Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung **Algebra und Funktionentheorie**, WS 2012/13

Übungsblatt 4

Abgabe am 8.2.2013

1. *(Erzeugende Funktion der Fibonacci-Zahlen)*

a) Berechnen Sie die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad \text{von} \qquad f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

um $z = 0$. Was ist der Konvergenzradius der Reihe P?

b) Die Fibonacci-Zahlen F_n sind rekursiv definiert durch

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0.$$

Folgern Sie $F_n = a_n, n \geq 0$ aus $f = P$ in einem geeigneten Gebiet.

(6+4 Punkte)

2.

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale über den (einfach im positiven Sinn durchlaufenen) Einheitskreis S^1:

$$i) \int_{S^1} \frac{\cos z}{z^2}\, dz, \qquad ii) \int_{S^1} \frac{\sin z}{z}\, dz, \qquad iii) \int_{S^1} \frac{(\cos z)^2}{z}\, dz.$$

b) Berechnen Sie jeweils das Residuum $\mathrm{Res}[f, z_0]$ von f in z_0:

$$i) \ \mathrm{Res}\Big[\frac{1}{z^2+9}, -3i\Big] \qquad ii) \ \mathrm{Res}\Big[\frac{z^n+1}{z^n-1}, e^{2\pi ki/n}\Big], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$iii) \ \mathrm{Res}\Big[\frac{z}{\mathrm{Log} z}, 1\Big] \qquad iv) \ \mathrm{Res}\Big[\frac{\sin z}{z^2}, 0\Big]$$

(6+4 Punkte)

3. Sei $A_{r,s}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < s\}$ der Kreisring um z_0 mit Innenradius r und Außenradius s. Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in den angegebenen Kreisringen in eine Laurentreihe.

a) $f(z) = \frac{z^2-4z}{(z^2-4)(z+1)}$ in $A_{1,2}(0), A_{2,\infty}(0), A_{0,1}(-1)$

b) $f(z) = \sin\left(\frac{z-1}{z}\right)$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(6+4 Punkte)

4.

a) In einem Punkt z_0 habe f einen Pol m-ter Ordnung, g einen Pol n-ter Ordnung und h eine Nullstelle p-ter Ordnung. Bestimmen Sie die Art der Singularität in z_0 für die Funktionen

$$f + g, f + h, \quad fg, fh, \quad f/g, f/h, h/f.$$

b) Finden Sie alle Singularitäten von

$$\frac{(z-3)^2(z+1)}{1 - \sin(\pi z/2)}$$

und klassifizieren Sie jeweils den Typ.

(5+5 Punkte)

Sie finden die Aufgaben auch auf der Seite
`http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~geomanal/teaching/bruening/FunktionentheorieWS1213/`