Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Arbeitsblatt 11

Vorlesung: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

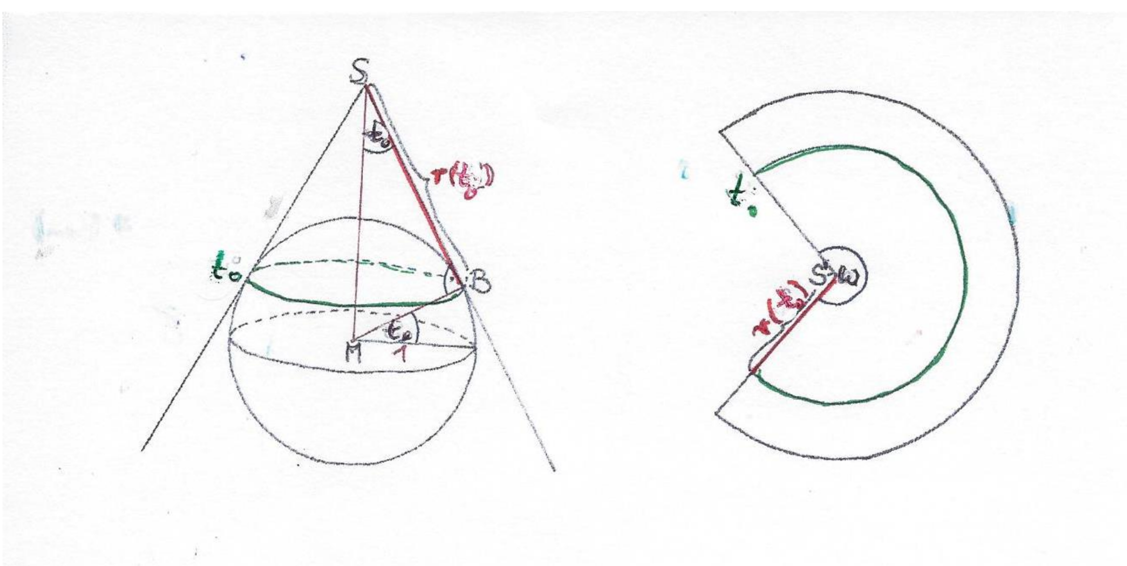
Master-Lehramt, WS 2018/19

Kegelentwürfe für Landkarten der Erde

Wir nehmen die Erde als Sphäre S^2 an und beschreiben sie durch ihre sphärischen Koordinaten:

$$S^2 = \Big\{ f(\alpha, t) := (\cos(t)\cos(\alpha), \cos(t)\sin(\alpha), \sin(t)) \mid \alpha \in [0, 2\pi], t \in [-\pi/2, \pi/2] \Big\}.$$

Die Koordinate α beschreibt die geographische Länge (Meridian) des Ortes auf der Erde, wobei das Koordinatensystem so gelegt ist, dass der Nullmeridian ($\alpha = 0$) durch den Ort Greenwich verläuft. Die Koordinate t beschreibt die geographische Breite (Breitenkreis), auf dem der Ort liegt ($t = 0$ entspricht dem Äquator).
Wir stülpen nun über die Erdkugel S^2 einen Drehkegel, so dass dessen Achse mit der Erdachse zusammenfällt. Dieser Kegel soll die Erdkugel entlang des Breitenkreises zum Winkel $t = t_0 > 0$ berühren. Die Landkarte wird folgendermaßen konstruiert: Zuerst bilden wir die Sphäre (auf glatte Weise) auf den Kegel ab, und zwar so, dass jeder Breitenkreis auf einen gewissen Breitenkreis des Kegels und jeder Meridian auf die Mantellinie des Kegels zum gleichen Drehwinkel α abgebildet werden. Anschließend wird der Kegel entlang einer Mantellinie L_{α_0} zum Winkel $\alpha = \alpha_0$ aufgeschnitten und in die Ebene abgewickelt (siehe Skizze). Bei der so definierten Abbildung $\phi : S^2 \setminus L_{\alpha_0} \to \text{Karte} \subset \mathbb{R}^2$ gehen die Meridiane der Erde in Geraden in der Ebene über, die sich im Bildpunkt S' der Kegelspitze S schneiden, die Breitenkreise gehen in konzentrische Kreise um diesen Schnittpunkt S' über.



a) Zeigen Sie, dass für $r(t_0)$ und ω (siehe Skizze) gilt:

$$r(t_0) = \cot(t_0), \quad \omega = 2\pi \sin(t_0).$$

b) Begründen Sie, dass die oben beschriebene Kartenabbildung

$$\phi : S^2 \setminus L_{\alpha_0} \to \text{Karte} := \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \mid \varphi \in (0, \omega), r \in (r_1, r_2)\}$$

gegeben ist durch

$$\phi(f(\alpha, t)) = \big(r(t) \cdot \cos\big((\alpha - \alpha_0)\sin(t_0)\big), r(t) \cdot \sin\big((\alpha - \alpha_0)\sin(t_0)\big)\big),$$

wobei $r : (-\pi/2, \pi/2) \to (r_1, r_2)$ eine bijektive glatte Funktion ist, die vom jeweiligen Kartenentwurf abhängt. (Wir betrachten im Folgenden nur streng monoton fallende Funktionen r).

c) Zeigen Sie, dass $\phi : S^2 \setminus L_{\alpha_0} \to$ Karte ein Diffeomorphismus ist.

d) Zeigen Sie, dass die Kartenabbildung ϕ genau dann flächentreu ist, wenn für die Funktion r gilt:

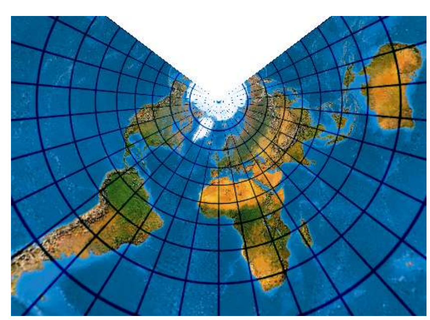
$$r(t) = \frac{\sqrt{1 + \sin^2(t_0) - 2\sin(t_0)\sin(t)}}{\sin t_0}.$$

e) Zeigen Sie, dass die Kartenabbildung ϕ genau dann winkeltreu ist, wenn für die Funktion r gilt:

$$r(t) = \cot^{\sin(t_0)}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cot(t_0) \cdot \tan^{\sin(t_0)}\left(\frac{t_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) .$$

Hinweis: Lösen Sie die nötigen Differentialgleichungen für die Funktion r durch Trennung der Variablen.

Flächentreuer Kegelentwurf
mit einem Berührbreitenkreis bei 45°



Winkeltreuer Kegelentwurf
mit einem Berührbreitenkreis bei 45°