Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Arbeitsblatt 4

Vorlesung: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Master-Lehramt, WS 2018/19

Krümmung ebener Kurven

Aufgabe 1 *Spiralen*
Es sei $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine C^2-Funktion. Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(\varphi) := r(\varphi) \cdot e^{i\varphi} = (r(\varphi) \cdot \cos(\varphi), r(\varphi) \cdot \sin(\varphi)), \qquad \varphi \in I$$

heißt *Spirale*. (Sie beschreibt die Bewegung eines Massenpunktes P, der sich in positiver Richtung um den Ursprung O dreht. $r(\varphi)$ ist dabei der Abstand von P zum Ursprung O, wenn φ der orientierte Winkel zwischen der x-Achse und dem Strahl von O durch P ist).

a) Zeigen Sie, dass γ regulär ist.

b) Drücken Sie die Länge von $\gamma_{|[\varphi_1,\varphi_2]}$ in Abhängigkeit von $r(\varphi)$ aus.

c) Geben Sie eine Formel für die Krümmung von γ in Abhängigkeit von der Funktion r an.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$, deren Krümmung durch die Funktion $k : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$k(t) = \frac{1}{1+t}$$

gegeben ist. Das Koordinatensystem sei dabei so gelegt, dass $\gamma(0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ und $\gamma'(0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ gilt. Geben Sie γ explizit an und diskutieren Sie die Spur von γ.

Aufgabe 3
Beweisen Sie, dass die Spur einer regulären Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, deren Normalen alle durch einen fixierten Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gehen, auf einem Kreis liegen muß. Wie groß ist der Radius diesen Kreises?.

Aufgabe 4
Es sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve und $P \in \mathbb{R}^2$ ein fixierter Punkt. Sei $d(t)$ der Abstand von P zu einem Kurvenpunkt $\gamma(t)$, d.h.

$$d(t) := \|\gamma(t) - P\|.$$

Es sei $t_0 \in I$ ein Parameter, in dem die Abstandsfunktion $d : I \to \mathbb{R}$ ein lokals Maximum annimmt. Zeigen Sie, dass für die Krümmung von γ im Parameter t_0 gilt:

$$|k(t_0)| \geq \frac{1}{\|\gamma(t_0) - P\|}.$$