Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Arbeitsblatt 10

Vorlesung: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Master-Lehramt, WS 2018/19

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass

$$F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \cdot y + e^z \cdot \cosh(x) + y \cdot z = e,\ z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine eingebettete Fläche ist und bestimmen Sie die Tangentialebene und die Normale im Punkt $p = (0,0,1) \in F$.

Aufgabe 2 *Stereographische Projektion*

Wir betrachten die Sphäre $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ und die Ebene $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Sei $N := (0,0,1) \in S^2$ der Nordpol von S^2.
Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \phi: & S^2 \setminus \{N\} & \longrightarrow & E \\ & p & \longmapsto & \text{Schnittpunkt der Geraden durch } N \text{ und } p \\ & & & \text{mit der Ebenen } E \end{array}$$

heißt stereographische Projektion aus dem Nordpol.

a) Skizzieren Sie die Situation.

b) Geben Sie eine explizite Formel für ϕ an.

c) Zeigen Sie, dass ϕ ein Diffeomorphismus zwischen den beiden eingebetteten Flächen ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Sphäre S^2, den Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, die Ebene $E = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ und eine bijektive, monoton-wachsende glatte Funktion $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R} \to (h_1, h_2) \subset \mathbb{R}$.

Sei Ψ_1 die Abbildung

$$\Psi_1 : \left\{ \begin{array}{c} (\cos(t)\cos(\alpha), \cos(t)\sin(\alpha), \sin(t)) \mid \\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \alpha \in (0, 2\pi) \end{array} \right\} \subset S^2 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (\cos(\alpha), \sin(\alpha), h) \mid \\ h \in (h_1, h_2), \alpha \in (0, 2\pi) \end{array} \right\} \subset Z,$$

definiert durch

$$\Psi_1((\cos(t)\cos(\alpha), \cos(t)\sin(\alpha), \sin(t))) := (\cos(\alpha), \sin(\alpha), h(t))$$

— bitte wenden —

und Ψ_2 die Abbldung

$$\Psi_2 : \left\{ \begin{array}{l} (\cos(\alpha), \sin(\alpha), h) \mid \\ \quad h \in (h_1, h_2), \alpha \in (0, 2\pi) \end{array} \right\} \subset Z \longrightarrow (0, 2\pi) \times (h_1, h_2) \times \{0\} \subset E,$$

definiert durch

$$\Psi_2((\cos(\alpha), \sin(\alpha), h)) := (\alpha, h, 0).$$

a) Skizzieren Sie die Situation und beschreiben Sie die Abbildungen Ψ_1, Ψ_2 und $\psi_2 \circ \Psi_1$ geometrisch.

b) Zeigen Sie, dass Ψ_1 und Ψ_2 Diffeomorphismen zwischen eingebetteten Flächen sind.