Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Arbeitsblatt 7

Vorlesung: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Master-Lehramt, WS 2018/19

Aufgabe 1

Wir betrachten das Rotationshyperboloid

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

a) Geben Sie eine Parametrisierung von $F^+ := \{(x, y, z) \in F \mid z > 0\}$ als Graph einer Funktion an (Monge-Parametrisierung).

b) Geben Sie eine Parametrisierung von F als Rotationsfläche an.

c) Geben Sie eine Parametrisierung von F als Regelfläche an.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Wendelfläche $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$

$$f(t, s) := (s \cdot \cos t, s \cdot \sin t, t).$$

a) Berechnen Sie die Tangentialebene und die Normale an f in den regulären Punkten $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

b) Bestimmen Sie den Abstand der Tangentialebene $Tan_{(t,s)}f$ vom Punkt $q := (s \cdot \cos t, s \cdot \sin t, 0)$.

c) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ fixiert und $s \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Wir bezeichnen mit $\theta(s)$ den Winkel zwischen der z-Achse und der Tangentialebene $Tan_{(t_0,s)}f$. Beweisen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\tan \theta(s) = s.$$

Was bedeutet das geometrisch?

Aufgabe 3

Wir betrachten das Katenoid $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(z, \alpha) := (\cosh(z) \cos(\alpha), \cosh(z) \sin(\alpha), z).$$

a) Bestimmen Sie die Matrix der 1. Fundamentalform von f bezüglich der Basis $\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z, \alpha), \frac{\partial f}{\partial \alpha}(z, \alpha)\right)$.

b) Bestimmen Sie die Matrix der 2. Fundamentalform von f bezüglich der Basis $\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z, \alpha), \frac{\partial f}{\partial \alpha}(z, \alpha)\right)$.

c) Bestimmen Sie die Normalenkrümmungen $k_n(v)$ von f in Richtung von Einheitsvektoren $v \in T_{(z,\alpha)}f$.
Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse geometrisch.