Die Berechnung des Spektrums des Dirac-Operators mittels Fourier-Transformation

Momsen Reincke

21.11.2012

Der Diracoperator D einer Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit hat gute Eigenschaften, die weitreichende Konsequenzen für sein Spektrum haben. Ist die zugrunde liegende Riemannsche Mannigfaltigkeit z.B. geschlossen, so ist D elliptisch und wesentlich selbstadjungiert. Aus diesen Eigenschaften folgt, dass das Spektrum von D in diesem Fall nur aus reellen isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht.

Im Fall einer semi-Riemannschen Metrik gelten diese Sätze nicht mehr. Insbesondere ist der Dirac-Operator einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit *nicht* wesentlich-selbstadjungiert bzgl. eines definiten Skalarprodukts in einem Hilbertraum (an Stelle des definiten Skalarprodukts tritt eine indefinites Skalarprodukt in einem sogenannten Kreinraum). Der Dirac-Operator einer geschlossenen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit kann echt komplexe und Eigenwerte unendlicher Vielfachheit haben.

Aus diesen Gründen ist über das Spektrum des Dirac-Operators im semi-Riemannschen Fall sehr wenig bekannt. Im Vortrag werden wir mittels Fourier-Reihen das komplette Spektrum des Dirac-Operators auf dem semi-Riemannschen flachen Torus ($\mathbb{T}^{n,k}$) bestimmen. Mit einer ähnlichen Methode lässt sich ebenfalls das Spektrum in anderen Fällen berechnen. Für folgende Fälle werden wir das Vorgehen skizzieren:

- Der flache n-dimensionale Raum $(\mathbb{R}^{n,k}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{n,k})$,
- Mannigfaltigkeiten der Form $N \times N \times F$, wobei $N \in \{S^1, \mathbb{R}\}$ und (F, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Die Lorentz-Metrik ist in diesem Fall gegeben durch $-dt^2 + ds^2 + g$.

Interessanterweise kommt man in allen Fällen zu dem selben Ergebnis: $\sigma(D) = \mathbb{C} \setminus \sigma_p(D)$.