Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Arbeitsblatt 6

Vorlesung: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Master-Lehramt, WS 2018/19

Raumkurven

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die Spur der Kurve $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\gamma(t) := \Big(\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t}\Big)$$

in einer Ebene liegt. Welche Ebene ist das?

Aufgabe 2
Beweisen Sie, dass die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\gamma(x) := (x, \cosh(x), 2\sinh(x)),$$

eine Böschungslinie ist.

Aufgabe 3
Eine Raumkurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ heißt *sphärisch*, wenn ihre Spur auf einer Sphäre (=Kugeloberfläche) liegt, d.h. wenn ein $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und ein $r \in \mathbb{R}^+$ existieren, so dass

$$\|\gamma(t) - x_0\| = r \qquad \forall\, t \in I.$$

Zeigen Sie, dass eine auf Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve der Klasse C^4 mit nirgends verschwindender Windung genau dann sphärisch ist, wenn für ihre Krümmung k und ihre Windung τ die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{\tau}{k} + \left(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{k}\Big)'\right)' = 0.$$

Aufgabe 4
Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve mit der Krümmung k^γ und der Windung τ^γ. Wir betrachten die Kurve der Tangentialvektoren $\delta := \gamma' : I \to \mathbb{R}^3$.

a) Beweisen Sie, dass δ eine Frenet-Kurve ist.

b) Zeigen Sie folgende Formel für die Krümmung von δ:

$$k^\delta(t) = \sqrt{1 + \frac{\tau^\gamma(t)^2}{k^\gamma(t)^2}}.$$

c) Leiten Sie eine analoge Formel für die Windung von δ in Abhängigkeit von k^γ und τ^γ her.