Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung **Algebra und Funktionentheorie**, WS 2012/13

Übungsblatt 5

Abgabe am 15.2.2013

Auf diesem Blatt können 60 Punkte erreicht werden, die Gesamtpunktzahl erhöht sich jedoch nur um 40 Punkte.

1. a) Sei $r(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion mit $\deg P \leq \deg Q + 2$. Zeigen Sie

$$\sum_{p \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}[r, p] = 0.$$

b) Sei f meromorph in D mit $p \in \mathbb{N}_0$ einfachen Polstellen und $n \in \mathbb{N}_0$ einfachen Nullstellen. Sei γ eine Kurve in D, die alle Pol- und Nullstellen von f genau einmal umläuft. Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}(z)\, dz = n - p.$$

(5+5 Punkte)

2. a) Seien f und g analytische Funktionen auf einem Gebiet D und α eine geschlossene Kurve in D, die jeden Punkt in ihrem Innern genau einmal umläuft. Die Funktionen f und $f+g$ sollen in D nur jeweils endlich viele Nullstellen haben, und es soll gelten

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle} \quad z \in \operatorname{Bild}(\alpha).$$

Zeigen Sie: f und $f+g$ haben auf $\operatorname{Bild}(\alpha)$ keine Nullstelle und im Innern der Kurve α gleich viele Nullstellen.

b) Das Polynom $P(z) = z^4 - 5z + 1$ besitzt eine Nullstelle a mit $|a| < \frac{1}{4}$; die drei anderen Nullstellen liegen im Kreisring $A_{\frac{3}{2},\frac{15}{8}}(0)$.

(4+8 Punkte)

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$a) \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3\sin t)^2}\, dt = \frac{5\pi}{32}, \qquad b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e^a}, \qquad a > 0.$$

(8+12 Punkte)

4. Sei C_ε ein Bogen des Kreises $\partial B_\varepsilon(z_0)$ mit Winkel α, $0 \le \alpha \le 2\pi$, d.h. für ein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt es eine Parametrisierung $C_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{i(t+\theta)}, 0 \le t \le \alpha$. Sei f analytisch in $D \setminus \{z_0\}$ mit einfachem Pol in z_0. Zeigen Sie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz = \alpha\, i\, \mathrm{Res}[f(z), z_0].$$

(8 Punkte)

5. Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

indem Sie

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}, \quad a := \sqrt{\pi} e^{\pi i/4}$$

entlang eines Parallelogramms mit Eckpunkten $-R, R, R+a, -R+a$, $R > 0$ integrieren und $R \to \infty$ betrachten. Verwenden Sie dabei $f(z) - f(z+a) = e^{-z^2}$.

(10 Punkte)

Sie finden die Aufgaben auch auf der Seite
`http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~geomanal/`
`teaching/bruening/FunktionentheorieWS1213/`