Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Arbeitsblatt 12

Vorlesung: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Master-Lehramt, WS 2018/19

Aufgabe

Wir betrachten eine Rotationsfläche $F \subset \mathbb{R}^3$, deren Profilkurve $\gamma : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben ist durch $\gamma(v) = (r(v), 0, h(v))$ mit $r(v) > 0$ und $\gamma'(v) \neq 0$ für alle $v \in (a,b)$, d.h.

$$F := \{f(\alpha, v) := (r(v)\cos(\alpha), r(v)\sin(\alpha), h(v)) \mid v \in (a,b), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie:

a) Jeder auf Bogenlänge parameteriserte Meridian

$$m_{\alpha_0} : t \in I \to m_{\alpha_0}(t) := f(\alpha_0, v(t))$$

ist eine Geodäte.

b) Ein auf Bogenlänge parametrisierter Breitenkreis

$$b_{v_0} : t \in I \to b_{v_0}(t) := f(\alpha(t), v_0)$$

ist genau dann eine Geodäte, wenn $r'(v_0) = 0$, d.h. wenn der Tangentialvektor $\gamma'(v_0)$ der Profilkurve im Parameter v_0 parallel zur z-Achse ist.

c) *Clairautsche Regel*:
Sei $\delta : t \in I \mapsto \delta(t) := f(\alpha(t), v(t))$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte. $R(t)$ sei der Radius des Breitenkreises, auf dem $\delta(t)$ liegt, $\beta(t)$ sei der Winkel, indem sich die Kurve δ und der Breitenkreis B_t im Punkt $\delta(t)$ schneiden und es gelte $0 < \beta < \pi$.
Dann ist δ genau dann eine Geodäte, wenn gilt:

$$R(t) \cdot \cos(\beta(t)) = constant.$$

Tipp: Benutzen Sie die Geodätengleichungen für die Koordinaten $\alpha(t)$ und $v(t)$ von $\delta(t) = f(\alpha(t), v(t))$, die wir in der Vorlesung hergeleitet haben und beachten Sie die Bedingung an $\alpha(t)$ und $v(t)$, die sich aus der Parametrisierung von δ auf Bogenlänge ergeben.