Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Arbeitsblatt 3

Vorlesung: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Master-Lehramt, WS 2018/19

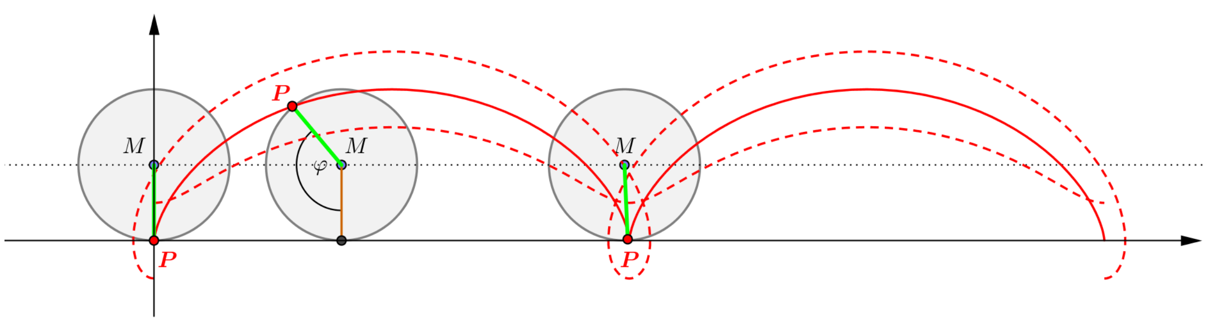
Rollkurven

Auf einer Leitkurve L rollt ein Rollkreis (Rad) K vom Radius r entlang. Auf dem Rollkreis K ist ein Stab befestigt, der die Länge a hat. Ein Stabende liegt im Mittelpunkt des Rollkreises. Das andere Stabende sei P.
Die *Rollkurve* ist diejenige Kurve Γ, die der Punkt P durchläuft, wenn der Rollkreis K auf der Leitkurve L entlangrollt (siehe Vorlesung).

Aufgabe 1 *Die gewöhnlichen Zykloiden*
Die Leitkurve sei eine Gerade. Zeigen Sie (mit Hilfe der Formeln aus der Vorlesung), dass man die Rollkurve (gewöhnliche Zykloide) dann durch $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(\varphi) = (r\varphi - a\sin\varphi, r - a\cos\varphi)$$

parametrisieren kann. (Als Parameter haben wir hier den Wälzwinkel φ benutzt, r ist der Radius des Rollkreises, a die Stablänge).



a) In welchen Parametern φ ist γ regulär?

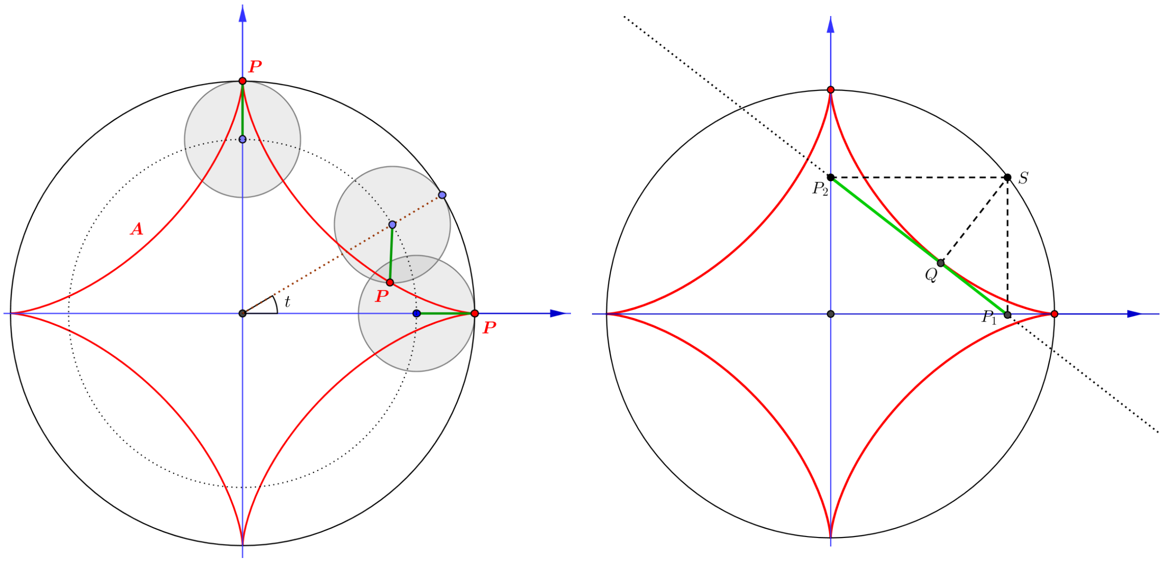
b) Berechnen Sie die Krümmung von γ in den regulären Punkten.

c) Berechnen Sie die Länge des Zykloidenstückes $\gamma|_{[0,2\pi]}$ für die gespitze gewöhnliche Zykloide ($a = r$).

Aufgabe 2 *Die Astroide (Sternkurve)*

Wir betrachten die Astroide $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}\}$, parametrisiert durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) := (R\cos^3(t), R\sin^3(t)).$$



a) Begründen Sie, warum γ eine Parametrisierung von A ist.

b) Zeigen Sie, dass A ist eine Hypozykliode mit $R = 4r$ und $a = r$ ist (Bezeichnung wie in der Vorlesung).

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an einen regulären Punkt $Q = \gamma(t)$ der Astroide und bestimmen Sie die Schnittpunkte P_1 und P_2 dieser Tangente mit der x- bzw. y-Achse. Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen P_1 und P_2 immer gleich R ist.

d) Seien $P_1 = (x_1, 0)$ und $P_2 = (0, x_2)$ die Schnittpunkte der Tangente an die Astroide im Punkt Q mit der x- bzw. y-Achse. Zeigen Sie, dass die Normale an γ im Punkt Q den Kreis um $(0, 0)$ mit dem Radius R im Punkt $S = (x_1, x_2)$ schneidet.

e) Anwendung: Wie hoch muss eine Öffnung in einem 1,5 m breiten Turm sein, damit ein Brett von 12m Länge ohne Verbiegung und Verdrehung in den Turm geschoben werden werden kann.

Aufgabe 3 *Die Kardioide (Herzkurve)*

Die Epizykloide mit $R = r = a$ heißt auch Kardioide (oder Herzkurve). Sie ist gegeben durch die Parametriserung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \big(2r\cos(t) - r\cos(2t)\,,\, 2r\sin(t) - r\sin(2t)\,\big).$$

(Prüfen Sie das anhand der aus der Vorlesung bekannten Formeln für Rollkurven nach).

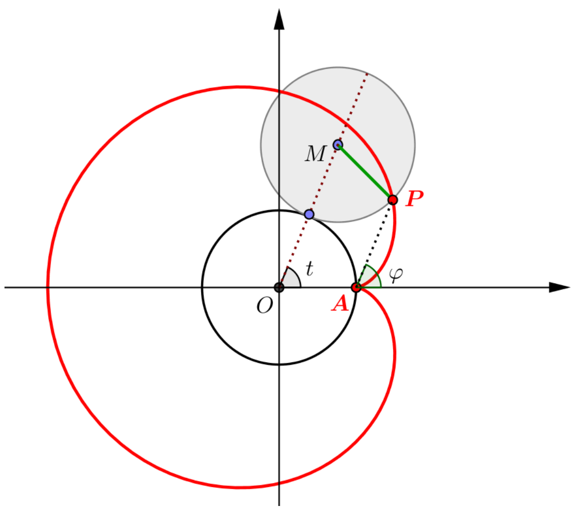


Bild 1
Ursprung des Koordinatensystem im Mittelpunkt O des Leitkreises

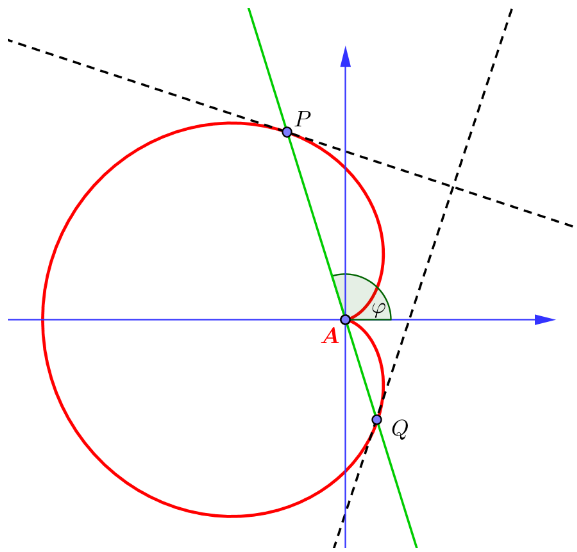


Bild 2
Ursprung des Koordinatensystem im Scheitel A der Kardioide

a) Sei t der orientierte Winkel zwischen der x-Achse und der Gerade durch O und M und φ der orientierte Winkel zwischen der x-Achse und der Gerade durch A und P. Zeigen Sie, dass beide Winkel übereinstimmen (Bild 1).

b) Eine Gerade durch den Scheitel A möge die Kardioide in den Punkten P und Q schneiden (siehe Bild 2). Zeigen Sie, das sich die beiden Tangenten an diese Punkte senkrecht schneiden.

c) Geben Sie eine Parametrisierung der Kardioide im Koordinatensystem mit Ursprung im Scheitelpunkt A mit dem Winkel φ als Parameter an (siehe Bild 2).