Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung **Algebra und Funktionentheorie**, WS 2012/13

Übungsblatt 2

Abgabe am 25.1.2013

1. Sei $f : U \to \mathbb{C}, U \subset \mathbb{C}$ offen, in $a \in U$ komplex differenzierbar und $h \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass unter dem Isomorphismus

$$\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \quad 1 \mapsto (1,0), i \mapsto (0,1)$$

die komplexe Zahl $f'(a) \cdot h$ gerade $df|_a(h)$ entspricht, d.h.

$$\tau(f'(a) \cdot h) = d\tilde{f}|_{\tilde{a}}(\tilde{h}), \quad \text{mit} \quad \tilde{a} = \tau(a),\ \tilde{h} = \tau h,\ \tilde{f} = \tau \circ f \circ \tau^{-1}$$

(5 Punkte)

2. **Erinnerung:** (Partialbruchzerlegung) *Sei $R(z) = f(z)/g(z)$ eine rationale Funktion, wobei*

$$g(z) = (z - \alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_s)^{n_s}, \quad n_i \in \mathbb{N}$$

und der Zähler f habe in $Z := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} \subset \mathbb{C}$ keine Nullstelle. Dann gibt es Zahlen $\{a_k^{(i)}\} \subset \mathbb{C}$ und ein Polynom $q \in \mathbb{C}[X]$, so dass für $z \in \mathbb{C} \setminus Z$ gilt

$$R(z) = q(z) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_k^{(i)}}{(z - \alpha_i)^k}. \tag{PBZ}$$

a) Bestimmen Sie für folgende Funktionen f jeweils die Potenzreihenentwicklung zum Entwicklungspunkt a und deren Konvergenzradius:

$$a) \quad f(z) = \tfrac{1}{z}, \quad a = 2 \qquad\qquad b) \quad f(z) = \tfrac{1}{z^2 - 2z + 2}, \quad a = 0$$

b) Sei R eine rationale Funktion wie in der Einleitung. Zeigen Sie, dass $R(z)$ in $\mathbb{C} \setminus Z$ holomorph ist und bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung um einen Punkt $p \in \mathbb{C} \setminus Z$.

Hinweis: Betrachten Sie geeignete geometrische Reihen und ihre Ableitungen.

((2+3)+10 Punkte)

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe von $\frac{1}{\cos}$ zum Entwicklungspunkt $a = 0$. Zeigen Sie, dass die durch

$$\frac{1}{\cos(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

definierten Zahlen a_{2n} ganzzahlig sind, und berechnen Sie a_{2n} für $0 \leq n \leq 4$. *(5 Punkte)*

4. **Erinnerung und Definitionen:** (Konvergenzbegriffe)

Sei $U \subset \mathbb{C}$. Durch $\|f\|_U := \sup_{z \in U} |f(z)|$ wird die Supremumsnorm *(kurz:* sup-Norm*) einer beschränkten Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ definiert. Sei $(f_k)_k$ eine Folge solcher Funktionen.*

- *Die Folge (f_k) heißt* gleichmäßig konvergent*, falls es ein $f : U \to \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|f_n - f\|_U < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.*
- *Die Reihe $\sum_k f_k$ heißt* gleichmäßig konvergent*, falls die Folge (s_n) der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_n$ gleichmäßig konvergiert.*
- *Die Reihe $\sum_k f_k$ heißt* absolut konvergent *in z, falls die Reihe $\sum_k |f_k(z)|$ konvergiert. Absolut konvergente Reihen sind konvergent. Wenn eine Reihe absolut konvergiert, so konvergiert auch jede Umordnung der Reihe absolut und hat den selben Grenzwert.*
- *Die Reihe $\sum_k f_k$ heißt* normal konvergent*, falls die durch*

  $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_U$$

  gegebene Folge (s_n) konvergiert.

Zeigen Sie:

a) Eine normal konvergente Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

b) Sei $f := \sum f_k$ normal konvergent und alle $f_k : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist auch f stetig in U.

c) Eine Potenzreihe $p(z) = \sum_k a_k z^k$ habe Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist p absolut konvergent in $K_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ und normal konvergent in $K_r(0)$ für jedes $r < R$. Im Allgemeinen ist p nicht normal konvergent in $K_R(0)$.

d) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$$

konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ normal.

(5+3+2+5 Punkte)