Anmerkungen für Lehrerinnen und Lehrer zur Lernumgebung „Auf dem Weg zur Ableitungsfunktion“

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler vollziehen den Übergang von der Ableitung an einer Stelle (lokal) zur Ableitungsfunktion als Ganzes (Objekt).
Ausgehend vom Differenzenquotienten und dessen genauerer Untersuchung erkennen sie den zugrunde liegenden Grenzprozess. Insbesondere erkennen sie, dass verschiedene Grenzprozesse zum selben Ergebnis führen können.
Es werden erste Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion an konkreten Beispielen hergestellt.

Aufgabe 1:
Anhand eines Polynoms dritten Grades und der Sinusfunktion untersuchen die Schülerinnen und Schüler den Differenzenquotienten genauer. Insbesondere dient diese Aufgabe dem Übergang von einer punktweisen (lokalen) Sicht zur Objektsicht (global). Der erste Schritt hierzu besteht in der Auswertung des Differenzenquotienten an vielen Stellen x für ein konstantes h. Die entstehende Funktion wird dann in Aufgabe 2 genauer untersucht. Für h=0.2 erhält man eine relativ gute Näherung der Ableitungsfunktion.
Achtung: Die entstehende Funktion ist von x abhängig (h ist konstant). Es handelt sich also *nicht* um die Differenzenquotientenfunktion (welche für festes x von h abhängt).

Aufgabe 2:
Hier ist die Funktion g, welche in Aufgabe 1 punktweise entsteht, als Ganzes zu sehen und zu manipulieren. Der Wert von h kann nun kontinuierlich verändert werden. Insbesondere kann h auch negativ werden, so dass der Grenzprozess von rechts und von links betrachtet werden kann.
Es stehen verschiedene Funktionen zur Verfügung.
Beispielsweise kann man bei der Sinusfunktion untersuchen, für welche Werte von h die Funktion g konstant 0 ist. Beim Polynom dritten Grades aus Aufgabe 1 und bei $f(x)=x^3$ kann man nachvollziehen, dass g stets quadratisch ist. Die Betragsfunktion ist in x=0 nicht differenzierbar, obwohl man für jedes von 0 verschiedene h den Wert g(0) bestimmen kann. Man sieht, dass linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert verschieden sind.
Den Wert h=0 kann man nicht einstellen, da g hierfür nicht definiert ist. Offensichtlich ist in der Dynamik aber klar, dass die Ableitungsfunktion – wenn diese existiert – Ergebnis eines Grenzprozesses für h gegen 0 ist.
Besondere Ergebnisse sind die sehr gut genäherten Ableitungsfunktionen des Polynoms dritten Grades, der Sinusfunktion, der Exponentialfunktion und von $f(x)=x^3$, die man erhält, wenn h nahezu 0 ist. Die Eigenschaften der (sehr gut) genäherten Ableitungsfunktionen werden auf die Eigenschaften der ursprünglichen Funktion bezogen. So kann man mit den Schülerinnen und Schülern lokale Extrema, Wendestellen und das Verhalten der Funktion f für x gegen +/- unendlich betrachten und ggf. mit Hilfe der Eigenschaften der Ableitungsfunktion ausdrücken.

Aufgabe 3:
In Aufgabe 3 wird erkannt, dass die Ableitungsfunktion auch durch andere Grenzprozesse entstehen kann. Dabei wird ein variierter Differenzenquotient mit dem herkömmlichen rechnerisch und geometrisch verglichen. Eine Besonderheit ist, dass sich - *bei symmetrischen Funktionen* - die durch den „neuen“ Differenzenquotienten gewonnene Funktion k bzgl. Monotonie, Wendestellen und Extrema ähnlich verhält wie die Ableitungsfunktion. Dies kann sowohl rechnerisch als auch geometrisch nachvollzogen werden.