Humboldt-Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Helga Baum

Aufgaben der Prüfungsklausur – Analysis II

25. Juli 2018

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

auf $I = \mathbb{R}^+$.

Tipp: Substitution

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Was versteht man unter einer Stammfunktion von f? (Definieren Sie diesen Begriff).

b) Sei f stetig, $a \in I$ und die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ definiert durch das Riemann-Integral

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Tipp: Mittelwertsatz der Integralrechnung benutzen

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) Formulieren Sie das Folgenkriterium für die Stetigkeit von f im Punkt $p \in X$.

b) Definieren Sie, wann man eine Teilmenge $K \subset X$ kompakt nennt.

c) Beweisen Sie: Ist $f : X \to Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt, dann ist das Bild $f(K) \subset Y$ ebenfalls kompakt.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x\cdot y^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0, \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie, in welchen Punkten von $\mathbb{R}^2$ die Funktion f stetig ist (Mit Beweis).

Aufgabe 5: **6 Punkte**

Es sei $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Menge und $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.

a) Wann nennt man f in $p \in U$ differenzierbar. (Definieren Sie diesen Begriff).

b) Formulieren Sie das Hauptkriterium für die Differenzierbarkeit von f im Punkt $p \in U$.

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) := \big(\ln(x^2 + 1)\,,\ \arctan(xy)\big)$$

in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist und geben Sie das Differential $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 6: **8 Punkte**

a) Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

und geben Sie alle Punkte an, in denen diese Extremwerte angenommen werden.

b) Besitzt die in a) definierte Funktion f ein globales Minimum bzw. ein globales Maximum? (Mit Begründung)

Aufgabe 7: **6 Punkte**

a) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wann nennt man die Menge

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$$

eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$? (Definieren Sie diesen Begriff).

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ y^2 + xz + z^2 - \cosh(z) = 0\}$$

eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie die Tangentialebene an F im Punkt $p = (1, 1, 0) \in F$.

Aufgabe 8: **6 Punkte**

Es sei $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^3 \leq y \leq x\}$ und $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y) := y^2 + \sqrt{x}.$$

a) Skizzieren Sie die Jordan-meßbare Menge A.

b) Berechnen Sie das Riemann-Integral

$$\int_A f(x, y)\, d(x, y).$$