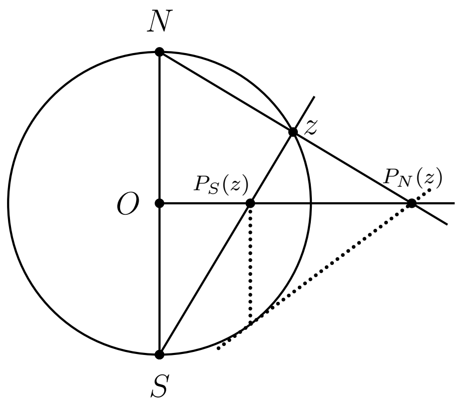
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung **Algebra und Funktionentheorie**, WS 2012/13

Übungsblatt 1

Abgabe am 18.1.2013

1. Für ein $R > 0$ seien $N := iR$ bzw. $S := -iR$ der "Nordpol" bzw. "Südpol" des Kreises $S^1_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$. Für $z \in S^1_R \setminus \{N\}$ ist die *stereographische Projektion* $P_N(z)$ definiert als diejenige komplexe Zahl mit Imaginärteil 0, die auf der Geraden durch z und N liegt. $P_S(z) \in \mathbb{C}$ ist analog definiert, vgl. nebenstehende Abbildung.



a) Geben Sie $P_S, P_N : S^1_R \to \mathbb{C}$ explizit an, und zeigen Sie mit dieser Darstellung, dass $P_S(z)$ und $P_N(z)$ mittels Inversion am Kreis S^1_R aufeinander abgebildet werden, d.h. $|P_S(z)||P_N(z)| = R^2$.

b) Sei z so gewählt, dass $|P_N(z)| > R$ und sei T eine Tangente an S^1_R, auf der $P_N(z)$ liegt. Sei q der Schnittpunkt dieser Tangente mit S^1_R. Zeigen Sie $\mathrm{Re}(q) = P_S(z)$.

(6+4 Punkte)

2. Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\frac{z-1}{z+1}| \geq 2\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1,\ \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - i| < 2\}$

(2+2+2 Punkte)

3. Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung $T : z \mapsto \lambda z + \mu \bar{z}$ eine Bijektion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$? Wann gilt $|T(z)| = |z|$?

(5 Punkte)

bitte wenden...

4. Im Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra haben wir die Darstellung

$$p(z_0 + h) = p(z_0) + \sum_{j=1}^{n} h^j p_j(z_0)$$

benutzt, wobei $n \in \mathbb{Z}_+$ der Grad von p ist. Ist $|p(z_0)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |p(z)| > 0$, so muss $p_1(z_0) = 0$ sein, wie in der Vorlesung gezeigt wurde. Zeigen Sie entsprechend, dass $p_j(z_0) = 0$ gilt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, so dass $p(z) = p(z_0)$ gilt und p den Grad 0 hat, wie behauptet. *(10 Punkte)*

5. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass folgende Funktionen in $\mathbb{C}$ analytisch sind:

$a)$ $\sin(z)$ $b)$ $\cosh(z)$ $c)$ $z^n, \quad n \in \mathbb{N}$

(2+2+5 Punkte)

Sie finden die Aufgaben auch auf der Seite
`http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~geomanal/teaching/bruening/FunktionentheorieWS1213/`