Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Dirichlet-Rand Γ_D und Neumann-Rand $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$. In der linearen Elastizität werden zu einer Volumenkraft $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, einer Oberflächenkraft $g \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ und Randdaten $u_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ eine Verschiebung $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ und eine Spannung $\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{3\times 3})$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\sigma &= f && \text{in } \Omega,\\ \sigma &= \mathbb{C}\varepsilon(u) && \text{in } \Omega,\\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma_D,\\ \sigma\nu &= g && \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne $\varepsilon(u) = (Du + (Du)^\top)/2$ den Greenschen Verzerrungstensor und $\mathbb{C}$ den Elastizitätstensor, der durch $\mathbb{C}A = 2\mu A + \lambda \mathrm{tr}(A) I_{3\times 3}$ für alle $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert ist.

Da konforme Finite-Elemente-Methoden (FEMs) für fast-inkompressible Materialien ($\lambda \gg 1$) das sogenannte „Locking“-Verhalten zeigen (d.h. die Konvergenzrate wird erst nach einem sehr großen vorasymptotischen Bereich erreicht), sind nichtkonforme FEMs von großem Interesse. In zwei Raumdimensionen ist die einzige Methode erster Ordnung, die auch Neumann-Rand zulässt, die Methode von Kouhia und Stenberg [2]. Es gibt zwei Möglichkeiten, diese Methode auf drei Raumdimensionen zu verallgemeinern: Als Ansatzraum für die Verschiebung ist sowohl

$$(P_1(\mathcal{T}) \cap C(\Omega)) \times (P_1(\mathcal{T}) \cap C(\Omega)) \times \mathrm{CR}(\mathcal{T})$$

wie auch

$$(P_1(\mathcal{T}) \cap C(\Omega)) \times \mathrm{CR}(\mathcal{T}) \times \mathrm{CR}(\mathcal{T})$$

möglich. Dabei bezeichne $\mathrm{CR}(\mathcal{T})$ den Raum der Crouzeix-Raviart-Funktionen.

Die Bachelorarbeit soll diese beiden Methoden in drei Raumdimensionen numerisch realisieren und in Experimenten testen. Dabei sollen auch Fehlerschätzer für die Methoden definiert und die Optimalität des adaptiven Algorithmus numerisch untersucht werden.

Literatur

[1] Carsten Carstensen and Mira Schedensack, *Medius nalysis and comparison results for first-order finite element methods in linear elasticity,* (in Vorbereitung; auf Anfrage verfügbar, schedens@math.hu-berlin.de).

[2] Reijo Kouhia and Rolf Stenberg, *A linear nonconforming finite element method for nearly incompressible elasticity and Stokes flow,* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 124(3), 195–212, 1995.