbb{R}$ erfüllt. Also konvergiert das Newton-Verfahren (und damit das obige Verfahren zur Wurzelberechnung!) quadratisch!

Bemerkung 9.11

Unter den Voraussetzungen von 9.8 lassen sich (in Abhängigkeit von f bzw. x_*) die Größen genauer charakterisieren, die für die "Kleinheit" (bzw. "Größe") des Radius $\delta > 0$ der Startkugel $\bar{B}(x_*, \delta)$ von Bedeutung sind. Nach Beweis von 9.8 gilt für $x_i \in \bar{B}(x_*, \delta)$, $|h_i| \leq \delta$, $i = 0, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\| &\leq \underbrace{K_1 C L}_{=:C_o}(\underbrace{\|x_k - x_*\|}_{\leq\delta}) + \underbrace{\|x_{m_k} - x_*\|}_{\leq\delta} + \underbrace{|h_k|}_{\leq\delta})\|x_k - x_*\| \\ &\leq 3K_1 C L\delta \|x_k - x_*\|. \end{aligned}$$

Konvergenz erhält man also dann, wenn $3K_1CL\delta < 1$ gilt.
Da K_1 nur die Rolle einer "Normübergangskonstanten" spielt, beeinflußen vor allem die Konstanten C und L die Größe von δ. Ist also CL "groß", so muß δ "klein" gewählt werden (und "umgekehrt").
L ist die gemeinsame Lipschitz-Konstante der partiellen Ableitungen von f. Aus 9.2 folgt, daß C wie folgt gewählt werden kann: $C := \|[f'(x_*)]^{-1}\|$.

Fazit: Die Wahl von δ wird durch die Konstante $L\|[f'(x_*)]^{-1}\|$ beeinflußt! Man nennt die Zahl $L\|[f'(x_*)]^{-1}\|$ <u>Kondition</u> der Lösung x_* der nichtlinearen Gleichung $f(x) = 0$.

Spezialfall: lineares Gleichungssystem $f(x) = Ax - b$, A (m, m)-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$, A regulär.
$\leadsto$ es existiert genau eine Lösung $x_* := A^{-1}b$.
Es gilt: $f'(x) := A$, $\leadsto [f'(x)]^{-1} = A^{-1}$, $L := \|A\|$.
$\leadsto$ Kondition von x_*: $\mathrm{cond}(A) := \|A\|\|A^{-1}\|$ ist die Konditionszahl.

Bemerkung 9.12
Ein Iterationsverfahren der Gestalt

$$(\star) \qquad x_{k+1} := x_k - p_k,\ k \in \mathbb{N}_o, \quad (p_k \text{ "Richtungsvektor"})$$

zur Lösung von $f(x) = 0$ *heißt* *"Newton-ähnlich"* *bez.* x_* *mit* $f(x_*) = 0$ *und* $f'(x_*)$ *regulär, falls für jede durch das Verfahren erzeugte Folge* (x_k)*, die gegen* x_* *konvergiert, gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|p_k - [f'(x_k)]^{-1} f(x_k)\|}{\|\underbrace{[f'(x_k)]^{-1} f(x_k)}_{Newton-Richtung}\|} = 0.$$

Man kann zeigen (Schwetlick, Kap. 5.2):
Erfüllt x_* *die Voraussetzungen von Satz 9.2, so ist* $(\star)$ *genau dann Newton-ähnlich, wenn es überlinear konvergent ist.*
Hat insbesondere p_k *die Gestalt* $p_k := A_k^{-1} f(x_k)$ *mit einer Folge regulärer Matrizen* A_k*, so ist das Verfahren* $(\star)$ *unter den Voraussetzungen von Satz 9.8 b) Newton-ähnlich gdw.*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|(A_k - f'(x_k))(x_{k+1} - x_k)\|}{\|x_{k+1} - x_k\|} = 0.$$

Hinreichend für die letztere Bedingung ist $\lim\limits_{k\to\infty} \|A_k - f'(x_k)\| = 0.$
Die bisher in diesem Kapitel betrachteten Matrizen A_k*, nämlich* $A_k := F(x_{m_k}, h_k)$ *hatten gerade diese Eigenschaft, falls* $m_k \to \infty$*,* $h_k \to 0$ *(vgl. Lemma 9.1). Dies ist ein neuer Beweis für die überlineare Konvergenz der bisher betrachteten Verfahren (vgl. Satz 9.8 a)).*

Es existieren jedoch Newton-Verfahren vom Typ

$$x_{k+1} := x_k - A_k^{-1} f(x_k),\ k \in \mathbb{N}_o,$$

für die die Bedingung $\lim\limits_{k\to\infty} \|A_k - f'(x_k)\|$ *nicht erfüllt ist.*
Idee: Bestimmung von A_k *nur aus schon bekannten Funktionswerten, genauer aus* $s_k := x_k - x_{k-1}$ *und* $y_k := f(x_k) - f(x_{k-1}$*. (Es werden keine weiteren Funktionswerte bzw. Ableitungen benötigt.)*

Definition 9.13
Ein Iterationsverfahren der Gestalt $x_{k+1} := x_k - A_k^{-1} f(x_k)$*,* $k \in \mathbb{N}_o$*, heißt Quasi-Newton-Verfahren, falls* (A_k) *eine Folge regulärer* (m,m)*-Matrizen mit der Eigenschaft* $A_k s_k = y_k$*,* $(\forall k \in \mathbb{N}_o)$ *("Quasi-Newton-Gleichung") ist, wobei* A_k *in folgender Weise aus* A_{k-1}, s_k, y_k *hervorgeht:*

$$A_k := \Phi(A_{k-1}, s_k, y_k) \quad (\text{"Aufdatierungsformel"}),$$

$\Phi : L(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to L(\mathbb{R}^m)$ *heißt Aufdatierungsfunktion.*

Bemerkung 9.14
Die Quasi-Newton-Gleichung kann wie folgt interpretiert werden:
Wir betrachten die folgende Linearisierung von f in x_k:

$$\tilde{f}_k(x) := f(x_k) + A_k(x - x_k) \qquad \rightsquigarrow \tilde{f}_k(x_k) = f(x_k).$$

Zusätzliche Bedingung: $\tilde{f}_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$. *Daraus folgt:*
$\rightsquigarrow f(x_k) + A_k(x_{k-1} - x_k) = f(x_{k-1})$,
$\rightsquigarrow f(x_k) - f(x_{k-1}) = y_k = A_k(x_k - x_{k-1}) = A_k s_k$.
D.h. die Quasi-Newton-Gleichung ergibt sich als "kanonische" Bedingung an ein solches Verfahren!

Alle Quasi-Newton-Verfahren unterscheiden sich in der Wahl der Aufdatierungsfunktion Φ. *Die Aufdatierungsfunktion ist durch die Erfüllung der Quasi-Newton-Gleichung in jedem Schritt* nicht *eindeutig bestimmt (mit Ausnahme von* $m := 1$; m *Gleichungen "*$A_k s_k = y_k$*" für die* m^2 *Elemente von* A_k*).*

Lemma 9.15
Für eine Aufdatierungsfunktion $\Phi : L(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to L(\mathbb{R}^m)$ *gelte* $(\Phi(A, s, y) - A)(w) = 0,\ \forall w \in \mathbb{R}^m : \langle w, s\rangle = s^T w = 0$.
Dann hat die Aufdatierungsfunktion eines Quasi-Newton-Verfahrens die folgende Gestalt:

$$\Phi(A, s, y) := \begin{cases} A + \frac{(y - As)s^T}{\langle s,s\rangle} & , s \neq 0 \\ A & , s = 0 \end{cases}$$

Beweis:
1. Fall $s = 0$: $\rightsquigarrow (\Phi(A, s, y) - A)(w) = 0,\ \forall w \in \mathbb{R}^m \leftrightarrow \Phi(A, s, y) = A$
2. Fall $s \neq 0$:
Die Menge $\{w \in \mathbb{R}^m : \langle w, s\rangle = 0\}$ ist ein $(m-1)$-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^m$. D.h. $N(\Phi(A, s, y) - A)$ ("Nullraum") ist $m-1$-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^m$, d.h. $\Phi(A, s, y) - A$ muß eine Matrix mit Rang$=1$ sein. Solche Matrizen haben gerade die Darstellung

$$uv^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} (v_1, \ldots, v_m) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m v_1 & \cdots & u_m v_m \end{pmatrix}.$$

Ansatz: $\Phi(A, s, y) - A = us^t$.
$\rightsquigarrow (\Phi(A, s, y) - A)(w) = 0,\ \forall w \in \mathbb{R}^m,\ s^t w = 0$.
Bestimmung von u aus der Quasi-Newton-Gleichung: $\Phi(A, s, y)s = y$
$\rightsquigarrow (\Phi(A, s, y) - A)s = y - As = us^t s \quad \rightsquigarrow u = \frac{y - As}{\langle s,s\rangle}$ □

Bemerkung 9.16
Die Voraussetzung in 9.15 an die Aufdatierungsfunktion heißt <u>*Broyden-Bedingung*</u>. *Die Aufdatierungsformel nach 9.15, d.h.*

$$A_k := A_{k-1} + \frac{1}{\langle s, s\rangle}(y_k - A_{k-1}s_k^T),\ k \in \mathbb{N},$$

heiß <u>Broyden-Aufdatierung</u>.
Das zugehörige Quasi-Newton-Vefahren heißt dann auch Broyden-Verfahren.

Algorithmus 9.17

Step 0: Wähle $x_o \in I\!R^m$, A_o (m,m)-Matrix; $\varepsilon > 0$, $k := 0$;
Step 1: Löse das Gleichungssystem $A_k z_k = -f(x_k)$;
Step 2: $x_{k+1} := x_k + z_k$
Step 3: Teste $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ bzw. $\|f(x_{k+1})\| < \varepsilon$; ja: Ende
Step 4: berechne $s_{k+1} := z_k$, $y_{k+1} := f(x_{k+1} - f(x_k)$;
$A_{k+1} := A_k + \frac{1}{\langle s_{k+1}, s_{k+1}\rangle}(y_{k+1} - A_k s_{k+1}) s_k^T$;
Step 5: $k := k+1$, Goto Step 1

Satz 9.18 *(Konvergenzsatz für das Broyden-Verfahren)*
Es seien $D(f) \subseteq I\!R^m$ offen, $f : D(f) \to I\!R^m$ stetig differenzierbar, und sämtliche partiellen Ableitungen seien Lipschitz-stetig. Es existiere ein $x_* \in D(f)$ mit $f(x_*) = 0$ und $f'(x_*)$ regulär.
Dann existieren $\delta > 0$ und $\rho > 0$ so, daß das Broyden-Verfahren für alle $x_o \in \bar{B}(x_*, \delta)$ und alle (m,m)-Matrizen A_o mit $\|A_o - f'(x_*)\| \leq \rho$ durchführbar ist und überlinear gegen x_* konvergiert.

<u>Beweis:</u>
(H. Schwetlick, S. 142-144)

Bemerkung 9.19
Praktisch geht man so vor, daß man anfangs $A_o := F(x_o, h_o)$ mit geeignet gewähltem h_o setzt. Im Schwetlick wird auch bewiesen, daß die Broyden-Matrizen A_k die Eigenschaft haben, daß $\operatorname{cond}(A_k) := \|A_k\|\|A_k^{-1}\|$ gleichmäßig beschränkt ist. Dies ist von wesentlicher Bedeutung für die numerische Lösung der auftretenden linearen Gleichungssysteme!
Das Broyden-Verfahren ist Newton-ähnlich im Sinne von 9.12, aber es gilt i.a. <u>nicht</u>: $\lim\limits_{k\to\infty} \|A_k - f'(x_k)\| = 0$.

Man kann zeigen, daß für das Broyden-Verfahren folgende Konvergenzgeschwindigkeit gilt: $\|x_k - x_*\| \leq C\alpha^{\tau^k}$, $\alpha \in]0,1[$, $\tau := 2^{\frac{1}{2m}}$ (k hinreichend groß).

Bemerkung 9.20 *Vor- und Nachteile der verschiedenen Verfahren:*
Newton-Verfahren: (lokal) quadratische Konvergenz; Berechnung der Jacobi-Matrix in <u>jedem</u> Schritt
$\rightsquigarrow$ *Newton-Verfahren dann einsetzen, wenn Ableitungen problemlos und nicht aufwendig zu berechnen sind!*

modifiziertes Newton-Verfahren: $x_{k+1} := x_k - [f'(x_o)]^{-1} f(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_o$*: nur lineare Konvergenz (gemäß Satz 9.2); nur eine Jacobi-Matrix-Berechnung erforderlich.*

Sekanten-Verfahren: überlineare Konvergenz; viele $(m+1!)$ *Funktionswertberechnungen pro Schritt*
$\rightsquigarrow$ *Sekanten-Verfahren einsetzen, falls Funktionswertberechnungen nicht aufwendig sind, aber Ableitungen nicht oder nur schwer zu berechnen sind.*

Quasi-Newton-Verfahren: überlineare Konvergenz (i.a. langsamer als Sekanten-Verfahren) und wenig Funktionswertberechnungen (nur eine pro Schritt), Zusatzaufwand: Aufdatierung der Iterationsmatrix (wächst mit m!)
$\rightsquigarrow$ *Quasi-Newton-Verfahren einsetzen bei aufwendigen Funktionswertberechnungen.*

Beispiel: Zweipunkt-Randwertaufgabe für eine gewöhnliche DGL:
$x'(t) = f(x(t),t)$, $\forall t \in [t_o,T]$, $\quad f : \mathbb{R}^m \times [t_o,T] \to \mathbb{R}^m$, $r : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $r(x(t_o), x(T)) = 0$
$\rightsquigarrow$ Zurückführung auf ein nichtlineares Gleichungssystem:
$\tilde{f}(a) = 0$, $\tilde{f}(a) := r(a, x(T,a))$, wobei $x(\cdot, a)$ Lösung der Anfangswertaufgabe $x'(t) = f(x(t),t)$, $t \in [t_o,T]$, $x(t_o) = a$, ist.

$\rightsquigarrow$ Berechnung von Funktionswerten von $\tilde{f}$ bedeutet Lösung einer Anfangswertaufgabe.
$\rightsquigarrow$ Berechnung einer Ableitung ...:
$\tilde{f}'(a) = \partial_1 r(a, x(T,a)) + \partial_2 r(a, x(T,a)) \frac{\partial x(T,a)}{\partial a}$
($\partial_i r$ – Jacobi-Matrix von r bez. i-ter Komponente)

$$\begin{array}{rrcl}
\text{DGL} \rightsquigarrow & \frac{\partial}{\partial a}(\frac{\partial}{\partial t} x(t,a)) & = & \frac{\partial}{\partial a}(f(x(t,a),t)) \\
& \frac{\partial}{\partial a} x(t_o,a) & = & \frac{\partial}{\partial a}(a) = I \\
\rightsquigarrow & \frac{\partial}{\partial t}(\underline{\frac{\partial}{\partial a} x(t,a)}) & = & \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,a),t) \underline{\frac{\partial}{\partial a} x(t,a)}
\end{array}$$

$\rightsquigarrow$ lineares gewöhnliches DGL-System zur Bestimmung von $\frac{\partial}{\partial a} x(\cdot, a)$
... bedeutet Lösung einer Anfangswertaufgabe für ein lineares DGL-System, das die Jacobi-Matrix von f enthält.
Oft ist der Aufwand dafür zu groß!

$\rightsquigarrow$ Quasi-Newton-Verfahren sind für diese Aufgabe geeignet.

Schießverfahren zur Lösung von Zweipunkt-Randwertaufgaben (das Quasi-Newton-Verfahren verbessert sukzessive den Schießpunkt, um das Ziel zu treffen)

Problem: Sehr häufig ist die Gleichung $\tilde{f}(a) = 0$ (sehr) "schlecht konditioniert" (vgl. Bem. 9.11), d.h. $L_{\tilde{f}'}\|[\tilde{f}'(a_*)]^{-1}\|$ ist zu "groß" ($L_{\tilde{f}'}$ – Lipschitzkonstante von $\tilde{f}$, a_* – Lösung). Dies führt zu extrem kleinen Startkugeln und zu schlecht konditionierten linearen Gleichungssystemen pro Schritt.

Idee: Zerlegung von $[t_o, T]$ in kleinere Intervalle (um die Lipschitz-Konstante zu verkleinern): $t_o < t_1 < \ldots < t_M := T$; $x(\cdot, a_{k-1}, t_{k-1})$ sei die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), t),\ t \in [t_{k-1}, t_k] \\ x(t_{k-1}) &= a_{k-1},\ \forall k = 1, \ldots, M \end{aligned}$$

Nichlineares Gleichungssystem:

$$\tilde{f}(a_o, \ldots, a_M) = \begin{pmatrix} x(t_1; a_o, t_o) - a_1 \\ x(t_2; a_1, t_1) - a_2 \\ \vdots \\ x(t_M; a_{M-1}, t_{M-1}) - a_M \\ r(a_o, a_M) \end{pmatrix} = 0$$

Man kann zeigen, daß die Kondition von Lösungen dieses Gleichungssystems kleiner ist, als die der ursprünglichen Gleichung. Sie verbessert sich mit wachsendem M (allerdings wächst die Dimension $m(M+1)$ des Gleichungssystems!)
Dies ist die sog. Mehrschießmethode bzw. Mehrzielmethode ("multiple shooting").

Literatur: Stoer/Bulirsch, Kap. 7.3.5)

Problem: Bestimmung von Startwerten für die Iterationsverfahren, d.h. wie kann man Iterationsverfahren globalisieren?

9.2 Einbettungsmethoden für nichtlineare GLS

Zielstellung: Entwicklung von Methoden zur Bestimmung von Startwerten, die im Einzugsbereich der Konvergenz lokal konvergenter Iterationsverfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme liegen.

Idee der Einbettung: ("imbedding", "continuation", "homotopy")
Eine gegebene Gleichung $f(x) = 0$ wird in eine von einem reellen Parameter abhängige Schar von Gleichungen $H(x, t) = 0$ "eingebettet", d.h. $H(x, 1) = f(x)$, wobei diese Schar so gewählt wird, daß die Gleichung für einen Parameter

t_o ($t_o := 0$) "leicht" zu lösen ist, und die gesamte Schar "günstige" Eigenschaften hat.

Definition 9.21

Für gegebenes $f : D(f) \to I\!R^m$, $D(f) \subseteq I\!R^m$, heißt eine Abbildung $H : D(f) \times I\!R \to I\!R^m$ Einbettung von f bez. $x_o \in D(f)$, falls $H(x_o, 0) = 0$, $\quad H(x, 1) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

Bemerkung 9.22

a) *Beispiele für Einbettungen:*

i) Bei vielen Problemen aus der Praxis sind Einbettungen natürlich, d.h. durch das Problem gegeben.
Z.B. natürliche Aufspaltung von f in der Form $f(x) = f_o(x) + f_1(x)$, wobei $f_o(x) = 0$ leicht zu lösen ist.
$\rightsquigarrow$ Ansatz: $H(x, t) := f_o(x) + t f_1(x)$

ii) Standard-Einbettungen ("künstlich"): $H(x, t) := f(x) + (t-1) f(x_o)$
$t = 0 \rightsquigarrow x_o$ ist Lösung; $t = 1 \rightsquigarrow H(x, t) = f(x)$.

b) *Man setzt für eine Einbettung H (von f) stets voraus, daß eine stetige Funktion $x : [0, 1] \to I\!R^m$ existiert, so daß $H(x(t), t) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$, d.h. $x(0) = x_o$, $x(1)$ ist Lösung von $f(x) = 0$. x heißt "Homotopie-Pfad".*
Hinreichende Existenzbedingungen werden in Lemma 9.23 angegeben, lokal in einer Umgebung von t wird die Existenz von $x(\cdot)$ durch den Satz über implizite Funktionen gesichert.
Für die Standard-Einbettung gilt: $H(x(t), t) = 0 = f(x(t) + (t-1) f(x_o)$, d.h. $f(x(t)) = (1 - t) f(x_o)$.
$\rightsquigarrow$ $\|f(x(t))\|$ ist monoton fallend mit t ("defektreduzierende Einbettung").
Wir beschränken uns hier auf den sog. regulären Fall, d.h. $\partial_1 H(x(t), t)$ ist reguläre (m, m)-Matrix, $\forall t \in [0, 1]$! Dies schließt "Umkehrpunkte" und "Verzweigungen" des Homotopiepfades aus!

Lemma 9.23

$H : I\!R^m \times I\!R \to I\!R^m$ sei Fréchet-differenzierbar, und die Fréchet-Ableitung H' sei stetig ($H'(x, t) = (\partial_1 H(x, t), \partial_2 H(x, t))$), $\partial_1 H(x, t)$ sei $\forall (x, t) \in I\!R^m \times I\!R$ regulär, und es existiere eine Konstante $C > 0$ so, daß
$\|[\partial_1 H(x, t)]^{-1}\| \le C$, $\forall (x, t) \in I\!R^m \times I\!R$. Dann gilt:

i) Die Gleichung $H(x, t) = 0$ hat $\forall t \in I\!R$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x(t)$;

ii) $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *ist differenzierbar, und es gilt:*

$$x'(t) = -[\partial_1 H(x(t),t)]^{-1}\partial_2 H(x(t),t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

ii) folgt aus dem impliziten Funktionssatz, und i) siehe Schwetlick, S. 62/63 Satz von Hadamard.

Prinzip der Einbettungsmethoden:

Numerische Approximation des (als existent vorausgesetzten) Homotopiepfades $x \in C([0,1], \mathbb{R}^m)$, indem ausgehend von $x_o = x(0)$ in diskreten Punkten $0 = t_o < \ldots < t_N = 1$ sukzessive Näherungen x_k für $x(t_k)$, $k = 1, \ldots, N$ berechnet werden, so daß x_N hinreichend nahe bei $x_* = x(1)$ liegt, und ein lokal konvergentes Iterationsverfahren mit x_N als Startpunkt gegen $x(1) = x_*$ konvergiert.

Beispiele für Einbettungsmethoden:

a) diskrete Einbettungsmethoden: Zu einer vorgegebenen Zerlegung $\{0 = t_o < \ldots < t_N = 1\}$ betrachtet man sukzessive die Gleichungen

$$H(x, t_{k+1}) = 0, \quad k = 0, \ldots, N-1,$$

(wobei H eine Einbettung für f bez. x_o ist), und führt für diese Gleichungen einige (meist ein oder zwei) Iterationen mit einem lokal konvergenten Verfahren und Startpunkt x_k durch. (Die letzte Iterierte ist dann x_{k+1}.)

Bsp.: "eingebettetes Newton-Verfahren" (EN)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &:= x_k - [\partial_1 H(x_k, t_{k+1})]^{-1} H(x_k, t_{k+1}), \quad k = 0, \ldots, N-2 \\ x_{k+1} &:= x_k - [f'(x_k)]^{-1} f(x_k), \quad k = N-1, N, \ldots \end{aligned}$$

(für die Standard-Einbettung $H(x,t) := f(x) + (t-1)f(x_o)$ gilt:

$\partial_1 H(x,t) = f'(x)$, d.h. (EN) hat die Gestalt:

$$x_{k+1} := x_k - [f'(x_k)]^{-1}(f(x_k) + (t_{k+1} - 1)f(x_o)).$$

Es existieren auch eingebettete Varianten des Sekanten-Verfahrens bzw. Quasi-Newton-Verfahrens.

b) kontinuierliche Einbettungsmethoden: Wir betrachten die Identität $H(x(t), t) = 0,\ \forall t \in [0,1]$, wobei $x \in C([0,1], \mathbb{R}^m)$ ein Homotopiepfad ist.

Unter der Voraussetung der Differenzierbarkeit von H und der von $x(\cdot)$ gilt nach der Kettenregel:

$$0 = \frac{d}{dt} H(x(t), t) = \partial_1 H(x(t), t)x'(t) + \partial_2 H(x(t), t), \quad x(0) = x_o.$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL mit Anfangsbedingung.
Annahme: $\exists[\partial_1 H(x(t),t)]^{-1}$.
$\rightsquigarrow x'(t) = -[\partial_1 H(x(t),t)]^{-1}\partial_2 H(x(t),t)$, $t \in [0,1]$, $x(0) = x_o$,
(Davidenko-DGL). $\rightsquigarrow$ numerische Methode für gewöhnliche DGLen (vgl. Kap. 11) anwenden!
Bsp.: Euler-Verfahren für Davidenko-DGL (vgl. Bem. 8.11)
Zerlegung von $[0,1]$: $t_o = 0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$; $\tau_k := t_{k+1} - t_k$, $k = 0,\ldots,N_1$.

$$\rightsquigarrow \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_k} = -[\partial_1 H(x_k,t_k)]^{-1}\partial_2 H(x_k,t_k),\ k = 0,\ldots,N-1$$

$\rightsquigarrow x_{k+1} := x_k - \tau_k[\partial_1 H(x_k,t_k)]^{-1}\partial_2 H(x_k,t_k)$, $k = 0,\ldots,N-1$,
x_N Startpunkt für lokal konvergentes Verfahren.

Diese Einbettungsmethode wird i.a. nicht empfohlen, da häufig zu viele Zerlegungspunkte erforderlich sind, um mit x_N in die "Startkugel" zu kommen.

c) hybride oder Prädiktor-Korrektor-Methoden:
Kombination des kontinuierlichen und diskreten Einbettungsprinzips, z.B.
Prädiktor-Schritt: Euler-Schritt für Davidenko-DGL
Korrektor-Schritt: Newton-Schritt mit dieser Startnäherung

(Dieses Vorgehen wird empfohlen!)

Satz 9.24
Es sei $H : D \times I\!\!R \to I\!\!R^m$, $D \subseteq I\!\!R^m$ offen, eine Einbettung für f bez. x_o. Für alle $t \in [0,1]$ sei $H(\cdot,t) : D \to I\!\!R^m$ Fréchet-differenzierbar, und die Fréchet-Ableitung $\partial_1 H(\cdot,\cdot) : D \times [0,1] \to L(I\!\!R^m)$ sei stetig. Es existiere eine Funktion $x \in C([0,1],D)$ so, daß $H(x(t),t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$, und $\partial_1 H(x(t),t)$ regulär ist, $\forall t \in [0,1]$.
Dann existiert ein $\Delta > 0$ so, daß für alle Zerlegungen $t_0 = 0 < \ldots < t_N = 1$ von $[0,1]$ mit $\max\limits_{k=1,\ldots,N}(t_k - t_{k-1}) \le \Delta$ das eingebettete Newton-Vefahren

$$(EN) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &:= x_k - [\partial_1 H(x_k,t_{k+1})]^{-1}H(x_k,t_{k+1}), \quad k = 0,1,\ldots,N-2,\\ x_{k+1} &:= x_k - [f'(x_k)]^{-1}f(x_k), \quad k = N-1,N,\ldots \end{aligned}$$

durchführbar ist, und die Folge (x_k) gegen $x_* := x(1)$ konvergiert.

Beweis:
Die Menge $T := \{x(t) : t \in [0,1]\} = x([0,1])$ ist kompakte Teilmenge des

$I\!R^m$.
Beh.: $\exists \delta_o > 0 : \; M := \{z \in I\!R^m : \exists t \in [0,1] : \|z, x(t)\| \leq \delta_o\} \subseteq D$.
Bew.: indirekt:
Annahme: $\forall n \in I\!N \; \exists z_n \in I\!R^m \backslash D, \exists t_n \in [0,1] : \|z_n - x(t)\| \leq \frac{1}{n}$.
$\rightsquigarrow \exists (t_{n_k})$ Teilfolge von (t_n) mit $t_{n_k} \to t_*$.
$\rightsquigarrow x(t_{n_k}) \to x(t_*) \rightsquigarrow z_{n_k} \to x(t_*) \in D$. $\rightsquigarrow$ für hinreichend großes k gilt: $z_{n_k} \in D \rightsquigarrow$ Widerspruch!

Es gilt: M ist beschränkt und abgeschloßen. (analoger Beweis zu oben) $\rightsquigarrow M$ ist kompakt. $\rightsquigarrow T \subset M \subset D$, T, M kompakt.

Nach Voraussetzung ist die Abbildung $t \to \partial_1 H(x(t), t)$ von $[0,1]$ in den $L(I\!R^m)$ stetig. Nach Störungslemma (Satz 7.37) ist auch $[\partial_1 H(x(t),t)]^{-1} : [0,1] \to L(I\!R^m)$ stetig,
$\rightsquigarrow \exists \beta > 0 : \max\limits_{t \in [0,1]} \|[\partial_1 H(x(t),t)]^{-1}\| < \beta$.
$\partial_1 H(\cdot,\cdot)$ ist auf $M \times [0,1]$ gleichmäßig stetig (Satz 4.21).
$\rightsquigarrow \exists \delta_1 \in]0,1[: \|\partial_1 H(\hat{x},\hat{t}) - \partial_1 H(\tilde{x},\tilde{t})\| < \frac{1}{4\beta}$, falls $(\hat{x},\hat{t})$, $(\tilde{x},\tilde{t}) \in M \times [0,1]$ und $\max\{\|\hat{x}-\tilde{x}\|, |\hat{t}-\tilde{t}|\} < \delta_1$.
Insbesondere folgt daraus:

$$\|\partial_1 H(x(t),t) - \partial_1 H(\tilde{x},t)\| < \frac{1}{4\beta}, \quad \forall \tilde{x} \in B(x(t),\delta_1), \forall t \in [0,1].$$

Sei $t \in [0,1]$, $\tilde{x} \in B(x(t),\delta_1)$ bel.
$\rightsquigarrow \|\partial_1 H(x(t),t) - \partial_1 H(\tilde{x},t)\| \|[\partial_1 H(x(t),t)]^{-1}\| < \frac{1}{4\beta}\beta = \frac{1}{4} < 1$.

$$7.37 \rightsquigarrow \exists [\partial_1 H(\tilde{x},t)]^{-1} \text{ und } \|[\partial_1 H(\tilde{x},t)]^{-1} \leq \frac{\beta}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\beta.$$

Sei $\delta > 0$ so gewählt, daß $2\delta < \delta_1$, und daß das Newton-Verfahren für $f(x) = 0$ für jeden Startwert aus $\bar{B}(x_*,\delta)$ gegen $x_* = x(1)$ konvergiert. (Die Voraussetzungen von Satz 9.2 sind erfüllt.)
x ist auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig $\rightsquigarrow \exists \Delta > 0 :$

$$t, \tilde{t} \in [0,1], \; |t - \tilde{t}| < \Delta \rightsquigarrow \|x(t) - x(\tilde{t})\| < \delta$$

Sei $t_o = 0 < t_1 < \ldots, < t_N = 1$ eine Zerlegung von $[0,1]$ so, daß
$\max\limits_{k=1,\ldots,N}(t_k - t_{k-1}) \leq \Delta$.
Beh.: x_k (vom eingebetteten Newton-Verfahren) ist definiert, und es gilt $\|x_k - x(t_k)\| \leq \delta$, $\forall k = 1,\ldots,N$.
($\rightsquigarrow x_N \in \bar{B}(x_*,\delta) \rightsquigarrow$ Konvergenz!)
Bew.: (induktiv)
$k := 0 : \; x(t_o) = x(0) = x_o \rightsquigarrow$ Aussage trivial,

Die Aussage sei für $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ richtig, und wir zeigen $\|x_{k+1} - x(t_{k+1})\| \leq \delta$.
Es gilt: $x_{k+1} := x_k - [\partial_1 H(x_k, t_{k+1})]^{-1} H(x_k, t_{k+1})$.

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow \|x_{k+1} - x(t_{k+1}) &= \|x_k - x(t_k) - [\partial_1 H(x_k, t_{k+1})]^{-1} H(x_k, t_{k+1})\| \\ &\leq \|[\partial_1 H(x_k, t_{k+1})]^{-1} (\partial_1 H(x_k, t_{k+1})(x_k - x_(t_{k+1})) \\ &\quad -H(x_k, t_{+1}) - \underbrace{H(x(t_{k+1}), t_{k+1})}_{=0})\|.\end{aligned}$$

Wenn wir zeigen, daß $x_k \in \bar{B}(x(t_{k+1}), \delta_1)$, so folgt

$$\|[\partial_1 H(x_k, t_{k+1})]^{-1}\| \leq \frac{4}{3}\beta.$$

Es gilt: $\|x_k - x(t_{k+1})\| \leq \underbrace{\|x_k - x(t_k)\|}_{\leq \delta,\, nach\ Ind.\text{–}vor.} + \underbrace{\|x(t_k) - x(t_{k+1})\|}_{< \delta,\, wegen\, t_{k+1} - t_k \leq \Delta} < 2\delta < \delta_1$.

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow \|x_{k+1} - x(t_{k+1})\| &\leq \frac{4}{3}\beta \|H(x_k, t_{k+1}) - H(x(t_{k+1}), t_{k+1}) \\ &\quad -\partial_1 H(x_k, t_{k+1})(x_k - x(t_{k+1}))\| \\ \text{Folg. 5.47 b)} \rightsquigarrow &\leq \frac{4}{3}\beta \sup_{\lambda \in [0,1]} \|\partial_1 H(x(t_{k+1}) + \lambda(x_k - x(t_{k+1})), t_{k+1})\| \\ &\quad \|x_k - x(t_{k+1})\| \\ &\leq \frac{4}{3}\beta \frac{1}{4\beta} \|x_k - x(t_{k+1})\| \leq \frac{1}{3} 2\delta < \delta,\end{aligned}$$

da $\|x_k - x(t_{k+1})\| \leq 2\delta < \delta_1$ und
$\|x(t_{k+1}) + \lambda(x_k - x(t_{k+1})) - x_k\| = (1-\lambda)\|x(t_{k+1}) - x_k\| \leq \|x(t_{k+1}) - x_k\| < \delta_1$, $\forall \lambda \in [0, 1]$. □

Bemerkung 9.25
Die Glattheitsvoraussetzungen in 9.24 bez. H sind ähnlich zu denen in 9.2 (Ausnahme: $\partial_1 H(\cdot, \cdot)$ stetig in beiden Variablen). Die neue zusätzliche Voraussetzung ist die Existenz eines Homotopiepfades. (Wegen $\partial_1 H(x(t), t)$ regulär, $\forall t \in [0, 1]$, st der Homotopiepfad lokal eindeutig bestimmt (aus dem Satz über implizite Funktionen)!) Diese Voraussetzung ist entscheidend für die Konvergenz von Einbettungsmethoden.

Ist H die Standard-Einbettung $H(x, t) = f(x) + (t-1) f(x_o)$, so gilt $\partial_1 H(x(t), t) = f'(x(t))$. D.h. die obige Regularitätsbedingung besagt hier: $f'(x(t))$ ist regulär, $\forall t \in [0, 1]$.

Analog zu Satz 9.24 über die Konvergenz des eingebetteten Newton-Verfahrens lassen sich Resultate über eingebettete Sekanten- bzw. Quasi-Newton-Verfahren beweisen.

Praktisch bedeutet die Aussage von 9.24: Ist die Zerlegung des Intervalls hinreichend "fein", so konvergiert das eingebettete Newton-Verfahren! Entscheidend für die Effektivität ist natürlich die geeignete Wahl der Zerlegung. Sukzessive sollte man mit wenigen Punkten beginnen und dort feiner zerlegen, wo es zu "großen" Änderungen in Homotopiepfad kommt.

Übung 9.26 *$m := 1$, $f(x) = \arctan x$, $f(x) = 0$, ($\forall x \in I\!R$). Das Newton-Verfahren*

$$x_{k+1} := x_k - (1 + x_k^2) \arctan x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

divergiert für x_o so, daß $\arctan x_o > \frac{2x_o}{1+x_o}$.
Man zeige, daß das eingebettete Newton-Verfahren mit Standard-Einbettung anwendbar ist und konvergiert.

Bemerkung 9.27 *Die Einzugsbereiche, d.h. Bereiche von Startwerten, für die lokal konvergente Iterationsverfahren gegen eine bestimmte Lösung konvergieren, haben i.a. eine sehr komplizierte Struktur.*
Beispiel 9.6: $m := 2$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y - 1 \\ -x + y^2 - 1 \end{pmatrix} = 0$.
Lösungen: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.
Im Fall $m = 2$ führt die Untersuchung von Einzugsbereichen zu sog. "fraktalartigen" Mengen!

10 Approximative Darstellung von Funktionen und numerische Integration

<u>Anliegen:</u>

i) reellwertige Funktionen durch möglichst einfache Funktionen annähern bzw. approximieren

ii) (eindimensionale) bestimmte Integrale näherungsweise berechnen.

<u>Motivation:</u>

i) theoretische Motivation (Zugang zur numerische Lösung von Problemen, die Funktionen beinhalten, z.B. numerische Integration, Lösung von DGLen)
praktische Motivation (komplizierte Funktionsverläufe aus gegebenen Meßdaten rekonstruieren)

ii) viele Integrale sind nicht exakt ("geschlossen") berechenbar, ihre Werte werden aber häufig (z.B. für weitere Verwendung) benötigt.

Bemerkung 10.1
In Kap. 7.4 und 7.5 wurden (aus theoretischer Sicht) Approximatioen von stetigen Funktionen behandelt: Approximation durch Polynome, Approximation durch trigonomtetrische Polynome. In Kap. 7.4 blieb letztlich die geeignete Approximation von stetigen Funktionen durch Polynome (aus konstruktiver Sicht) offen.
Eine solche konstruktive Methode könnte im Raum $X := C([a,b])$ der Satz 7.15 sein. Zu jeder stetigen Funktion gibt es dann ein Polynom vom Grad $\leq n$, das den Abstand dieser Funktion zum endlichdimensionalen Teilraum aller solcher Polynome minimiert. Dies ist jedoch i.a. nicht "einfach" berechenbar. Seine Berechnung erfordert selbst Näherungsverfahren (vgl. Stoer/Bulirsch, Maeß II).

10.1 Interpolation mit Polynomen

Aufgabe:
Gegeben: Funktionswerte f_i an Stützstellen $t_i \in [a,b]$, $i = 1, \ldots, n$, und "Basisfunktionen" $\varphi_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.
Gesucht: $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ der Gestalt $p(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t)$, $\forall t \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $p(t_j) = f_j$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

Wir bezeichnen diese Aufgabe als "Interpolationsaufgabe", falls die Stützstellen t_j, $j = 1, \ldots, n$ paarweise verschieden sind.

Definition 10.2
Man sagt, die Basisfunktionen $\varphi_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$

i) erfüllen die Haar'sche Bedingung, falls für alle paarweise verschiedenen $t_j \in [a,b]$, $j = 1, \ldots, n$, die Matrix $(\varphi_i(t_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ regulär ist;

ii) bilden auf $[a,b]$ ein sog. Tschebychew-System, falls jede nichttriviale Linearkombination der φ_i, $i = 1, \ldots, n$ in $[a,b]$ höchstens $n-1$ Nullstellen hat.

Satz 10.3
Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

i) Die Interpolationsaufgabe ist eindeutig lösbar für beliebige $f_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ und beliebige (paarweise verschidene) $t_i \in [a,b]$, $i = 1, \ldots, n$;

ii) die Basisfunktionen φ_i, $i = 1, \ldots, n$ erfüllen auf $[a,b]$ die Haar'sche Bedingung;

iii) die Basisfunktionen φ_i, $i = 1, \ldots, n$ bilden auf $[a,b]$ ein Tschebychew-System.

<u>**Beweis:**</u>
Wir zeigen i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ i).

i) $\to$ ii) Es seien $t_j \in [a,b]$, $j = 1,\ldots,n$ beliebig (paarweise verschieden) gewählt, und wir betrachten die Matrix

$$A := (\varphi_i(t_j))_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \ldots & \varphi_n(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(t_n) & \ldots & \varphi_n(t_n) \end{pmatrix}.$$

Zu zeigen: diese Matrix ist regulär.
Äquivalent dazu ist: $Ax = b$ ist eindeutig lösbar für jedes $b \in \mathbb{R}^n$.
i) bedeutet aber: $p(t_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(t_j) = f_j$, $j = 1,\ldots,n$ ist eindeutig lösbar (bez. $c_1,\ldots,c_n$) für alle "rechten Seiten" $f_1,\ldots,f_n$; d.h. mit $b = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ ist $Ax = b$ eindeutig lösbar für alle $b \in \mathbb{R}^n$.
$\rightsquigarrow$ A ist regulär, d.h. $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ erfüllen die Haar'sche Bedingung.

ii) $\to$ iii) : <u>Annahme:</u> Es existiert eine nichttriviale Linearkombination der φ_i, $i = 1,\ldots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| \neq 0$, die mindestens n Nullstellen $\tilde{t}_1,\ldots,\tilde{t}_n \in [a,b]$ hat.
$(\star)$ $\quad\rightsquigarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(\tilde{t}_j) = 0$, $\forall j = 1,\ldots,n$.
ii) $\rightsquigarrow$ die Matrix $(\varphi_i(t_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ ist regulär.
$\rightsquigarrow$ $a_1 = \ldots = a_n = 0$ ist eindeutig bestimmte Lösung des homogenen linearen GLS $(\star)$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch zu $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| \neq 0$.

iii) $\to$ i) <u>Annahme:</u> Es existieren $\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n \in [a,b]$ so, daß die Interpolationsaufgabe nicht eindeutig lösbar ist, d.h. das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(\bar{t}_j) = f_j, \quad j = 1,\ldots,n$$

ist für beliebige rechte Seiten nicht eindeutig lösbar.
$\rightsquigarrow$ $(\varphi_i(t_j))$ ist nicht regulär
$\rightsquigarrow$ $\exists a_i$, $i = 1,\ldots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| \neq 0 : \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(\bar{t}_j) = 0$, $\forall j = 1,\ldots,n$ (Zeilen der Matrix linear abhängig)
$\rightsquigarrow$ φ_i, $i = 1,\ldots,n$ ist kein Tschebychew-System $\rightsquigarrow$ Widerspruch! $\square$

Folgerung 10.4
Die Interpolationsaufgabe mit Polynomen, d.h. $\varphi_i(t) = t^{i-1}$, $i = 1, \dots, n$ *ist eindeutig lösbar für beliebige* $f_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, *(paarweise verschiedene)* $t_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, n$ *(in allen Intervallen* $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $a < b$*).*
Das eindeutig bestimmte (sog.) Interpolationspolynom hat die Gestalt

$$p(t) = L_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} f_i, \quad \forall t \in [a, b] \quad \textit{(nach Lagrange).}$$

<u>**Beweis:**</u>
Mit $\varphi_i(t) := t^{i-1}$, $i = 1, \dots, n$ ist jede nichttriviale Linearkombination der $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Polynom vom Grad $\leq n - 1$. Solche Polynome haben nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens $n - 1$ Nullstellen in $\mathbb{R}$, also erst recht in jedem Teilintervall.
$\rightsquigarrow$ φ_i, $i = 1, \dots, n$ bilden ein Tschebychew-System auf jedem Intervall $[a, b]$
$\rightsquigarrow$ Anwendung von Satz 10.3!

$L_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} f_i$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n - 1$, und es gilt:

$$L_n(t_k) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t_k - t_j}{t_i - t_j} f_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{t_k - t_j}{t_k - t_j} f_k = f_k, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$\rightsquigarrow$ wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Interpolationsaufgabe muß die Lösung gerade $p = L_n$ sein!

Bemerkung 10.5

a) *<u>Beispiele:</u> für Tschebychew-Systeme:*

i) $\{1, \cos j\pi t, \sin j\pi t : j = 1, \dots, k\}$ *bilden ein Tschebychew-System mit* $n = 2k + 1$ *auf* $[0, 1]$. *(Übung!)*

ii) Ist $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend, so ist* $\{h(t)^j, j = 0, \dots, n - 1\}$ *ein Tschebychew-System auf* $[a, b]$. *(Übung!)*

iii) $\{1, t^2\}$ *ist <u>kein</u> Tschebychew-System auf* $[-1, 1]$*!*
(Bew.: die Funktion $f(t) = 1 - t^2$ *hat zwei Nullstellen in [-1,1]!)*

b) *Folgerung 10.4 löst das Problem der Interpolation mit Polynomen aus theoretischer Sicht vollständig. Die Lagrange'sche Form ist auch für theoretische Anwedungen geeignet. Aber: Ein Nachteil ist die relativ aufwendige Berechnung für großes* n*, und daß zur Berechnung von* L_{n+1} *die Formel für* L_n *nicht verwendet werden kann.*

Idee für andere Berechnungsvorschrift für das Interpolationspolynom p_n:

Ansatz: $p_j(t) = p_{j-1}(t) + a_j \sum_{i=1}^{j-1} (t - t_i), \quad j = 2, \ldots, n$

$p_1(t) = f_1.$

$\rightsquigarrow p_j$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Frage: Können die a_j, $j = 2, \ldots, n$ so bestimmt werden, daß p_n Lösung der Interpolationsaufgabe ist?

Definition 10.6

Es seien $f_i \in \mathbb{R}$ und (paarweise verschiedene) $t_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, n$ gegeben, $i_j \in \{1, \ldots, n\}$, $j = 1, \ldots, k$ (paarweise verschieden). Dann heißt

$$\Delta^{k-1} f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}) := \frac{\Delta^{k-2} f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_{k-1}}) - \Delta^{k-2} f(t_{i_2}, \ldots, t_{i_k})}{t_{i_1} - t_{i_k}} \quad (k \geq 2)$$

$$\Delta^0 f(t_i) := f_i$$

Differentialquotient $(k-1)$-ter Ordnung zu $\{t_{i_j}, f_{i_j} : j = 1, \ldots, k\}$.
Mit $P_{i_1,\ldots,i_k}$ bezeichnen wir das eindeutig bestimmte Polynom $(k-1)$-ten Grades mit $P_{i_1,\ldots,i_k}(t_{i_j}) = f_{i_j}$, $j = 1, \ldots, k$. (existiert nach 10.4!)

Lemma 10.7

a) *Für $k \geq 2$ gilt:*

$$P_{i_1,\ldots,i_k}(t) = \frac{1}{t_{i-1} - t_{i_k}} [(t - t_{i_k}) P_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(t) - (t - t_{i_1}) P_{i_2,\ldots,i_k}(t)], \ \forall t \in [a, b].$$

b) $P_{i_1,\ldots,i_k}(t) = P_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(t) + \Delta^{k-1} f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}) \prod_{j=1}^{k-1} (t - t_{i_j}).$

Beweis:

a) sei $R(t) := \frac{1}{t_{i-1} - t_{i_k}} [(t - t_{i_k}) P_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(t) - (t - t_{i_1}) P_{i_2,\ldots,i_k}(t)]$.

($P_{i_1,\ldots,i_k}$ Polygon $\leq$ $(k-1)$-ten Grades mit $P_{i_1,\ldots,i_k}(t_{i_j}) = f_{i_j}$, $j = 1, \ldots, k$).

$P_{i_1,\ldots,i_{k-1}}$, $P_{i_2,\ldots,i_k}$ Polynome vom Grad $\leq k - 2$.

$\rightsquigarrow R$ ist Polynom vom Grad $\leq k - 1$ und

$$R(t_{i_j}) = \begin{cases} \frac{1}{t_{i_1} - t_{i_k}} [-(t_{i_k} - t_{i_1}) f_{i_k}] = f_{i_k} & , j = k \\ \frac{1}{t_{i_1} - t_{i_k}} [(t_{i_1} - t_{i_k}) f_{i_1}] = f_{i_1} & , j = 1 \\ \frac{1}{t_{i_1} - t_{i_k}} [(t_{i_j} - t_{i_k}) f_{i_j} - (t_{i_j} - t_{i_1}) f_{i_j}] = f_{i_1} & , j \in \{2, \ldots, k-1\} \end{cases}$$

10.4 $\rightsquigarrow R = P_{i_1,\ldots,i_k}$, da das Interpolationspolynom eindeutig bestimmt ist.

b) Wir betrachten $Q := P_{i_1,\dots,i_k} - P_{i_1,\dots,i_{k-1}}$. Q ist Polynom vom Grad $\le k-1$.

Zu zeigen: $Q(t) = \Delta^{k-1} f(t_{i_1},\dots,t_{i_k}) \prod\limits_{i=1}^{k-1}(t-t_{i_j})$.

Es gilt: $Q(t_{i_j}) = f_{i_j} - f_{i_j} = 0$, $j = 1,\dots,k-1$ (nach der Form von $R(t_{i_j})$ in Teil a)).

$\rightsquigarrow Q(t)$ hat die Gestalt $Q(t) = a_{i_1,\dots,i_k} \prod\limits_{j=1}^{k-1}(t-t_{i_j})$.

Zu zeigen: $a_{i_1,\dots,i_k} = \Delta^{k-1} f(t_{i_1},\dots,t_{i_k})$.

$$\rightsquigarrow P_{i_1,\dots,i_k}(t) = P_{i_1,\dots,i_{k-1}}(t) + a_{i_1,\dots,i_k} \prod_{j=1}^{k-1}(t-t_{i_j}) = a_{i_1,\dots,i_k} t^{k-1} + \dots$$

Aus Teil a) folgt: $a_{i_1,\dots,i_k} = \frac{1}{t_{i_1}-t_{i_k}}[a_{i_1,\dots,i_{k-1}} - a_{i_2,\dots,i_k}]$. (Vergleich der Koeffizienten vor der höchsten Potenz von t, d.h. vor t^{k-1}.)

Vergleich mit der Definition 10.6 der Differenzenquotienten $(k-1)$-ter Ordnung zeigt:

$$a_{i_1,\dots,i_k} = \Delta^{k-1} f(t_{i_1},\dots,t_{i_k}) \qquad \square$$

Folgerung 10.8

Das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom (zu gegebenen Stützstellen $t_j \in [a,b]$, $j = 1,\dots,n$, $f_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,n$) hat die Gestalt:

$$p(t) := N_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \Delta^{j-1} f(t_{i_1},\dots,t_{i_j}) \prod_{i=1}^{j-1}(t-t_i) \quad \textit{(nach Newton)}$$

<u>**Beweis:**</u>

Anwendung von 10.7 b) mit $k := n$, $i_j := j$, $j = 1,\dots,n$:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow P_{1,\dots,n}(t) &= P_{1,\dots,n-1} + \Delta^{n-1} f(t_1,\dots,t_n) \prod_{i=1}^{n-1}(t-t_i) \quad \text{usw.} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Delta^{j-1} f(t_1,\dots,t_j) \prod_{i=1}^{j-1}(t-t_i), \end{aligned}$$

und $P_{1,\dots,n}$ ist Lösung der Interpolationsaufgabe, d.h. $p = P_{1,\dots,n}$. $\square$

Bemerkung 10.9

Wegen der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms (nach 10.4) gilt natürlich $L_n = N_n$. Allerdings ist die Newtonsche Gestalt N_n des Interpolationspolynoms günstiger für die numerische Berechnung (vgl. Bem. 10.5 b)).

Nächster Schritt: Untersuchung der "Konvergenz" (für $n \to \infty$) von N_n gegen die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(t_i) = f_i$, $i = 1,\dots,n,\dots$.

Sei $n \in I\!N$ fest, und wir betrachten $t \in [a,b] \backslash \{t_j : j = 1, \ldots, n\}$ beliebig. N_{n+1} sei das Interpolationspolynom mit $N_{n+1}(t_j) = f(t_j) = f_j$, $j = 1, \ldots, n$ und $N_{n+1}(t) = f(t)$.

10.8 $\rightsquigarrow N_{n+1}(t) = N_n(t) + \Delta^n f(t_1, \ldots, t_n, t) \prod_{i=1}^{n}(t - t_i) = f(t)$.

$\rightsquigarrow f(t) - N_n(t) = \Delta^n f(t_1, \ldots, t_n, t) \prod_{i=1}^{n}(t - t_i)$

$\rightsquigarrow |f(t) - N_n(t)| = |\Delta^n f(t_1, \ldots, t_n, t)| \prod_{i=1}^{n} |t - t_i|$.

Problem: Abschätzung von Differenzenquotienten.
Daraus resultieren dann sofort Aussagen über die Konvergenz!

Lemma 10.10
Sei $f : [a,b] \to I\!R$ stetig und auf $]a,b[$ $(k-1)$-mal differenzierbar ($k \geq 2$). Dann gilt für beliebig gewählte (paarweise verschiedene) $t_i \in [a,b]$, $i = 1, \ldots, k$, $f_i := f(t_i), i = 1, \ldots, k$:

$$\exists \xi \in]a,b[: \Delta^{k-1} f(t_1, \ldots, t_k) = \frac{1}{(k-1)!} f^{k-1}(\xi)$$

<u>**Beweis:**</u>
Wir betrachten die Funktion $g : [a,b] \to I\!R$, $g(t) := f(t) - P_{1,\ldots,k}(t)$, $\forall t \in [a,b]$ (vgl. Bez. aus 10.6, 10.7).
Es gilt: $g(t_i) = 0$, $i = 1, \ldots, k$.
Nach dem Satz von Rolle (Satz 5.9) besitzt g' mindestens $k-1$ Nullstellen (zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stützstellen liegt mindestens eine solche Nullstelle). Wieder nach Satz 5.9 liegt zwischen je zwei dieser Nullstellen mindestens eine Nullstelle von g''.
Durch Wiederholung dieses Arguments erhalten wir mindestens eine Nullstelle $\xi \in]a,b[$ von $g^{(k-1)} \rightsquigarrow g^{(k-1)}(\xi) = 0$.

Es gilt: $g^{(k-1)}(t) = f^{(k-1)}(t) - (k-1)! \Delta^{k-1} f(t_1, \ldots, t_k)$
wegen $P_{1,\ldots,k}(t) = \Delta^{k-1} f(t_1, \ldots, t_k) t^{k-1} + \ldots$
$\rightsquigarrow f^{(k-1)}(\xi) = (k-1)! \Delta^{k-1} f(t_1, \ldots, t_k)$. □

Folgerung 10.11
$f : [a,b] \to I\!R$ sei stetig und auf $]a,b[$ n-mal differenzierbar. Dann gilt für das Newtonsche Interpolationspolynom (zu $t_i, f_i := f(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$):

$$|f(t) - N_n(t)| \leq \frac{1}{n!} \sup_{s \in]a,b[} |f^{(n)}(s)| \prod_{i=1}^{n} (t - t_i), \quad \forall t \in [a,b].$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 10.9 \rightsquigarrow |f(t) - N_n(t)| &= |\Delta^n f(t_1, \ldots, t_n, t)| \prod_{i=1}^{n} |t - t_i| \\ (10.10\text{: } \exists \xi \in]a,b[\text{:}) &= \frac{1}{n!} |f^{(n)}(\xi)| \prod_{i=1}^{n} |t - t_i| \end{aligned} \qquad \square$$

Satz 10.12
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf $[a,b]$ beliebig oft differenzierbar; es mögen Konstanten $c, d > 0$ existieren, so daß

$$|f^{(n)}(t)| \leq c^n d, \quad \forall t \in]a,b[, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Gegeben sei eine Folge $(\{t_i^{(n)} : i = 1, \ldots, n\})_{n \in \mathbb{N}}$ von (für jedes $n \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedenen) Stützstellen in $[a,b]$ >, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei N_n das (Newtonsche) Interpolationspolynom zu $t_i^{(n)}$, $f_i^{(n)} := f(t_i^{(n)})$, $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - N_n(t)| = 0$.

Beweis:
Nach Voraussetzung gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach Folgerung 10.11:

$$|f(t) - N_n(t)| = \frac{1}{n!} \underbrace{\sup_{s \in]a,b[} |f^{(n)}(s)|}_{\leq c^n d} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} |t - t_i|}_{\leq (b-a)^n}$$

$$\rightsquigarrow \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - N_n(t)| \leq d \frac{[c(b-a)]^n}{n!} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \square$$

Satz 10.13 *(Faber)*
Für jede Folge $(\{t_i^{(n)} : i = 1, \ldots, n\})_{n \in \mathbb{N}}$ von Stützstellen in $[a,b]$ ($\forall n \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden) existiert eine Funktion $f \in C([a,b])$ so, daß die Folge $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der (Newtonschen) Interpolationspolynome (zu $t_i^{(n)}$, $f_i^{(n)} := f(t_i^{(n)})$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$) <u>nicht</u> gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweisidee:
Wir definieren $A_n : C([a,b]) \to C([a,b])$,
$(A_n f)(t) := \sum\limits_{j=1}^{n} w_j^{(n)}(t) f(t_j^{(n)}), \quad \forall t \in [a,b]$,
wobei $w_j^{(n)}(t) = \prod\limits_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_i^{(n)}}{t_j^{(n)} - t_i^{(n)}}$, $\forall j = 1, \ldots, n$.
D.h. $N_n = A_n f$.
A_n ist linearer Operator, A_n ist auch beschränkt, denn

$|(A_nf)(t)| \leq (\sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)}(t))\|f\|_\infty$
$\rightsquigarrow \|A_nf\|_\infty \leq K_n\|f\|_\infty$, wobei K_n konstant.

Annahme: $\forall f \in C([a,b])$ gilt $\|f - N_n\| = \|f - A_nf\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. A_n ist punktweise konvergent.
$\rightsquigarrow$ Satz von Banach/Steinhaus (7.26): $\exists C > 0 : \|A_n\| \leq C$.
Es gilt aber: $\|A_n\| = \max\limits_{t\in[a,b]} \sum\limits_{j=1}^{n} |w_j^{(n)}(t)| \geq \frac{\log n}{8\sqrt{\pi}}$ (Faber/Bernstein)
$\rightsquigarrow$ (A_n) kann nicht punktweise konvergent sein! $\square$
(Literatur: I.P. Nathanson, Konstruktive Funktionentheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1955, S. 370 ff.)

Beispiele 10.14

a) $f(t) := |t|, \forall t \in [-1,1]$, *äquidistante Stützstellen mit* $t_1^{(n)} = -1$, $t_n^{(n)} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt: $N_n \not\to f(t)$, $\forall t \in]-1,1[\setminus\{0\}$. *(Bernstein)*
(Literatur: Natanson, S. 375 ff.)

b) $f(t) := (1 + 25t^2)^{-1}$, $\forall t \in [-1,1]$, *Stützstellen wie in a)*
Dann gilt: $N_n \not\to f(t)$, $\forall t$ *mit* $|t| > 0.726$. *(Runge)*
Für $n \geq 6$ *zeigen die Polynome* N_n *immer stärkeres Oszillationsverhalten. (typisch für Polynom-Interpolation!)*

Bemerkung 10.15
Bei der Interpolation mit Polynomen sind zwar Theorie und Konstruktion einfach, es gibt aber Probleme mit der Konvergenz.
Alternative: andere Basisfunktionen

Idee: Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ *in Teilintervalle, und dort stückweise Interpolation mit Polynomen vom Grad* ≤ 5, *(Absicherung einer gewissen "Glattheit" der Näherungen auf dem gesamten Intervall) und Stücke "glatt" zusammensetzen – "Splines".*

10.2 Interpolation mit kubischen Splines

Definition 10.16
Gegeben sei eine Zerlegung $a = t_o < \ldots < t_N = b$ *von* $[a,b]$.
Eine Funktion $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *heißt Splinefunktion der Ordnung* k *auf* $[a,b]$ *(zu* t_i, $i = 0,\ldots,n$*), falls* s $(k-1)$*-mal stetig differenzierbar auf* $[a,b]$ *ist und auf* $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1,\ldots,n$, *jeweils ein Polynom vom Grad* $\leq k$ *darstellt.*
s *heißt interpolierende Splinefunktion zu* (t_i, f_i), $i = 0,\ldots,n$, *falls* s *Splinefunktion ist und* $s(t_i) = f_i$, $i = 0,\ldots,n$ *gilt.*
Eine Splinefunktion der Ordnung $k = 3$ *heißt kubischer Spline.*

Zielstellung: Konstruktion kubischer interpolierender Splines und Untersuchung von Existenz, Eindeutigkeit und Konvergenz.

Gegeben: Zerlegung $a = t_o < \ldots < t_N = b$ und $h_j := t_j - t_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$

Ansatz für kubische Splines:

$$s''(t) := \frac{1}{h_i}[(t - t_{i-1})M_i + (t_i - t)M_{i-1}], \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, n,$$

wobei $M_i = s''(t_i)$, $i = 0, \ldots, n \rightsquigarrow s''$ ist stetig.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow s'(t) &= \frac{1}{2h_i}[(t - t_{i-1})^2 M_i - (t_i - t)^2 M_{i-1}] + C_i \\
\rightsquigarrow s(t) &= \frac{1}{6h_i}[(t - t_{i-1})^3 M_i + (t_i - t)^3 M_{i-1}] + C_i(t - t_{i-1}) + d_i,
\end{aligned}$$

$(\forall t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, n)$, mit noch freien reellen Parametern M_i, C_i, d_i.

s ist kubischer Spline, falls diese Parameter so gewählt werden können, daß s zweimal stetig differenzierbar auf $[a, b]$ ist.

Lemma 10.17
$s : [a, b] \to I\!R$ ist kubischer Spline (zur Zerlegung $a = t_o < \ldots < t_N = b$), falls s die obige Gestalt hat, wobei

i) $C_i = -\frac{1}{6}h_i(M_i - M_{i-1}) + \frac{1}{h_i}(s_i - s_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$,

ii) $d_i = s_{i-1} - \frac{1}{6}h_i^2 M_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$,

iii) $M_i = \frac{2}{h_i + h_{i+1}}(C_{i+1} - C_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$, $s_i = s(t_i)$.

Beweis:
Zu zeigen bleibt: s, s' sind stetig in den Zerlegungspunkten t_i.
d.h. $\lim\limits_{t \to t_i -} s(t) = \lim\limits_{t \to t_i +} s(t), \quad \lim\limits_{t \to t_i -} s'(t) = \lim\limits_{t \to t_i +} s'(t), \quad i = 1, \ldots, n.$
Aus i) und ii) folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to t_i -} s(t) &= \frac{1}{6h_i}[h_i^3 M_i] + C_i h_i + d_i = \frac{h_i^2}{6} M_i + C_i h_i + d_i \\
&= \frac{h_i^2}{6} M_i - \frac{h_i^2}{6} M_i + \frac{h_i^2}{6} M_{i-1} + s_i - s_{i-1} + s_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1} \\
&= s_i = s(t_i) \\
\lim_{t \to t_i +} s(t) &= \frac{1}{6h_{i+1}} h_{i+1}^2 M_i + d_{i+1} = s_i = s(t_i).
\end{aligned}$$

Analog: Stetigkeit von s'.

Bemerkung 10.18
Aus den Bedingungen i), ii), iii) von Lemma 10.17 folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(h_{i+1}+h_i)M_i &= C_{i+1}-C_i\\
&= -\frac{1}{6}h_{i+1}(M_{i+1}-M_i)-\frac{1}{h_{i+1}}(s_{i+1}-s_i)\\
&\quad -(-\frac{1}{6}h_i(M_i-M_{i-1})+\frac{1}{h_i}(s_i-s_{i-1}))\\
&= -\frac{1}{6}h_{i+1}M_{i+1}-\frac{1}{6}M_i(h_{i+1}+h_i)-\frac{1}{6}h_iM_{i-1}+S_i,\\
&\quad (i=1,\dots,n-1),
\end{aligned}$$

wobei $S_i=\frac{1}{h_{i+1}}(s_{i+1}-s_i)+\frac{1}{h_i}(s_i-s_{i-1})$, $i=1,\dots,n-1$.
Also entsteht das folgende lineare Gleichungssystem für die Unbekannten $M_o,\dots,M_n$*:*

$$\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}M_{i+1}=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}S_i,\ i=1,\dots,n_1.$$

Es entsteht $AM=S$ $\quad(\star)$*, wobei*
$S=(\frac{6}{h_1}\lambda_1S_1-\lambda_1M_o,\dots,\frac{6}{h_i}\lambda_iS_i,\dots,\frac{6}{h_{n-1}}\lambda_{n-1}S_{n-1}-\mu_{n-1}M_n)^T$

$$M=\begin{pmatrix}M_1\\ \vdots\\ M_{n-1}\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}2&\mu_1&0&\cdots&0&0\\ \lambda_2&2&\mu_2&0&\cdots&0\\ 0&\lambda_3&2&\mu_3&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ 0&\cdots&0&\lambda_{n-1}&2&\mu_{n-1}\\ 0&0&\cdots&0&\lambda_n&2\end{pmatrix}$$

("Tridiagonalgestalt") mit $\lambda_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$, $\mu_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$

Lemma 10.19
$A\in L(R^{n-1})$ *sei die in 10.18 definierte Matrix für eine beliebige Zerlegung* $a=t_0<\ldots<t_n=b$*, und* $\|\cdot\|_\infty$ *sei die zu* $\|x\|_\infty=\max\limits_{i=1,\dots,n-1}|x_i|$ *gehörige Norm auf* $L(\mathbb{R}^{n-1})$*. Dann existiert* $A^{-1}\in L(\mathbb{R}^{n-1})$*, und* $\|A^{-1}\|_\infty\leq 1$.

__Beweis:__
Sei $D:=2I\rightsquigarrow D^{-1}=\frac{1}{2}I$, und es gilt:

$$I-D^{-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-\mu_1&0&\dots\\ -\lambda_2&\ddots&-\mu_2&0\\ 0&\ddots&0&-\mu_{n-1}\\ 0&0&-\lambda_n&0\end{pmatrix}.$$

$\rightsquigarrow \|I - D^{-1}A\|_\infty = \frac{1}{2}$.
Nach Satz 7.37 existiert $(I-(I-D^{-1}A))^{-1} = (D^{-1}A)^{-1}$, und es gilt:

$$\|I - D^{-1}A\|_\infty \leq \frac{1}{1-\|I-D^{-1}A\|_\infty} \leq 2$$

$\rightsquigarrow A^{-1}$ existiert, und

$$\|A^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}DD^{-1}\|_\infty \leq \|A^{-1}D\|_\infty \|D^{-1}\|_\infty \leq 2\frac{1}{2} = 1 \qquad \square$$

Satz 10.20
Gegeben sei eine Zerlegung $a = t_o < \ldots < t_n = b$ und $f_i\,(i = 0,\ldots,n)$. Für beliebige $M_o, M_n \in I\!R$ existiert ein interpolierender Spline s (zu (t_i, f_i), $i = 0,\ldots,n$) mit $s''(a) = M_o$, $s''(b) = M_n$, und ist eindeutig bestimmt.
(Bem.: Für $M_o = M_n = 0$ heißt s "natürlicher kubischer Spline".)

Beweis:
Man definiert für gegebene M_o, M_n das Element $S \in I\!R^{n-1}$ entsprechend Bem. 10.18 (mit $s_i := f_i$, $i = 0,\ldots,n$). Nach Lemma 10.19 ist $M = A^{-1}S$ eindeutig bestimmt. Dann wird aus Lemma 10.17 C_i, d_i, $i = 1,\ldots,n$, $s_i := f_i$ bestimmt, und $s : [a,b] \to I\!R$,

$$\begin{aligned} s(t) \;=\; & \frac{1}{6h_i}[(t-t_{i-1})^3 M_i + (t_i - t)^3 M_{i-1}] \\ & + C_i(t - t_{i-1}) + d_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i],\, i = 1,\ldots,n, \end{aligned}$$

ist kubischer Spline mit $s(t_i) = f_i$, $1 = 0,\ldots,n$.
(Der Beweis ist konstruktiv und enthält den Algorithmus.) $\square$

Lemma 10.21
Gegeben seien $f : [a,b] \to I\!R$ und eine äquidistante Zerlegung $t_i = a + ih$, $i = 0,\ldots,n$, bei vorgegebenen $M_o, M_n \in I\!R$. Dann gilt:

$$\sup_{t\in[a,b]} |s(t) - f(t)| \leq 6 \max_{i=1,\ldots,n} \sup_{t,\tilde{t}\in[t_{i-1},t_i]} |f(t) - f(\tilde{t})| + \frac{1}{2}h^2(|M_o| + |M_n|)$$

Beweis:
Mit den Bezeichnungen aus Bem. 10.18 folgt aus Lemma 10.19

$$\begin{aligned} \|M\|_\infty \;&=\; \max_{j=1,\ldots,n-1} |M_j| \leq \|A^{-1}\|_\infty \|S\|_\infty \leq \|S\|_\infty \\ &\leq\; \frac{3}{h} \max_{j=1,\ldots,n-1} |S_j| + \frac{1}{2}(|M_o| + |M_n|) \end{aligned}$$

und $|S_i| \leq \frac{1}{h}(|f(t_{i+1}) - f(t_i)| + |f(t_i) + f(t_{i-1})),\ i = 1,\ldots,n_1$.
$\rightsquigarrow \max\limits_{i=1,\ldots,n-1} |M_i| \leq \frac{6}{h^2} \max\limits_{i=1,\ldots,n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \frac{1}{2}(|M_o| + |M_n|)$.

Nach Lemma 10.17 gilt für $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$s(t) = \frac{1}{6h}[(t-t_{i-1})^3 M_i + (t_i - t)^3 M_{i-1}] + C_i(t-t_{i-1}) + d_i$$

mit $C_i := -\frac{1}{6}h(M_i - M_{i-1}) + \frac{1}{h}(f(t_i) - f(t_{i-1}))$
und $d_i := f(t_{i-1}) - \frac{1}{6}h^2 M_{i-1}$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow s(t) \;=\; & M_i[\frac{1}{6h}(t-t_{i-1})^3 - \frac{1}{6h}(t-t_{i-1})] \\
& +M_{i-1}[\frac{1}{6h}(t_i - t)^3 - \frac{1}{6h}(t-t_{i-1}) - \frac{1}{6}h^2] \\
& +\frac{1}{h}(t-t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1})) + f(t_{i-1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow |s(t) - f(t)| \;\leq\; & |M_i|\frac{h^2}{3} + |M_{i-1}||\frac{1}{6h}(t_i - t)^3 + \frac{1}{6}h(t_i - t)| \\
& +|f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(t_i) - f(t)| \\
\leq\; & \frac{h^2}{3}(|M_i| + |M_{i-1}|) + 2 \sup_{t,\tilde{t} \in [t_{i-1}, t_i]} |f(t) - f(\tilde{t}), \\
& (\quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, n)
\end{aligned}$$

Für $i = 2, \ldots, n-1$ und $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ gilt:

$$\begin{aligned}
|s(t) - f(t)| \;\leq\; & \frac{2}{3}h^2 \max_{j=1,\ldots,n-1} |M_j| + 2 \sup_{t,\tilde{t} \in [t_{i-1}, t_i]} |f(t) - f(\tilde{t})| \\
\leq\; & 4 \max_{i=1,\ldots,n-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \frac{h^2}{3}(|M_o| + |M_n|) \\
& +2 \sup_{t,\tilde{t} \in [t_{i-1}, t_i]} |f(t) - f(\tilde{t})| \\
\leq\; & 4 \max_{i=1,\ldots,n-1} \sup_{t,\tilde{t} \in [t_{i-1}, t_i]} |f(t) - f(\tilde{t})| + \frac{h^2}{3}(|M_o| + |M_n|) \\
& +2 \max_{i=1,\ldots,n-1} \sup_{t,\tilde{t} \in [t_{i-1}, t_i]} |f(t) - f(\tilde{t})| \\
\leq\; & 6 \max_{i=1,\ldots,n-1} \sup_{t,\tilde{t} \in [t_{i-1}, t_i]} |f(t) - f(\tilde{t})| + \frac{h^2}{3}(|M_o| + |M_n|)
\end{aligned}$$

Mit einer gesonderten Betrachtung für $i = 1$, $i = n$ erhält man, daß diese Ungleichung, allerdings mit den Konstanten 4 bzw. $\frac{1}{2}$ statt 6 bzw. $\frac{1}{3}$, auch dann gültig ist.
Daraus folgt die Behauptung.

Satz 10.22 *(Konvergenz)*
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $t_i^{(n)} := a + ih_n$, $i =$

$0, \ldots, n$, $h_n := \frac{b-a}{n}$. *Für gegebene* $M_a, M_b \in I\!R$ *sei* s_n $(n \in I\!N)$ *der interpolierende kubische Spline zu* $(t_i^{(n)}, f(t_i^{(n)}))$, $i = 0, \ldots, n$, *mit* $s''(a) = M_a$, $s''(b) = M_b$. *Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b]} |s_n(t) - f(t)| = 0.$$

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ ist, existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$|f(t) - f(\tilde{t})| < \frac{\varepsilon}{12}, \quad \text{falls } |t - \tilde{t} < \delta.$$

Wir wählen $n_o \in I\!N$ so groß, daß $h_n < \delta$ und $\frac{1}{2}h_n^2(|M_a| + |M_b|) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_o$. Dann folgt aus Lemma 10.21:

$$\begin{aligned} \max_{t\in[a,b]} |s_n(t) - f(t)| &\leq 6 \sup_{|t-\tilde{t}|<h_n} |f(t) - f(\tilde{t})| + \frac{1}{2}h_n^2(|M_a| + |M_b|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o \qquad \Box \end{aligned}$$

Bemerkung 10.23
Ein Vergleich mit Satz 10.13 zeigt, daß also interpolierende (natürliche) kubische Splines wesentlich bessere Konvergenzeigenschaften als Interpolationspolynome besitzen! Für "glattere" Funktionen f *lassen sich sogar bessere Konvergenzeigenschaften beweisen:*

$$\max_{t\in[a,b]} |s_n(t) - f(t)| \leq h_n^k, \quad (k = 1, 2, 3; \textit{ falls } f \in C^k([a, b]))$$

(vgl. Stoer/Bulirsch, Kap. 2.4.3)
Aus Lemma 10.21 folgt z.B. auch für f *Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante* $L_f > 0$*):*

$$\max_{t\in[a,b]} |s_n(t) - f(t)| \leq (6L_f + \frac{1}{2}h_n(|M_a| + |M_b|))h_n.$$

Es existieren auch Erweiterungen des Konvergenzsatzes auf nichtäquidistante Stützstellen!

Das nächste Resultat zeigt, daß unter allen glatten Interpolierenden von f der natürliche kubische Spline das "beste" Oszillationsverhalten hat, d.h. die geringste "Gesamtkrümmung" auf $[a, b]$ besitzt.

Satz 10.24 *(Holladay)*
Gegeben seien $a = t_o < \ldots < t_N = b$ *und* $f_i \in I\!R$, $i = 0, \ldots, n$. $s : [a, b] \to I\!R$ *sei der interpolierende natürliche kubische Spline (zu* (t_i, f_i), $i = 0, \ldots, n$*).*

Es bezeichne
$Y := \{y : [a,b] \to I\!R,\ y(t_i) = f_i,\ i = 0,\ldots,n,\ y$ *zweimal stetig differnzierbar auf* $]a,b[\}$. *Dann gilt:*

$$\int_a^b (s''(t))^2 dt = \min_{y \in Y} \int_a^b (y''(t))^2 dt.$$

Beweis:
Es gilt $s \in Y$, da $s \in C^2([a,b])$ und $s(t_i) = f_i$, $i = 0,\ldots,n$. Deshalb genügt es zu zeigen:

$$A(y) := \int_a^b (y''(t))^2 dt - \int_a^b (s''(t))^2 dt \geq 0, \quad \forall y \in Y.$$

$$\rightsquigarrow A(y) := \underbrace{\int_a^b (y''(t) - s''(t))^2 dt}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\int_a^b s''(t)(y''(t) - s''(t)) dt.}_{=:B(y)}$$

$\rightsquigarrow A(y) \geq 0$, $\forall y \in Y$, falls $B(y) = 0$, $\forall y \in Y$.

z.z.: $B(y) = 0$, $\forall y \in Y$. Sei dazu $y \in Y$ beliebig.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow B(y) &= \int_a^b (y''(t) - s''(t))s''(t) dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (y''(t) - s''(t))s''(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \left([(y'(t) - s'(t))s''(t)]_{t_{j-1}}^{t_j} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (y'(t) - s'(t))s'''(t) ds \right) \end{aligned}$$

(partielle Integration)
s'' ist linear in $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,\ldots,n$, $s''(t) = \frac{1}{h_j}[(t - t_{j-1})M_j + (t_j - t)M_{j-1}]$.
$\rightsquigarrow s'''(t) = \frac{1}{h_j}(M_j - M_{j-1})$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow B(y) &= \sum_{j=1}^n \left([(y'(t) - s'(t))s''(t)]_{t_{j-1}}^{t_j} + \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (y'(t) - s'(t))s'(t) dt \right) \\ &= [(y'(b) - s'(b)) \underbrace{s''(b)}_{=0} - (y'(a) - s'(a)) \underbrace{s''(a)}_{=0})] \\ &\quad + \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} [\underbrace{y(t_j) - s(t_j)}_{=0} - (\underbrace{y(t_{j-1}) - s(t_{j-1})}_{=0})] \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow B(y) = 0$ $\square$

10.3 Numerische Integration

Aufgabe: Numerische Berechnung von $\int\limits_a^b f(t)dt$ für $f \in C([a,b])$.

Motivation:

i) Viele (analytisch gegebene) Funktionen sind nicht geschlossen integrierbar;

ii) häufig sind Funktionen nur näherungsweise (z.B. in diskreten Punkten) gegeben.

Grundidee: Ersetze den Intergranden f durch eine einfachere Funktion, die f annähert. (z.B. durch eine interpolierende Funktion)

Definition 10.25

Es sei $f : [a,b] \to I\!R$ Riemann-integrierbar, und es seien $n \in I\!N$, $A_i \in I\!R$, $i = 1,\dots,n$, und paarweise verschiedene $t_i \in [a,b]$, $i = 1,\dots,n$ gegeben.

a) $(\star)$ $\int\limits_a^b f(t)dt \approx \sum\limits_{i=1}^n A_i f(t_i)$ *heißt Integrationsformel für f auf $[a,b]$.*

b) $(\star)$ *heiß Integrationsformel von Newton-Cotes, falls $A_1 := b-a$, (falls $n=1$), bzw. $A_i := \int\limits_a^b \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n \frac{t-t_k}{t_i-t_k}dt$, $i = 1,\dots,n$, (falls $n > 1$).*

c) *Die Integrationsformel $(\star)$ heiß genau für f, falls $\int\limits_a^b f(t)dt = \sum\limits_{i=1}^n A_i f(t_i)$.*

Bemerkung 10.26

Die Integrationsformeln von Newton-Cotes entstehen bei Ersetzung von f durch das Interpolationspolynom (zu $(t_i, f(t_i))$, $i = 1,\dots,n$) in der Lagrangeschen Gestalt:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt \approx \int_a^b L_n(t)dt &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n \frac{t-t_k}{t_i-t_k} f(t_i)dt \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\int_a^b \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n \frac{t-t_k}{t_i-t_k}dt}_{A_i}\, f(t_i).\end{aligned}$$

Spezialfall: $t_i = a + \underbrace{\frac{b-a}{n-1}}_{=:h}(i-1),\ i = 1, \dots, n.$

$$\rightsquigarrow A_i \ := \int\limits_a^b \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n \frac{t-(a+(k-1)h)}{(i-k)h}dt$$

Substitution: $t = a + (\tau - 1)h,\ \tau \in [1, n]:$

$$= \underbrace{h\int\limits_1^n \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n \frac{\tau-k}{i-k}d\tau}_{=:\alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Die α_i, $i = 1, \dots, n$ sind unabhängig von f und $[a, b]$, und sind in der Literatur tabelliert. (Stoer/Bulirsch, Kap. 3.1).
$\rightsquigarrow$ *Gestalt der Integrationsformel von Newton-Cotes bei äquidistanten Stützstellen:*
$\int\limits_a^b f(t)dt \approx h\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i f(a+(i-1)h)$, *wobei* $h := \frac{b-a}{n-1}$, $\alpha_i := h\int\limits_1^n \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n \frac{\tau-k}{i-k}d\tau$, $i = 1, \dots, n.$

Beispiele:

$n := 1$*:* $A_1 := b - a \rightsquigarrow \int\limits_a^b f(t)dt \approx (b-a)f(a)$ *(linke Rechteckregel)*

$t_1 = \frac{a+b}{2}, b \rightsquigarrow \int\limits_a^b f(t)dt \approx (b-a)f(t_1) \rightsquigarrow$ *mittlere bzw. rechte Rechteckregel*

$n := 2$*:* $\alpha_1 = \int\limits_1^2 \frac{\tau-2}{1-2}dt = -[\frac{\tau^2}{2} - 2\tau]_1^2 = \frac{1}{2},$

$\alpha_1 = \int\limits_1^2 \frac{\tau-1}{2-1}dt = [\frac{\tau^2}{2} - \tau]_1^2 = \frac{1}{2}.$

$\rightsquigarrow \int\limits_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$ *(Trapezregel)*

$n := 3$*:* $\int\limits_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$ *(Simpson-Regel) (Übung)*

Satz 10.27
Es seien $n \in I\!N$ und paarweise verschiedene $t_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, n$ gegeben. Die zugehörige von Newton-Cotes ist genau für alle Polynome vom Grad $\leq n - 1$, und es existiert ein Polynom $2n$-ten Grades, für das die Integrationsformel nicht genau ist.

Beweis:
Es sei p ein Polynom vom Grad $\leq n-1$. Das Lagrangesche Interpolationspolynom L_n (zu $(t_i, p(t_i))$, $i = 1, \ldots, n$) ist nach Folgerung 10.4 gerade p selbst.
D.h. $\int\limits_a^b p(t)dt = \int\limits_a^b L_n(t)dt = \sum\limits_{i=1}^n A_i P(t_i)$ (nach 10.26) $\rightsquigarrow$ Integrationsformel ist genau für p.

Wir betrachten das folgende Polynom $2n$-ten Grades: $\tilde{p}(t) := \prod\limits_{i=1}^n (t-t_i)^2$, $\forall t \in [a,b]$.
$\int\limits_a^b \tilde{p}(t)dt = \int\limits_a^b \prod\limits_{i=1}^n (t-t_i)^2 dt > 0$ (nach Folgerung 6.17 a))
$\sum\limits_{j=1}^n A_j \tilde{p}(t_j) = 0$
$\rightsquigarrow$ Integrationsformel nicht genau für $\tilde{p}$! $\square$
<u>Frage:</u> Existieren Integrationsformeln vom Typ Newton-Cotes, die genau sind für alle Polynome vom Grad $\leq 2n-1$ (?), indem man die Stützstellen $t_i \in [a,b]$ geeignet wählt.

Satz 10.28
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Integrationsformel von Newton-Cotes, die genau ist für alle Polynome vom Grad $\leq 2n-1$ (Gaußsche Quadraturformeln). Die zugehörigen Newton-Cotes-Koefizienten A_i, $i = 1, \ldots, n$ sind sämtlich positiv.

Beweis:
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es seien nun $t_1, \ldots, t_n \in [a,b]$ die noch unbekannten paarweise verschiedenen Stützstellen, und wir setzen $\omega(t) := \prod\limits_{j=1}^n (t-t_j), \quad (t \in [a,b])$.
Es sei p ein beliebiges Polynom vom Grad $\leq 2n-1$. Dann existieren Polynome r, s vom Grad $\leq n-1$ so, daß $p(t) = r(t)\omega(t) + s(t)$, $\forall t \in [a,b]$.
Sind nun A_i, $i = 1, \ldots, n$, die Newton-Cotes-Koeffizienten zu den Stützstellen $t_1, \ldots, t_n$, so ist die Newton-Cotes-Formel genau für p, d.h.

$$\int_a^b p(t)dt = \int_a^b r(t)\omega(t)dt + \int_a^b s(t)dt = \sum_{i=1}^n A_i p(t_i) = \sum_{i=1}^n A_i s(t_i),$$

gdw. $\int\limits_a^b r(t)\omega(t)dt = 0$, da $\int\limits_a^b s(t)dt = \sum\limits_{i=1}^n A_i s(t_i)$ nach Satz 10.27.
Die Integrationsformel von Newton-Cotes ist folglich genau für alle Polynome vom Grad $\leq 2n-1$, falls $\int\limits_a^b r(t)\omega(t)dt = 0$, für alle Polynome r mit Grad

$\leq n-1$.

Wir müssen also zeigen: Es existiert ein Polynom ω_n n-ten Grades mit Nullstellen in $[a,b]$ so, daß

$$(\star) \qquad \int_a^b r(t)\omega(t)dt = 0 \quad \text{, für alle Polynome } r \text{ mit Grad } \leq n-1.$$

Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

i) Im Raum $X := C([a,b])$ mit Skalarprodukt $\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$, $(\forall x,y \in X)$, kann das System $\psi_i(t) := t^{i-1}$, $i \in I\!N$, nach Satz 7.63 orthonormiert werden. Es entsteht ein Orthonormalsystem φ_i, $i \in I\!N$, wobei gilt $\varphi_i \in \mathcal{L}(\{\psi_1,\dots,\psi_i\})$. Also haben wir $\int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = 0$, $\forall i \neq j$.
$\rightsquigarrow \omega_n := \varphi_n$ ist ein Polynom n-ten Grades mit der gewünschten Eigenschaft $(\star)$.

ii) Beh.: ω hat n Nullstellen in $]a,b[$.
Bew.: Es seien $\tilde{t}_1,\dots,\tilde{t}_r,\tilde{t}_{r+1},\dots,\tilde{t}_s$ die Nullstellen von ω_n in $]a,b[$, wobei $\tilde{t}_1,\dots,\tilde{t}_r$ diejenigen mit ungerader Vielfachheit sind, an denen also ω_n das Vorzeichen wechselt.
$\rightsquigarrow \omega_n(t)\prod_{i=1}^r(t-\tilde{t}_i)$ wechselt nicht das Vorzeichen in $]a,b[$.
$\rightsquigarrow \int_a^b \omega_n(t)\prod_{i=1}^r(t-\tilde{t}_i)dt \neq 0$ (6.17 a)!)
$\rightsquigarrow$ Widerspruch zur Konstruktion, falls $r \leq n-1$.
$\rightsquigarrow r = n \rightsquigarrow$ nur einfache Nullstellen in $]a,b[$.

Es bleibt nun zu zeigen, daß $A_i > 0$, $\forall i = 1,\dots,n$. Das folgt aber aus

$$0 < \int_a^b \Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n \frac{t-t_k}{t_j-t_k}\Big)^2 dt = \sum_{i=1}^n A_i\Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n \frac{t-t_k}{t_j-t_k}\Big)^2 = A_j,$$

da die fraglichen Polynome einen Grad $\leq 2n-1$ haben. □

Bemerkung 10.29
Für die orthogonalen Polynome ω_n, $n \in I\!N$, existieren Rekursionsformeln zur Berechnung von ω_{n+1} aus ω_n und ω_{n-1} (vgl. Stoer/Bulirsch, Kap. 3.6, Satz

3.6.3).
In derselben Literaturstelle findet man auch für $[a,b] = [-1,1]$*:*

$$\omega_n(t) := \frac{n!}{(2n)!} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^2-1)^n \quad \textit{(Legendre-Polynome).}$$

Problem: Konvergenz von Iterationsformeln für $n \to \infty$.
Es seien für alle $n \in \mathbb{N}$ Stützstellen $t_j^{(n)} \in [a,b]$, $j = 1,\ldots,n$, und Koeffizienten $A_j^{(n)}$, $j = 1,\ldots,n$, gegeben, und wir definieren

$$I_n : C([a,b]) \to \mathbb{R}, \quad I_n(f) := \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} f(t_j^{(n)}),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Frage: $I_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_a^b f(t)dt$, $\forall f \in C([a,b])$?

Satz 10.30
$\int\limits_a^b f(t)dt \approx I_n(f)$ *seien Integrationsformeln vom Newton-Cotes-Typ für jedes* $n \in \mathbb{N}$*. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \int_a^b f(t)dt,\ \forall f \in C([a,b]) \quad \textit{gdw.} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} |A_j^{(n)}| < \infty.$$

Beweis:
Wir definieren $I : C([a,b]) \to \mathbb{R}$, $I(f) := \int\limits_a^b f(t)dt$, $\forall f \in C([a,b])$. Es gilt:
$I_n, I \in L(C([a,b]),\mathbb{R})$, $(\forall n \in \mathbb{N})$, d.h. sie sind lineare und beschränkte Operatoren (vgl. Kap. 7.2);
$\|I_n\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i^{(n)}|$ (vgl. Bsp. 7.23).

Anwendung des Satzes von Banach/Steinhaus (Satz 7.27):
$X_1 := C([a,b])$, $X_2 := \mathbb{R}$, $A_n := I_n$, $A := I$, $M \subset X_1$ so, daß $\mathcal{L}(M)$ dicht in X_1.
$A_n f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Af$, $\forall f \in X_1$ gdw. $A_n f \to Af$, $\forall f \in M$, und
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i^{(n)}| < \infty$.
Es genügt also, eine Menge $M \subset X_1$ zu finden, so daß $\mathcal{L}(M)$ dicht ist in $X_1 := C([a,b])$ und $I_n(f) \to I(f)$, $\forall f \in M$.

Wir wählen $M := \{p : p \text{ ist Polynom auf } [a,b]\} \subset X_1 \rightsquigarrow \mathcal{L}(M) = M$.
Nach Folgerung 7.51 (Approximationssatz von Weierstraß) gilt: M ist dicht

in $X_1 = C([a,b])$. Es genügt also zu zeigen: $I_n(p) = I(p) = \int\limits_a^b p(t)dt$, $\forall p \in M$.

Es sei $p \in M$ beliebig. 10.27 $\rightsquigarrow I_n(p) = \int\limits_a^b p(t)dt$ für hinreichend großes n. $\Box$.

Bemerkung 10.31
Aus den Sätzen 10.28 und 10.30 folgt die Konvergenz der Gaußschen Quadraturformeln!
<u>Bws.:</u> Es gilt nach 10.27/10.28:
$\sum\limits_{j=1}^{n} |A_j^{(n)}| = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j^{(n)} = \int\limits_a^b 1dt = b - a < \infty.$
Für die Integrationsformeln von Newton-Cotes mit konstanten Schrittweiten (vgl. Bem. 10.24) gilt: (Satz von Kusmin)
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^{n} |A_j^{(n)} = +\infty.$
Man hat also hierfür ähnlich schlechtes Konvergenzverhalten wie für Interpolationspolynome (Satz 10.13)! Wegen des Oszillationsverhaltens der Interpolationspolynome sollten auch Integrationsformeln von Newton-Cotes (mit konstanten Schrittweiten) nur bis $n \leq 5$ verwendet werden.

Satz 10.32
Die Integrationsformel von Newton-Cotes
$\int\limits_a^b f(t)dt \approx h\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(t_i)$, $h := \frac{b-a}{n-1}$, $n > 1$, *bzw.* $h := b - a, n = 1$, *mit äquidistanten Stützstellen sei genau für alle Polynome vom Grad* $\leq s \in \mathbb{N}_o$.
Ferner gelte $f \in C([a,b])$.
Dann existiert eine Konstante $C > 0$ *(nur abhängig von* n *und* s*) so, daß*

$$|\int_a^b f(t)dt - h\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(t_i)| \leq Ch^{s+2} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(s+1)}(t)|.$$

<u>Beweisskizze:</u>
Sei $t_o \in]a,b[$, 5.16 (Taylor) $\rightsquigarrow \exists \Theta \in]0,1[: f(t) = T_s(t) + R_s(t)$, wobei
$T_s(t) = \sum\limits_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(t_o)}{k!}(t-t_o)^k$ (s-tes Taylor-Polynom, vgl. 5.17)
$R_s(t) = \frac{f^{(s+1)}(t_o+\Theta(t-t_o))}{(s+1)!}(t-t_o)^{s+1}$.
Nach 10.27 gilt: $\int\limits_a^b T_s(t)dt = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i T_s(t_i)$
$\rightsquigarrow \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b T_s(t)dt + \int\limits_a^b R_s(t)dt.$
$\rightsquigarrow |\int\limits_a^b f(t)dt - h\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(t_i)| \leq |\int\limits_a^b R_s(t)dt - h\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i R_s(t_i)|$, da $f(t_i) = T_s(t_i) +$

$R_s(t_i)$.
$\rightsquigarrow$ Standard-Abschätzung! $\square$

Bemerkung 10.33
Für $n = 2, \ldots, 5$ hat $s \in I\!N$ bzw. die "optimale" Konstante $C > 0$ in der Abschätzung in 10.32 die folgende Gestalt:
$n = 2: \quad s = 1,\ C := \frac{1}{12}$ *(Trapezregel)*
$n = 3: \quad s = 3,\ C := \frac{1}{90}$ *(Simpson-Regel)*
$n = 4: \quad s = 3,\ C := \frac{3}{80}$
$n = 5: \quad s = 5,\ C := \frac{8}{945}$

Übung: Für die Simpson-Regel gilt, daß sie genau ist für alle Polynome vom Grad ≤ 3. (Hinweis: Es genügt zu zeigen, daß sie genau ist für die Funktion $f(t) = t^3$!)

Ausweg aus der Tatsache, daß man Newton-Cotes-Formeln für größeres $n \in I\!N$ nicht verwenden sollte?
Idee: Äquidistante Unterteilung von $[a, b]$ in kleinere Intervalle und Anwendung von Newton-Cotes-Formeln (mit $n \leq 5$) auf diesen kleinen Intervallen.
Unterteilung von $[a, b]$ in m Teilintervalle der Länge $h := \frac{b-a}{m}$, und
$\int\limits_a^b f(t)dt = \sum\limits_{j=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} f(t)dt$, $t_j := a+jh$, $j = 0, \ldots, m$; Anwendung äquidistanter Newton-Cotes-Formeln mit $n \leq 5$ auf $[t_{j-1}, t_j]$
$\rightsquigarrow$ Zusammengesetzte oder "große" Newton-Cotes-Formeln:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &\approx \sum_{j=1}^{m} \frac{h}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(t_{j-1} + (i-1)\frac{h}{n-1}) \\ &= \frac{h}{n-1} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a + (j-1)h + (i-1)\frac{h}{m-1})\end{aligned}$$

Beispiele 10.34

a) *Zusammengesetze Trapezregel:*
$n = 2,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$,
$\rightsquigarrow T(h; f) := \frac{h}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} (f(t_{i-1}) - f(t_i)) = \frac{b-a}{2m}(f(a) + 2 \sum\limits_{j=1}^{m-1} f(a + j\frac{b-a}{m} + f(b))$.
$\int\limits_a^b f(t)dt \approx T(h; f)$.

b) *Zusammengesetzte Simpson-Regel:*
$\int\limits_a^b f(t)dt \approx S(h; f) = \frac{b-a}{6m} \sum\limits_{j=1}^{m} (f(t_{j-1}) + 4f(\frac{t_{j-1}+t_j}{2}) + f(t_j))$.

Lemma 10.35

a) $\lim\limits_{h\to 0} T(h;f) = \int\limits_a^b f(t)dt, \; \forall f \in C([a,b])$.

b) *Ist* $f \in C^{2k}([a,b])$, $k \in \mathbb{N}$, *so existieren Konstanten* $C > 0$, $C_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,k-1$, *mit*

$$|T(h;f) - \int\limits_a^b f(t)dt - \sum_{j=1}^{k-1} C_j h^{2j}| \le C h^{2k}$$

<u>Beweis:</u>

a) $T(h;f) = \underbrace{\frac{h}{2}(f(a)+f(b))}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m-1} f(a+jh)h}_{(\star)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_a^b f(t)dt,$

da $(\star)$ gerade eine Riemannsche Zwischensumme für $\int\limits_a^b f(t)dt$ ist.

b) vgl. Stoer/Bulirsch, Kap. 3.3 $\square$