

Incertitude financière, mesures de risque et préférences robustes

Hans Föllmer

Institut für Mathematik

Humboldt-Universität zu Berlin

Unter den Linden 6

10099 Berlin, Allemagne

1 Le rôle des mathématiques dans le contexte financier

Quand on regarde le comportement du marché financier européen au cours des douze derniers mois tel qu'on peut l'observer à travers les fluctuations de l'indice EuroStoxx, on voit une trajectoire très irrégulière. Si l'on passe à l'échelle d'une seule matinée, ce caractère irrégulier et imprévisible de la trajectoire ne change pas. Même à très court terme, il n'y a donc pas de moyen d'en faire une extrapolation détaillée.

Face à une telle incertitude on peut faire des paris sur le comportement futur de l'indice. Par exemple, on peut acheter ou vendre un certificat qui donne droit à la valeur de l'indice dans six mois. En fait il y a un nombre croissant de produits *dérivés* tels que les options, les certificats *discount* et les certificats à valeur garantie, qui permettent de construire des paris arbitrairement complexes.

Quel est le rôle des mathématiques, et en particulier de la théorie des probabilités, dans ce contexte financier ? Comme dans les jeux de hasard, les mathématiques ne peuvent aider à gagner un pari financier. En particulier elles ne permettent pas de calculer à l'avance les cours futurs. En revanche, elles aident à comprendre la nature d'un pari donné en offrant des méthodes pour préciser en quel sens le pari est avantageux, équitable ou acceptable, et en permettant de quantifier son risque. De nos jours les mathématiques interviennent toujours plus déjà dans la construction d'un pari, c'est à dire lors de l'élaboration de nouveaux produits financiers.

Le choix parmi la grande variété des instruments financiers dépend des préférences de l'investisseur, et en particulier de sa tolérance vis à vis d'un certain risque de perte. On va voir comment les mathématiques peuvent aider à préciser les préférences de façon quantitative et, ensuite, à déterminer la structure optimale du pari étant données ces préférences.

2 Modèles probabilistes

L'analyse des risques et des préférences se développe dans le contexte d'un modèle mathématique. Un tel modèle définit d'abord l'ensemble Ω de tous les scénarios pour l'évolution future du marché que l'on veut considérer. Si l'on se limite au comportement d'un seul actif incertain tel que l'indice EuroStoxx entre aujourd'hui et un temps futur T , un scénario sera décrit par une fonction continue ω sur l'intervalle $[0, T]$, et on notera $S_t(\omega) = \omega(t)$ la valeur de l'actif au temps t dans ce scénario.

Pour spécifier un modèle probabiliste il faut choisir ensuite une mesure de probabilité sur l'ensemble Ω de tous les scénarios. Une fois ce choix fait, on peut faire des prédictions, non pas en devinant le scénario futur, mais en affectant des probabilités à certains ensembles de scénarios et des espérances à certaines quantités qui dépendent des scénarios. Si la valeur d'une position financière au temps t est décrite par une fonction $V_t(\omega)$ dépendant du scénario jusqu'au temps t , on peut donc calculer l'espérance $E[V_t]$ de cette valeur future, considérée comme variable aléatoire V_t sur l'espace de probabilité (Ω, P) . Plus généralement, on note $E_s[V_t]$ l'espérance conditionnelle de V_t connaissant le scénario jusqu'à un temps s antérieur au temps t .

Quelle mesure de probabilité devrait-on choisir ? En 1900 Louis Bachelier introduisit le mouvement Brownien comme modèle des fluctuations des prix sur la Bourse de Paris. La mesure correspondante P sur l'ensemble Ω de toutes les fonctions continues sur l'intervalle $[0, T]$ fut construite par Norbert Wiener en 1923. Elle est caractérisée par la propriété que les accroissements $S_t - S_s$, regardés comme variables aléatoires sur l'espace de probabilité (Ω, P) , sont gaussiens avec moyennes et variances proportionnelles à la longueur de l'intervalle (s, t) , et qu'ils sont indépendants pour des intervalles disjoints. Si l'on fait cette construction sur une échelle logarithmique, on obtient le modèle standard du mouvement Brownien géométrique, proposé par P.A. Samuelson dans les années 60. En autorisant de plus un changement de montre éventuellement dépendant du scénario, on ouvre la porte à une grande variété de modèles, y compris les solutions des équations différentielles stochastiques. En réalité il s'agit, bien entendu, de décrire la fluctuation simultanée de plusieurs actifs au lieu de se limiter à un seul indice. Si l'on veut modéliser, en plus, la microstructure du marché en tenant compte des effets d'interaction parmi les acteurs, alors les modèles deviennent extrêmement complexes.

Il y a donc l'embarras du choix, et toute une industrie vise à calibrer certaines classes de modèles par des méthodes économétriques et statistiques. Dans cet exposé nous n'entrons pas dans les détails de la modélisation, mais nous allons discuter plutôt certains principes théoriques liés à l'idée de l'efficacité des marchés et à la notion de risque financier.

3 Efficacité des marchés et mesures de martingale

Dans sa version la plus forte, l'hypothèse de l'efficacité des marchés financiers exige que la mesure P soit telle que les prix successifs S_t de l'actif incertain aient la structure probabiliste d'un jeu équitable. En termes mathématiques, cela signifie que les prédictions des prix futurs coïncident avec les prix présents, i.e.

$$E_s[S_t] = S_s$$

pour tout temps t et tout temps s antérieur au temps t . De manière équivalente on peut écrire

$$E_s[S_t - S_s] = 0,$$

ce qui signifie que l'espérance conditionnelle du gain net $S_t - S_s$ sachant le scénario jusqu'au temps s est toujours nulle. Dans ce cas on dit que le processus stochastique $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une *martingale* par rapport à la mesure P , et on appelle P une *mesure de martingale*.

Supposons, pour le moment, que P soit en effet une mesure de martingale. Dans ce cas, un théorème fondamental de J.L. Doob en théorie des martingales implique qu'il n'existe aucune stratégie d'investissement qui soit avantageuse. Plus précisément, considérons une stratégie qui part d'un capital initial V_0 et partage à chaque instant le capital disponible entre l'actif incertain et un actif sans risque avec taux d'intérêt r . Pour simplifier nous supposons que r soit égal à 0. Notons $V_t(\omega)$ la valeur engendré par la stratégie jusqu'au temps T comme fonction du scénario ω . Admettant certaines restrictions réalistes sur la stratégie, on obtient l'équation

$$E[V_T - V_0] = 0.$$

pour la variable aléatoire V_T . Il n'y a donc pas moyen de construire une stratégie telle que l'espérance du gain net soit positive. Evidemment, cette conclusion n'est pas partagée par la grande majorité des analystes et conseillers financiers. En effet, la version forte de l'hypothèse d'efficacité semble trop rigide.

Il y a une version beaucoup plus souple du principe de l'efficacité des marchés financiers. Celle-ci admet l'existence de stratégies avantageuses, mais elle exclut la possibilité d'un gain sans risque. Plus précisément, on exige que la mesure de probabilité P n'admette aucune stratégie qui satisfasse à la condition

$$E[V_T] > V_0$$

d'être avantageuse et en même temps à la condition

$$P[V_T < V_0] = 0$$

de n'avoir aucun risque de perte. Dans cette version beaucoup moins restrictive de l'hypothèse de l'efficacité, la mesure P n'est pas forcément une mesure de martingale. On n'exclut pas l'existence d'une stratégie avec une espérance positive du gain net $V_T - V_0$ mais sous condition d'accepter un certain risque de perte. En revanche, l'analyse mathématique montre qu'il doit y avoir une mesure de martingale P^* qui est équivalente à P dans ce sens

que ces deux mesures donnent un poids positif à la même classe d'ensembles de scénarios ; cf. Schachermayer (2005) ou Delbaen et Schachermayer (1994).

A partir de maintenant nous allons donc supposer qu'il existe une mesure de martingale P^* équivalente à P , et on note $\mathcal{P}^*$ la classe de toutes ces mesures.

4 Stratégies de couverture et préférences face au risque financier

Dans des modèles simples tels que le mouvement Brownien géométrique, la mesure de martingale P^* équivalente est en fait unique. Dans ce cas il y a une manière canonique de calculer les prix de tous les produits *dérivés* de l'actif sous-jacent. Notons $H(\omega)$ la valeur d'un tel produit au temps T comme fonction du scénario ω . L'unicité de la mesure de martingale P^* implique qu'il y a une stratégie avec capital initial

$$V_0 = E^*[H]$$

telle que la valeur $V_T(\omega)$ engendrée jusqu'au temps T coïncide avec $H(\omega)$ pour tout scénario ω en dehors d'un ensemble de probabilité 0. Cette *stratégie de couverture* permet donc une réplication parfaite du produit financier décrit par la variable aléatoire H . Le capital initial dont elle a besoin est donné par l'espérance $E^*[H]$ de la variable aléatoire H par rapport à la mesure de martingale P^* . Cette espérance est aussi le prix canonique du produit. En effet, tout autre prix offrirait la possibilité d'un gain sans risque. Si par exemple le prix était au-dessus de $E^*[H]$, on pourrait vendre le produit à ce prix et utiliser la somme $E^*[H]$ pour mettre en oeuvre la stratégie de couverture qui permet de payer ce qu'il faut au temps final T . La différence entre le prix et le coût initial $E^*[H]$ serait alors un gain sans risque.

La situation devient plus compliquée si la la mesures de martingale équivalente n'est plus unique. On peut trouver toujours une stratégie de couverture dans ce sens que la valeur finale $V_T(\omega)$ est au moins égale à la valeur $H(\omega)$ pour tout scénario en dehors d'un ensemble de probabilité 0. Mais le capital initial dont on aurait besoin est maintenant donné par

$$V_0 = \sup E^*[H]$$

où le supremum est pris sur toutes les mesures P^* dans la classe $\mathcal{P}^*$. Typiquement cette somme est trop élevée du point de vue pratique.

Une approche plus pragmatique consiste à renoncer à une couverture parfaite en tolérant un certain *shortfall risk*. C'est à ce moment que les préférences de l'investisseur face au risque financier interviennent. Pour définir le risque de perte d'une stratégie, on pourrait par exemple prendre la probabilité

$$P[V_T < H]$$

d'obtenir une valeur inférieure à H . De façon plus prudente, on pourrait quantifier ce risque par une espérance de la forme $E_P[l(H - V_T)]$ où l est une fonction de perte croissante et convexe. Une fois ce choix fait, on peut alors construire la stratégie qui minimise le risque de perte sous la contrainte d'un capital initial V_0 donné; cf. Föllmer et Leukert (2000).

En abordant le sujet des préférences face au risque, nous avons commencé à utiliser de manière explicite la mesure de probabilité P . Remarquons que ce ne fut pas le cas dans la discussion précédente qui faisait seulement intervenir la classe $\mathcal{P}^*$ des mesures de martingale équivalentes. En pratique le choix d'une mesure de probabilité, et donc d'une procédure systématique de faire des prédictions, n'est pas toujours évident. Comme le disait récemment Alan Greenspan :

"Our ability to predict is limited. We need some humility."

Quel est le sens de cette maxime de 'humilité en termes mathématiques? On va illustrer ce point en expliquant comment on peut parler du risque financier sans fixer à l'avance un modèle probabiliste spécifique.

5 Mesures de risque et incertitude de modèle

Considérons une position financière, et notons $X(\omega)$ le résultat net à la fin de la période $[0, T]$ en fonction du scénario ω . La position est donc décrite par une fonction X sur l'ensemble Ω des scénarios. Nous allons quantifier le risque $\rho(X)$ d'une telle position dans une perspective monétaire.

Supposons que dans l'espace $\mathcal{X}$ de toutes les positions financières il y a un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de positions qui sont considérées comme "acceptables" du point de vue d'une agence de surveillance. Ecrivons $X \geq Y$ si $X(\omega) \geq Y(\omega)$ pour tout scénario ω , et supposons que X est acceptable aussitôt qu'il y a une position acceptable Y telle que $X \geq Y$. Définissons le risque $\rho(X)$ comme la somme minimale telle que la position X devient acceptable quand cette somme est ajoutée et investie de façon sûre. On a donc

$$\rho(X) = \inf\{m | X + m \in \mathcal{A}\},$$

où l'infimum est pris sur la classe de toutes les constantes m telles que la nouvelle position $X + m$ soit acceptable. Il en suit que ρ est une fonctionnelle définie sur l'ensemble $\mathcal{X}$ telle que $\rho(X + m) = \rho(X) - m$ pour toute constante m . De plus, le risque décroît quand la position augmente, i.e., $\rho(X) \leq \rho(Y)$ si $X \geq Y$. Appelons une telle fonctionnelle ρ sur $\mathcal{X}$ une *mesure de risque monétaire*.

Supposons, pour le moment, que l'on ait fixé une mesure de probabilité P sur l'ensemble Ω des scénarios. Une manière classique de quantifier le risque d'une position X , considérée comme variable aléatoire sur l'espace de probabilité (Ω, P) , consiste à calculer sa variance. Mais la définition de la variance, qui est bien naturelle dans la théorie des erreurs, ne donne pas une mesure de risque monétaire. En particulier la symétrie de la variance ne correspond

pas au fait que la perception du risque financier est asymétrique : ce qui compte c'est le «downside risk». Dans cet esprit, on pourrait trouver une position X acceptable si la probabilité d'une perte est au-dessous d'une certaine limite, i.e., $P[X < 0] \leq \beta$ pour une constante β . La mesure de risque correspondante, appelée *Value at Risk*, est alors donnée par

$$\text{VaR}(X) = \inf\{m | P[X + m < 0] \leq \beta\} = -\sup\{x | P[X < x] \leq \beta\}.$$

C'est donc une quantile de la distribution de X sous la mesure de probabilité P . *Value at Risk* est une mesure de risque monétaire qui est très populaire dans le monde financier, mais qui possède un certain nombre d'inconvénients. En particulier ce n'est pas une fonctionnelle convexe sur l'espace $\mathcal{X}$ des positions, et cela signifie qu'il y a des situations où *Value at Risk* pénalise la diversification d'une position bien qu'elle soit désirable.

Si l'on veut encourager la diversification, il est naturel d'insister sur la convexité de l'ensemble $\mathcal{A}$. Dans ce cas, la fonctionnelle ρ est une *mesure de risque convexe* au sens de Frittelli et Rosazza Gianin (2002) et Föllmer et Schied (2002, 2004). Si la classe $\mathcal{A}$ est de plus un cône, alors on obtient la notion de *mesure de risque cohérente*. Cette notion fut introduite par Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999), et elle marqua le point de départ de la théorie des mesures de risque. La propriété de cône de la classe $\mathcal{A}$ signifie qu'une position X reste acceptable si on la multiplie par un facteur positif même si ce facteur devient très grand. Mais cette conclusion n'est pas toujours prudente, et c'est pourquoi nous insistons seulement sur la convexité.

Voici un premier exemple. Dans le contexte d'un modèle probabiliste du marché financier, disons qu'une position X est acceptable si l'on peut construire une stratégie avec capital initial 0 et valeur finale V_T telle que la valeur de la position combinée $X + V_T$ est au moins égale à 0 pour tout scénario en dehors d'un ensemble de probabilité 0. Alors on démontre que la mesure de risque correspondante est cohérente, et qu'elle est donnée par

$$\rho(X) = \sup E^*[-X]$$

où le supremum est pris sur la classe $\mathcal{P}^*$ des mesures de martingale équivalentes.

Regardons un second exemple. Supposons que les préférences d'un investisseur soient représentées par une fonctionnelle U sur l'espace $\mathcal{X}$ dans ce sens qu'une position X est préférée à une position Y si et seulement si $U(X) > U(Y)$. Alors l'investisseur pourrait trouver acceptable toute position X telle que la valeur $U(X)$ soit au-dessus d'un niveau donné. Si la fonctionnelle U est de la forme classique d'une *utilité espérée*

$$U(X) = E_P[u(X)],$$

définie à l'aide d'une mesure de probabilité P et d'une fonction d'utilité u concave et croissante, alors on obtient une mesure de risque convexe. On peut calculer la fonction de pénalisation correspondante par des méthodes de dualité convexe. Par exemple, la fonction d'utilité $u(x) = 1 - \exp(-\gamma x)$ induit, à une constante additive près, la mesure de risque *entropique*

$$\rho(X) = \frac{1}{\gamma} \log E_P[\exp(-\gamma X)] = \sup(E_Q[-X] - \frac{1}{\gamma} H(Q|P)).$$

Ici le supremum est pris sur la classe de toutes les mesures de probabilité Q sur l'ensemble Ω des scénarios, et $H(Q|P)$ dénote l'entropie relative de Q par rapport à P , définie par $H(Q|P) = E_Q[\log \varphi]$ si Q admet une densité φ par rapport à P et par $H(Q|P) = +\infty$ sinon.

Dans ces deux exemples, la mesure de risque est de la forme

$$\rho(X) = \sup(E_Q[-X] - \alpha(Q)) \quad (1)$$

où le supremum est pris sur toutes les mesures de probabilité Q sur l'ensemble Ω des scénarios, et où α est une fonction de pénalisation qui peut prendre la valeur $+\infty$. Dans le premier exemple on a $\alpha(Q) = 0$ si Q est une mesure de martingale équivalente et $\alpha(Q) = +\infty$ sinon. Dans le second exemple, $\alpha(Q)$ est égale à l'entropie relative $H(Q|P)$ divisée par le paramètre γ .

La représentation (1) donne en fait la forme générale d'une bonne mesure de risque convexe. C'est une conséquence du théorème de dualité pour la transformation de Legendre-Fenchel appliquée à la fonctionnelle convexe ρ , moyennant quelques conditions de régularité ; cf., par exemple, Delbaen (2000), Frittelli et Gianin (2003) ou Föllmer et Schied (2004). Afin de calculer la valeur $\rho(X)$ à partir de la représentation (1), il suffit évidemment de retenir la classe $\mathcal{Q}$ de toutes les mesures de probabilité Q telles que $\alpha(Q)$ soit finie. Dans le cas cohérent la fonction de pénalisation prend seulement les deux valeurs 0 et $+\infty$. La représentation (1) se réduit ainsi à la forme

$$\rho(X) = \sup E_Q[-X] \quad (2)$$

où le supremum est pris sur la classe $\mathcal{Q}$, et c'est donc la forme générale des mesures de risque cohérentes.

Le calcul du risque d'une position X se ramène donc à la procédure suivante. Au lieu de fixer un seul modèle probabiliste, on admet toute une classe $\mathcal{Q}$ de mesures de probabilité sur l'ensemble des scénarios. Pour toute mesure Q dans cette classe on calcule l'espérance $E_Q[-X]$ de la perte $-X$. Mais en général on ne traite pas ces mesures de manière égale : on les prend plus ou moins au sérieux, et cette distinction est quantifiée par la soustraction de la valeur $\alpha(Q)$. Ayant fait cette soustraction, on considère ensuite le cas le moins favorable parmi tous les modèles dans la classe $\mathcal{Q}$, et cela donne le risque monétaire $\rho(X)$.

6 Liens avec la théorie microéconomique des préférences

Dans le contexte financier les préférences d'un investisseur sont décrites par un ordre partiel sur l'espace $\mathcal{X}$ de toutes les positions financières. Sous des conditions assez faibles, un tel ordre partiel admet une représentation numérique à l'aide d'une fonctionnelle U sur $\mathcal{X}$. Cela veut dire que la position financière X est préférée à la position Y si et seulement

si $U(X) > U(Y)$. Dans la version classique du paradigme de l'*utilité espérée*, on se donne à l'avance une mesure de probabilité Q sur l'ensemble des scénarios, et la fonctionnelle U est de la forme

$$U(X) = E_Q[u(X)] \quad (3)$$

que nous avons déjà vue au-dessus, où u est une fonction d'utilité concave et croissante. En particulier, la valeur $U(X)$ dépend seulement de la distribution μ de la position X , considérée comme variable aléatoire sur l'espace de probabilité (Ω, Q) , puisque l'on peut l'exprimer comme intégrale

$$U(X) = \int u d\mu \quad (4)$$

de la fonction d'utilité u par rapport à μ . Dans ce cas, on peut donc regarder les préférences comme un ordre partiel sur la classe des distributions sur la droite réelle. Inversement, J. von Neumann et O. Morgenstern ont caractérisé par des axiomes reliés à une certaine conception de la "rationalité" les ordres partiels sur la classe des distributions qui admettent une représentation de la forme (4) à l'aide d'une fonction d'utilité u .

Plus généralement, et sans se donner à l'avance une mesure de probabilité Q sur l'ensemble des scénarios, L. Savage, R. Aumann (prix Nobel 2005) et d'autres ont spécifié des axiomes pour un ordre partiel sur la classe $\mathcal{X}$ qui permettent de reconstruire à partir des préférences une mesure de probabilité implicite Q telle que l'on obtienne une représentation numérique de la forme (3).

On sait très bien que le paradigme de l'utilité espérée n'est pas compatible avec un nombre d'observations empiriques du comportement des gens face à l'incertitude. Afin de tenir compte de ces évidences, et en particulier de certains "paradoxes" de D. Ellsberg, M. Allais (prix Nobel 1988) et D. Kahneman (prix Nobel 2002), Gilboa et Schmeidler (1989) ont proposé une version plus robuste de l'axiomatique de la "rationalité". Dans leur cadre, la fonctionnelle d'utilité prend la forme

$$U(X) = \inf E_Q[u(X)] \quad (5)$$

où l'infimum est pris sur toute une classe $\mathcal{Q}$ de mesures de probabilité Q sur l'ensemble des scénarios. On introduit ainsi une classe de *préférences robustes* qui ne sont pas liées à un modèle unique mais qui utilisent à la fois toute une classe de mesures de probabilité. De cette façon on tient compte de l'incertitude de modèle qui est typique dans les situations réelles. A un changement de signe près, on voit une analogie directe entre les préférences robustes caractérisées par la représentation (5) et les mesures de risque cohérentes. Inversement, la théorie des mesures de risque suggère une modification de l'axiomatique de Gilboa et Schmeidler qui mènerait à une fonctionnelle de la forme

$$U(X) = \inf(E_Q[u(X)] + \alpha(Q)) \quad (6)$$

où α est une fonction de pénalisation, en analogie à la représentation (1) des mesures de risque convexes. En fait, les préférences admettant une représentation numérique de cette forme ont été récemment caractérisées par Maccheroni, Marinacci et Rustichini (2004).

7 Problèmes d'optimisation et projections robustes

Face à la grande variété des paris financiers qui sont possibles à l'aide des produits dérivés il y a l'embarras du choix. Regardons donc le problème de choisir une position financière X , étant donné un capital initial V_0 ainsi que les préférences de l'investisseur.

Si les préférences sont représentées par une fonctionnelle U sur l'espace $\mathcal{X}$ des positions financières, il s'agit donc de maximiser la valeur $U(X)$ sous la condition que la position X puisse-t-elle être financée. Cela veut dire que l'on trouve une stratégie avec valeur initiale V_0 telle que la valeur finale V_T soit égale à X . Dans notre contexte, cette condition se traduit par la contrainte

$$\sup E^*[X] \leq V_0$$

où le supremum est pris sur la classe $\mathcal{P}^*$ des mesures de martingale équivalentes. Nous allons supposer que U est une fonctionnelle d'utilité robuste de la forme (5), définie par une classe $\mathcal{Q}$ de mesures de probabilité équivalentes à P . Notre problème d'optimisation fait donc intervenir les deux classes de mesures $\mathcal{P}^*$ et $\mathcal{Q}$.

Considérons d'abord le cas où chacune des deux classes ne contient qu'un seul élément. En particulier, les préférences sont alors de la forme (3) pour une seule mesure Q . Dans ce cas classique, la solution du problème d'optimisation est donnée par

$$X = (u')^{-1}(\lambda\varphi), \tag{7}$$

où $(u')^{-1}$ est l'inverse de la dérivée de la fonction d'utilité u , φ est la densité de la mesure de martingale unique P^* par rapport à Q et le paramètre λ est tel que $E^*[X] = V_0$.

Si les préférences sont robustes mais la mesure de martingale P^* est toujours unique, alors le problème d'optimisation se ramène à un résultat classique de la statistique robuste. Dans leur version robuste du lemme de Neyman-Pearson, Huber et Strassen (1973) avaient construit une mesure Q_0 qui est *moins favorable* dans la classe $\mathcal{Q}$ par rapport à une mesure de référence donnée. Dans notre contexte financier, Schied (2004, 2005) a montré que la solution du problème d'optimisation est de la forme (7) si φ est la densité de la mesure de martingale P^* par rapport à la mesure Q_0 qui est moins favorable par rapport à P^* .

Si en contrepartie la mesure de martingale P^* n'est plus unique mais les préférences sont de la forme classique (3) pour une seule mesure Q , alors notre problème d'optimisation se réduit à un problème dual de *projection*. Plus précisément, il s'agit de projeter la mesure Q sur la classe $\mathcal{P}^*$ des mesures de martingale en minimisant la fonctionnelle

$$F(P^*|Q) = E_Q[f(\frac{dP^*}{dQ})],$$

où f est une fonction convexe liée à la fonction d'utilité u par une transformation de Legendre-Fenchel. Dans le cas exponentiel $u(x) = 1 - \exp(-yx)$ la fonctionnelle coïncide avec l'entropie relative $H(P^*|Q)$, et l'on se retrouve avec un problème de projection classique. Pour des fonctions d'utilité plus générales, le problème dual a été étudié systématiquement, en particulier par Kramkov et Schachermayer (1999), Goll et Rüschendorf (2001) et Bellini et Frittelli (2002).

Passons maintenant au cas général où les préférences sont robustes et la mesure de martingale n'est plus unique. Il s'agit alors de projeter toute la classe $\mathcal{Q}$ sur la classe $\mathcal{P}^*$. Cela revient à la recherche d'un minimum de F considérée comme fonctionnelle sur l'ensemble produit $\mathcal{P}^* \times \mathcal{Q}$. Si l'on trouve un tel couple (P_0^*, Q_0) , alors la solution du problème d'optimisation est de la forme (5) où φ est la densité de Q_0 par rapport à P_0^* . Cette version robuste du problème de projection, qui se pose indépendamment de l'interprétation financière, fut étudié par Gundel (2005) et par Föllmer et Gundel (2005).

Cependant il n'est pas toujours possible de trouver une solution du problème dual dans la classe $\mathcal{P}^*$ des mesures de martingale. Cette difficulté apparaît déjà si les préférences sont de la forme classique (3). Dans ce cas, Kramkov et Schachermayer (1999) ont montré comment on peut étendre la classe $\mathcal{P}^*$ afin de trouver une solution dans un cadre plus large. Pour les préférences de la forme (5), des nouvelles variantes robustes du problème de projection viennent d'être étudiées par Quenez (2004), Schied et Wu (2005) et Föllmer et Gundel (2005). En plus, Schied (2005) vient de résoudre le problème d'optimisation pour les préférences robustes de la forme générale (6).

L'on constate donc que la maxime de l'humilité en face de l'incertitude financière est en fait une source très riche de nouveaux problèmes en Théorie des Probabilités.

Références

- [1] Artzner, Ph., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D. : *Coherent measures of risk*. Math. Finance 9, 203-228 (1999)
- [2] Bellini, F., Frittelli, M. : *On the Existence of Minimax Martingale Measures*. Mathematical Finance 12, No. 1, 1-21 (2002).
- [3] Delbaen, F. : *Coherent risk measures*. Cattedra Galileiana. Scuola Normale Superiore, Pisa (2000)
- [4] Delbaen, F., Schachermayer, W. : *A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing*. Math. Ann. 300, 463-520 (1994).
- [5] Föllmer, H., Gundel, A. : *Robust projections on the class of martingale measures*. Preprint, Humboldt-Universität zu Berlin (2005).
- [6] Föllmer, H., Leukert, P. : *Efficient Hedging*. Finance & Stochastics 4, 117-146 (2000).
- [7] Föllmer, H., Schied, A. : *Convex measures of risk and trading constraints*. Finance & Stochastics 6 (4), 429-447 (2002)
- [8] Föllmer, H., Schied, A. : *Stochastic Finance*. 2nd Edition. Studies in Mathematics 27. Berlin, New York : De Gruyter 2004.
- [9] Frittelli, M., Gianin Rosazza, E. : *Putting order in risk measures*. J. Banking & Finance 26, 1473-1486 (2002)

- [10] Gilboa, I., Schmeidler, D. : *Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior*. Journal of Mathematical Economics 18, 141-153 (1989).
- [11] Goll, Th., Rüschendorf, L. : *Minimax and Minimal Distance Martingale Measures and Their Relationship to Portfolio Optimization*. Finance and Stochastics 5, No. 4, 557-581 (2001).
- [12] Gundel, A. : *Robust Utility Maximization for Complete and Incomplete Market Models*. Finance and Stochastics 9, No. 2, 151-176 (2005).
- [13] Huber, P., Strassen, V. : *Minimax Tests and the Neyman-Pearson Lemma for Capacities*. Ann. Statistics 1, No. 2, 251-263 (1973). Correction : Ann. Statistics 2, No. 1, 223-224 (1974).
- [14] Kramkov, D., Schachermayer, W. : *The Asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets*. Annals of Applied Probability 9, No. 3, 904-950 (1999).
- [15] Maccheroni, F., Marinacci, M., Rustichini, A. : *Ambiguity aversion, malevolent nature, and the variational representation of preferences*. Preprint, University of Minnesota (2005)
- [16] Quenez, M.-C. : *Optimal Portfolios in a Multiple-Prior Model*. Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV, 291-321, Progr. Probab., 58, Basel : Birkhäuser 2004.
- [17] Schachermayer, W. : *The Notion of Arbitrage and Free Lunch in Mathematical Finance*. Acadmie des Sciences Paris (2005).
- [18] Schied, A. : [On the Neyman-Pearson Problem for Law-invariant Risk Measures and Robust Utility Functionals.] Ann. Appl. Probab. 14, 1398-1423 (2004).
- [19] Schied, A. : *Optimal Investments for Robust Utility Functionals in Complete Market Models*. Math. Oper. Research 30, no. 3, 750-764 (2005)
- [20] Schied, A. : *Optimal Investments for risk-and ambiguity-averse preferences : a duality approach*. Preprint, Technische Universität Berlin (2005).
- [21] Schied, A., Wu, C.-T. : *Duality Theory for Optimal Investments Under Model Uncertainty*. Preprint, Technische Universität Berlin (2004).