Freie Geometrie ebener Kurven

Karl – Friedrich Georg

Es wird ein Aufbau einer zwei- bis dreiwöchigen Epoche in der 12. Klasse vorgestellt. Die qualitative Behandlung der polaren (dualen) Verwandlung einfacher ebener Kurvenformen ist eine gute Möglichkeit, exakte Fantasie als Grundlage schöpferischen Denkens auszubilden. Kenntnisse der projektiven Geometrie sollten vorhanden sein, doch ist auch ein Kennenlernen ohne diese möglich.

Zur Einleitung zitiere ich aus einem noch unveröffentlichten Buch „Projektive Geometrie" von Alexander Stolzenburg:

> „Für gewöhnlich gibt es in der Mathematik zwei Arten, Kurven zu behandeln: Im ersten Fall hat man es mit gedanklichen Bestimmungen zu tun, mit Gesetzmäßigkeiten, die sich etwa aus einer geometrischen Definition oder aus einer Konstruktionsbeschreibung folgern lassen. Im zweiten bedient man sich des reichhaltigen Repertoires an analytischen Methoden: Man untersucht die Eigenschaften einer Gleichung und deutet sie dann geometrisch, wobei die Deutung noch ganz besonders von dem gewählten Koordinatensystem bestimmt ist – einem Konstrukt, das eigentlich keinerlei direkte Beziehung zur Kurve hat. In der Differentialgeometrie ist man der Kurve schon sehr viel näher, sofern man dort die inneren Differentialbeziehungen untersucht.
>
> Es ist aber unmittelbar klar, dass die reiche Welt der Kurven, wie sie uns in Natur und Kunst vorliegt, damit nicht erschöpft ist. Wir finden Kurven vor und kennen kein konstruktives Gesetz und schon gar nicht eine Gleichung, die sie in irgendeinem Koordinatensystem beschreibt.
>
> In der Freien Geometrie wird nun der Versuch unternommen, sich von beiden Einschränkungen frei zu machen: Gestaltungsgesetzmäßigkeiten zu untersuchen ohne Bezug auf ein Koordinatensystem. Nur darauf soll das Wort „frei" hindeuten: frei von Koordinaten.
>
> Ganz im Sinne der Wissenschaftsauffassung GOETHES suchen wir die Kurven aus den ihnen selbst innewohnenden Gesetzmäßigkeiten, also aus den Gestaltphänomenen heraus, zu begreifen, nichts ihnen eigentlich Fremdes heranzutragen."

Diese Epoche habe ich seit über 20 Jahren immer wieder gegeben und dabei die Erfahrung gemacht, dass einerseits alle Schüler in den Stoff einsteigen konnten (kein

Mangel an Algebrakenntnissen hinderte sie daran), andererseits eine Grundlage vorhanden war für philosophische und weltanschauliche Gespräche, die Themen berührten, die sonst nie im Mathematikunterricht erscheinen und mit besonderem Interesse aufgenommen wurden.

Ich hoffe, dass diese Ausführungen Kollegen anregen, eine solche Epoche zu geben, und sich nicht von den Inhalten bevorstehender Prüfungen abhalten zu lassen. Die erworbene Beweglichkeit ließ „Versäumtes" leicht nachholen.

Diese Ausführungen sind nur eine Möglichkeit, die „Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven"[1]) von Louis Locher-Ernst für den Unterricht aufzugreifen. Zu Kapitels 6 bildete die Ausarbeitung „Zur freien Geometrie ebener Kurven" von Berthold Waltjen (1982) eine weitere Grundlage.

[1]) Verlag Birkhäuser Basel, 1952

Über diese Epoche kann folgendes Zitat stehen:

Johannes Kepler sagt in „Harmonice mundi" über die gestaltende Weltpolarität:

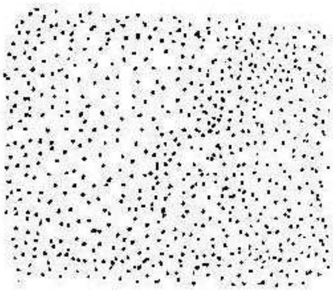
> „....dass Gott in seinem unerschütterlichen Ratschluss das Gerade und das Krumme zu Anbeginn ausgewählt hat, um mit ihm die Göttlichkeit des Schöpfers in die Welt hineinzuzeichnen..... So hat der Allerweiseste die Größenwelt ersonnen, deren ganzes Wesen in den beiden Unterschieden des Geradlinigen und des Krummlinigen beschlossen ist."

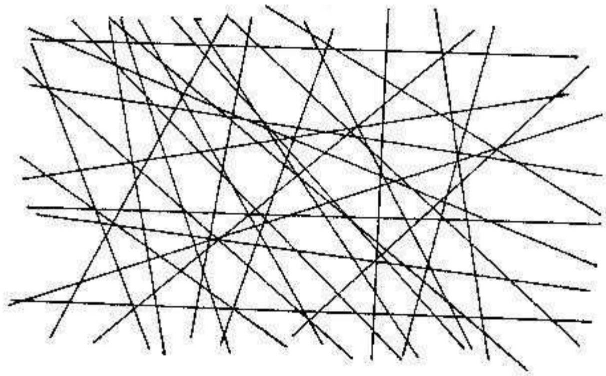
1. Gliederung der Ebene

Die Grundelemente in der ebenen Geometrie sind der **Punkt** und die **Gerade**. Die Ebene enthält unendlich viele Punkte und unendlich viele Geraden.

Betrachten wir nur die Punkte einer Ebene, so erscheint die Ebene als **Punktfeld**

Betrachten wir nur die Geraden einer Ebene, so erscheint die Ebene als **Geradenfeld**

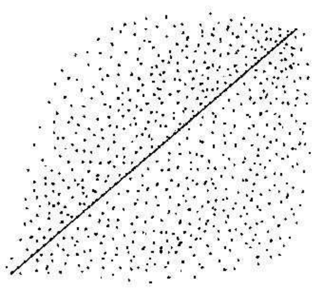


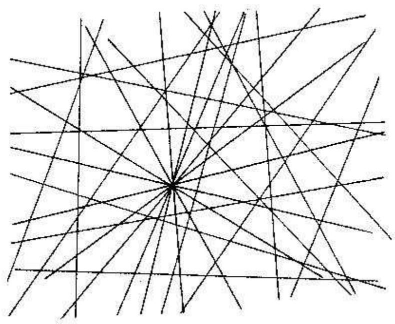


Wollen wir in der Ebene zu Gestaltungen kommen, so müssen wir diese beiden einseitigen Betrachtungen zusammenbringen. Dies können wir dadurch erreichen, dass wir entweder eine Gerade ins Punktfeld oder einen Punkt ins Geradenfeld versetzen.

Eine Gerade im Punktfeld zeichnet alle in ihr liegenden Punkte aus, die Gerade erscheint als **Punktreihe**

Ein Punkt im Geradenfeld zeichnet alle durch ihn gehenden Geraden aus, der Punkt erscheint als **Geradenbüschel**.



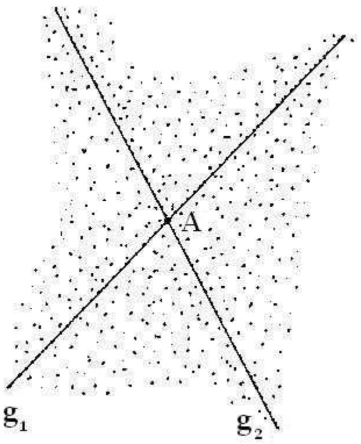


Eine Gerade zerlegt das Punktfeld nicht, weil es über das Unendliche zusammenhängend bleibt. Ein Punkt zerlegt das Geradefeld nicht, da man jede Gerade in die andere überführen kann, ohne den Punkt zu überstreichen.

Zwei Geraden (Punktreihen) g_1 und

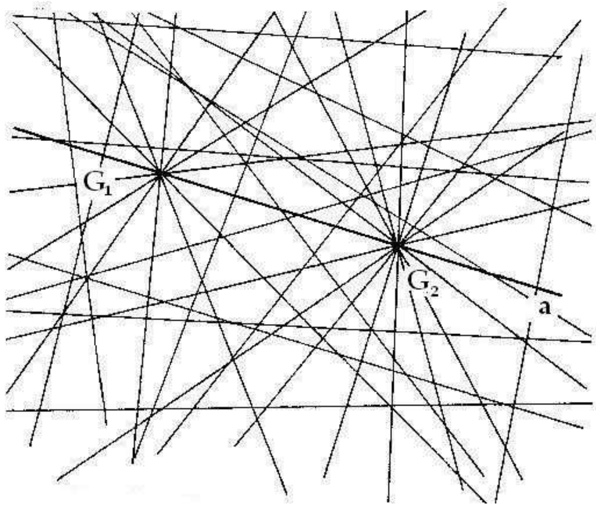
Zwei Punkte (Geradenbüschel) G_1 und

g_2 im Punktfeld zeichnen einen Punkt aus: den **Schnittpunkt** A:



$g_1 \cap g_2 = A$

G_2 im Geradenfeld zeichnen eine Gerade aus: Die **Verbindungsgerade** a:

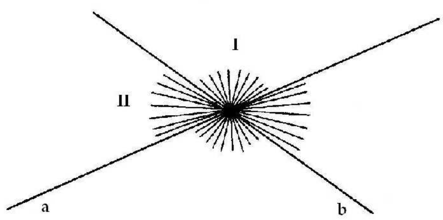


$G_1 \cap G_2 = a$

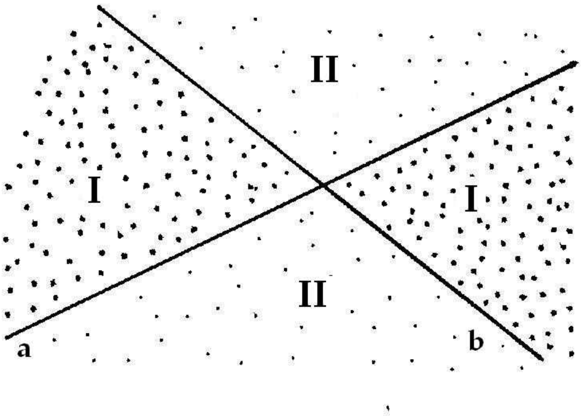
Bevor wir untersuchen, wie die Felder durch drei Elemente (Punkte, bzw. Geraden) gegliedert werden, lernen wir folgende Sätze kennen:

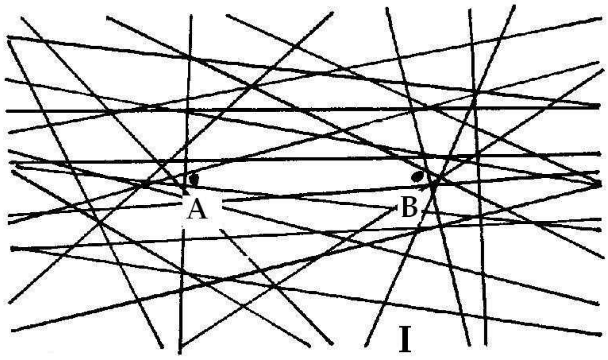
Satz 1A:
Zwei Punkte A, B zerlegen die Verbindungsgerade AB als Punktreihe in zwei Abschnitte: Die Strecken I und II, (deren eine sich über das Unendliche erstreckt, sofern nicht einer der Punkte im Unendlichen liegt

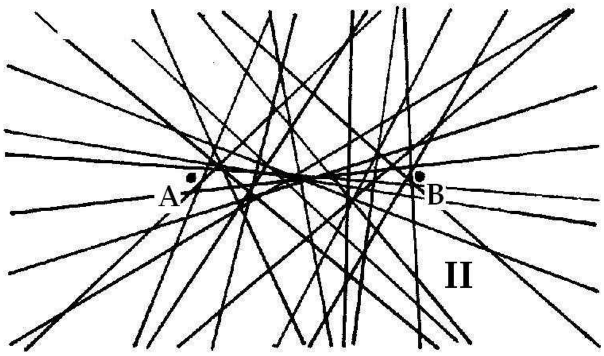
Satz 1a:
Zwei Geraden a, b zerlegen den Schnittpunkt ab als Geradenbüschel in zwei Winkel: Die Winkel I und II.



Satz 2a:
Zwei Punkte A, B gliedern die Ebene als Geradenfeld in zwei disjunkte **Geradenbereiche** I und II.

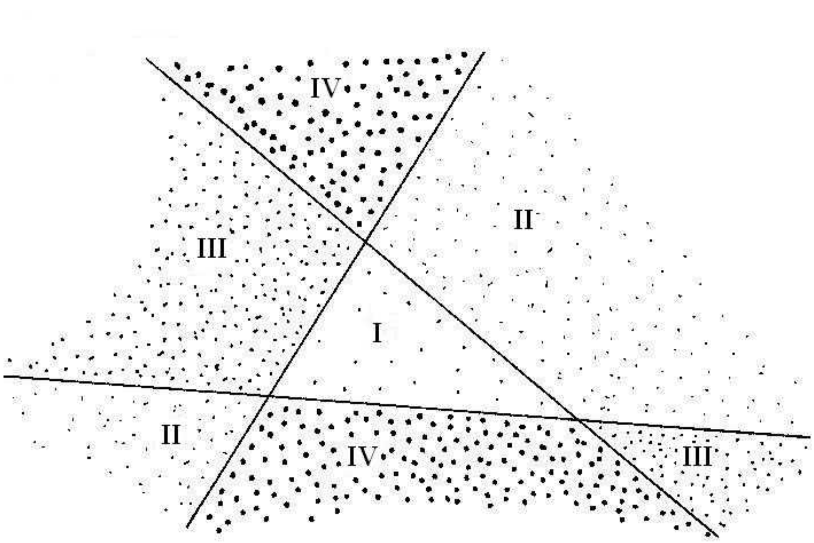






Gliederung der Ebene durch drei Elemente:

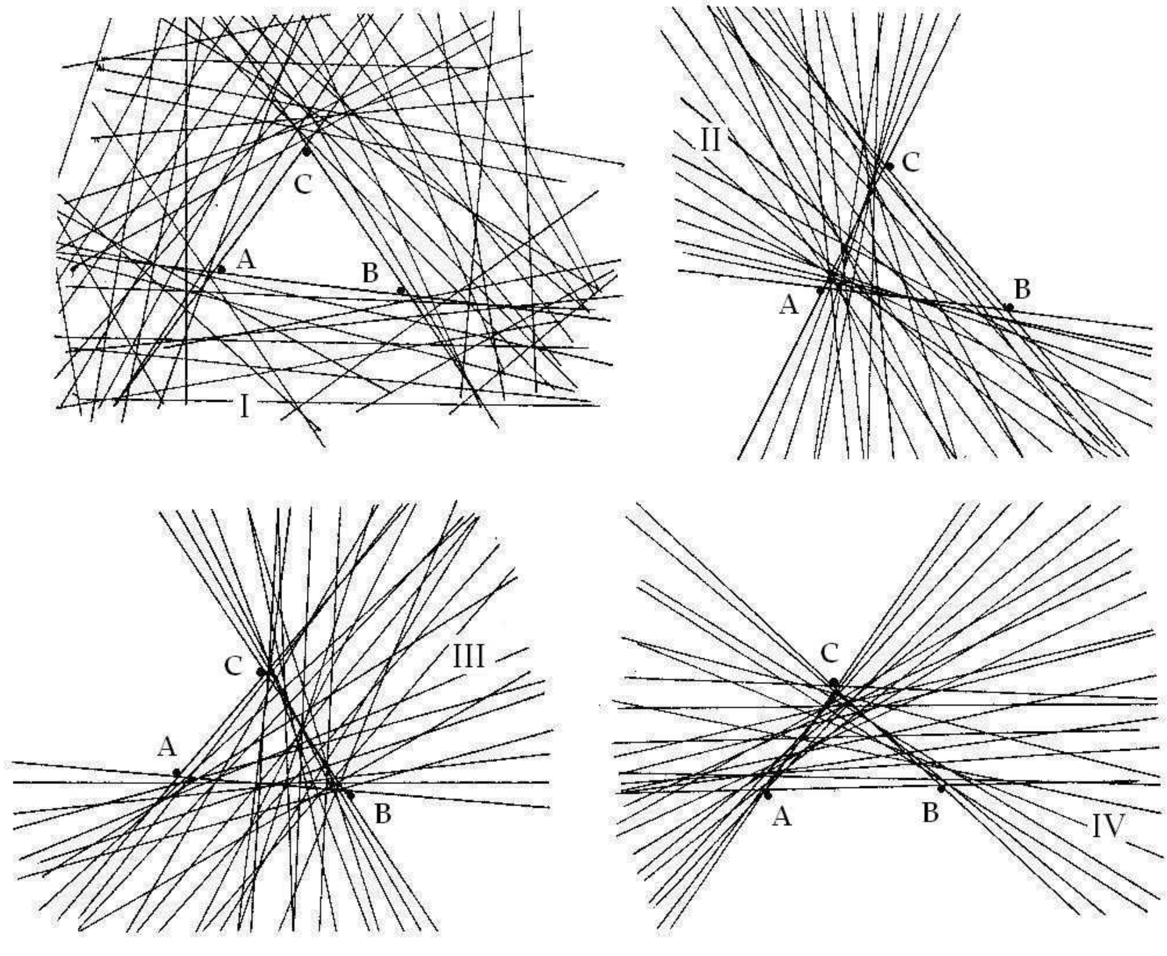
1. Bringen wir eine dritte Gerade (Punktreihe), die nicht dem Geradenbüschel ab angehört in das Punktfeld, so wird die projektive Ebene in vier dreiseitige Gebiete („Dreiseite“) gegliedert.



Satz 3A: Drei nicht durch einen Punkt gehende Geraden a, b, c zerlegen die Ebene als Punktfeld in vier dreiseitige Gebiete.

Zwei Punkte gehören dann demselben **Punktgebiet** an, wenn man von einem zum anderen gelangen kann, ohne eine der drei Geraden zu überschreiten. Ein solches Punktgebiet bezeichnen wir als **Kern**. Ein solcher (dreiseitiger) Kern wird durch drei Strecken begrenzt. Diese drei Grenzstrecken wollen wir **Kanten** nennen, die Punkte der Kanten zählen nicht zu den Punkten des von ihnen begrenzten Gebietes. Die drei Kerngebiete II, III, IV erstrecken sich über das Unendliche. Jedes Kerngebiet ist ein diskretes Punktgebiet.

2. Bringen wir einen dritten Punkt (Geradenbüschel C), der nicht der Punktreihe AB angehört, in das Geradenfeld, so wird die projektive Ebene in vier dreieckige Bereiche („Dreiecke“) gegliedert.

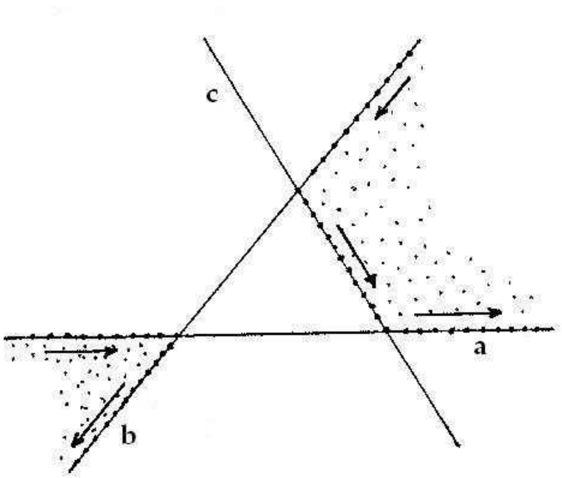


Satz 3a: Drei nicht in einer Geraden liegende Punkte A, B, C gliedern die Ebene als Geradenfeld in vier dreieckige Bereiche.

Zwei Geraden gehören demselben **Geradenbereich** an, wenn man die eine Gerade in die andere durch eine Bewegung überführen kann, ohne einen der drei Punkte zu überschreiten. Einen solchen Geradebereich bezeichnen wir als **Hülle**. Die (dreieckige) Hülle wird durch drei Winkel begrenzt. Die verschiedenen Hüllbereiche scheinen sich teilweise überlappende Bereich zu sein, doch ideell sind sie vier diskrete Bereiche! (Dass zwei zu verschiedenen Bereichen gehörige Geraden einen Schnittpunkt haben, ist ebenso selbstverständlich wie die Tatsache, dass zwei zu verschiedenen Gebieten gehörende Punkte stets eine Verbindungsgerade haben – auch wenn sie nicht gezeichnet ist.)

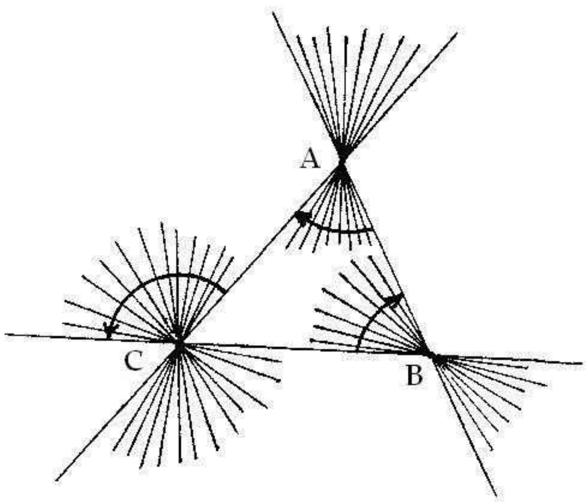
Um die Bewegung durch Winkel zu verstehen, muss man mit einer Geraden die Grenzen der Hülle „abdrehen“. Dies entspricht polar[1)] dem „Abschreiten“ der Grenzen eines Kernes.

Abschreiten der Grenzen des Kerns durch einen Punkt



Die Grenzen sind die von den eingezeichneten Punkten erfüllten Strecken (Kanten).

Abdrehen der Grenzen der Hülle durch eine Gerade



Die Grenzen sind die von den eingezeichneten Geraden erfüllten Winkel.

Zusammenfassung für die Gliederung durch drei Elemente:

Drei Geraden in einer Ebene zerlegen diese als Punktfeld in vier dreiseitige Kerngebiete („Dreiseite“), und polar[1)]: Drei Punkte in einer Ebene gliedern diese als Geradenfeld in vier dreieckige Hüllbereiche (Dreiecke“).
Betrachtet man beide Vorgänge ineinander liegend: Jedes der vier Kerngebiete wird genau von einem der vier Hüllbereiche umgeben.

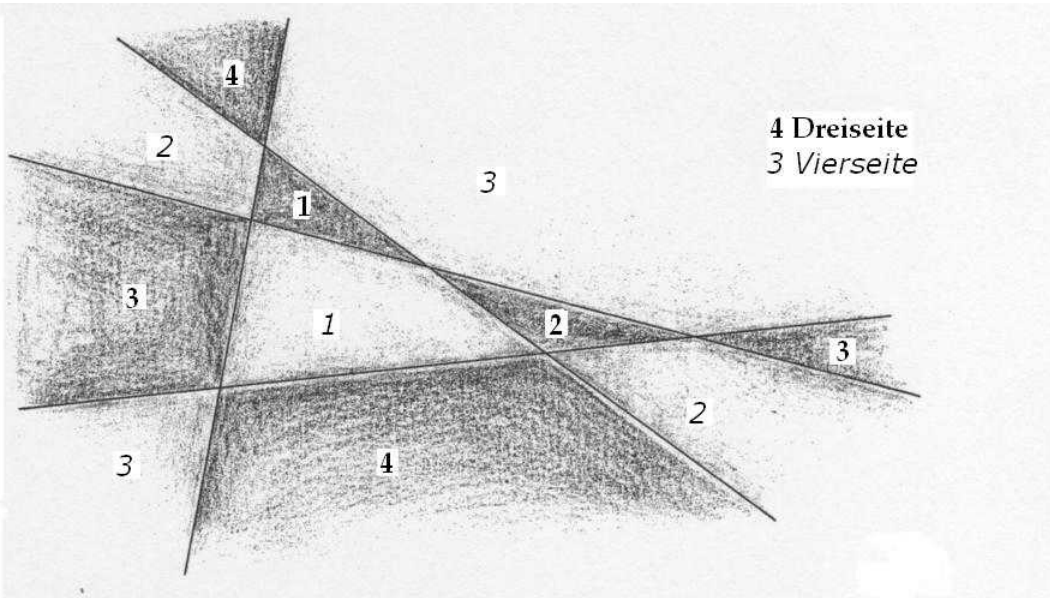
[1)] In der projektiven Geometrie haben wir die Gegensätzlichkeit der zwei Grundelemente Punkt und Gerade in der Ebene als Dualität bezeichnet. Im Raum beschäftigten wir uns mit den drei Grundelementen Punkt, Gerade und Ebene. Hier haben wir die gegensätzlichen Elemente und Gebilde als „polar“ bezeichnet. Um die Gegensätzlichkeit zu betonen, sprechen wir jetzt auch in der Ebene von Polarität.

Bemerkung:
In der Gegenüberstellung haben wir die Bezeichnung „Gebiet“ für Punktmengen und die Bezeichnung „Bereich“ für Geradenmengen verwendet. Dies wird auch weiterhin so bleiben.

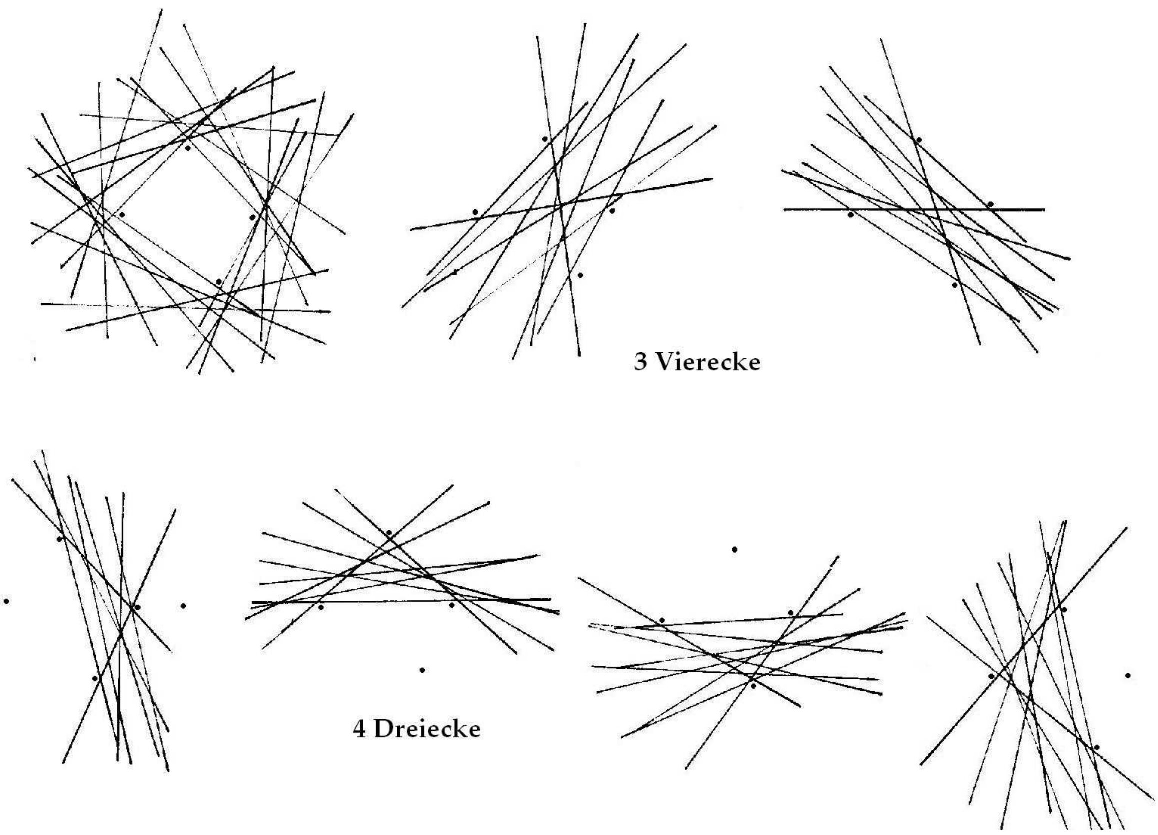
2. Übungen

2.1 Gliederung der Ebene durch 4 Elemente

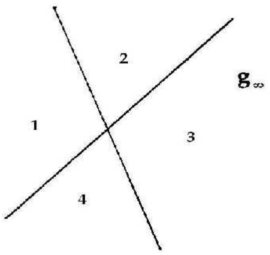
a) durch Geraden

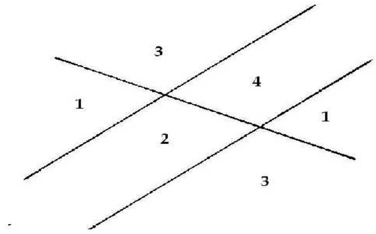


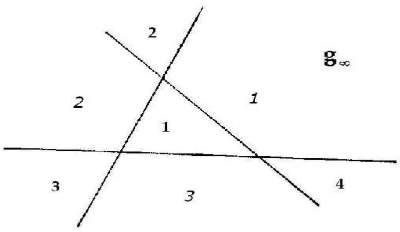
b) durch Punkte

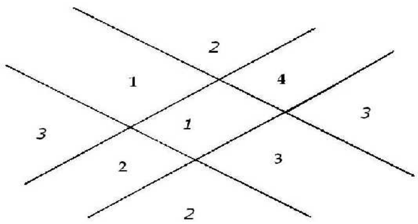


2.2 Gliederung der Ebene in Sonderfällen (mit unendlichfernen Elementen)



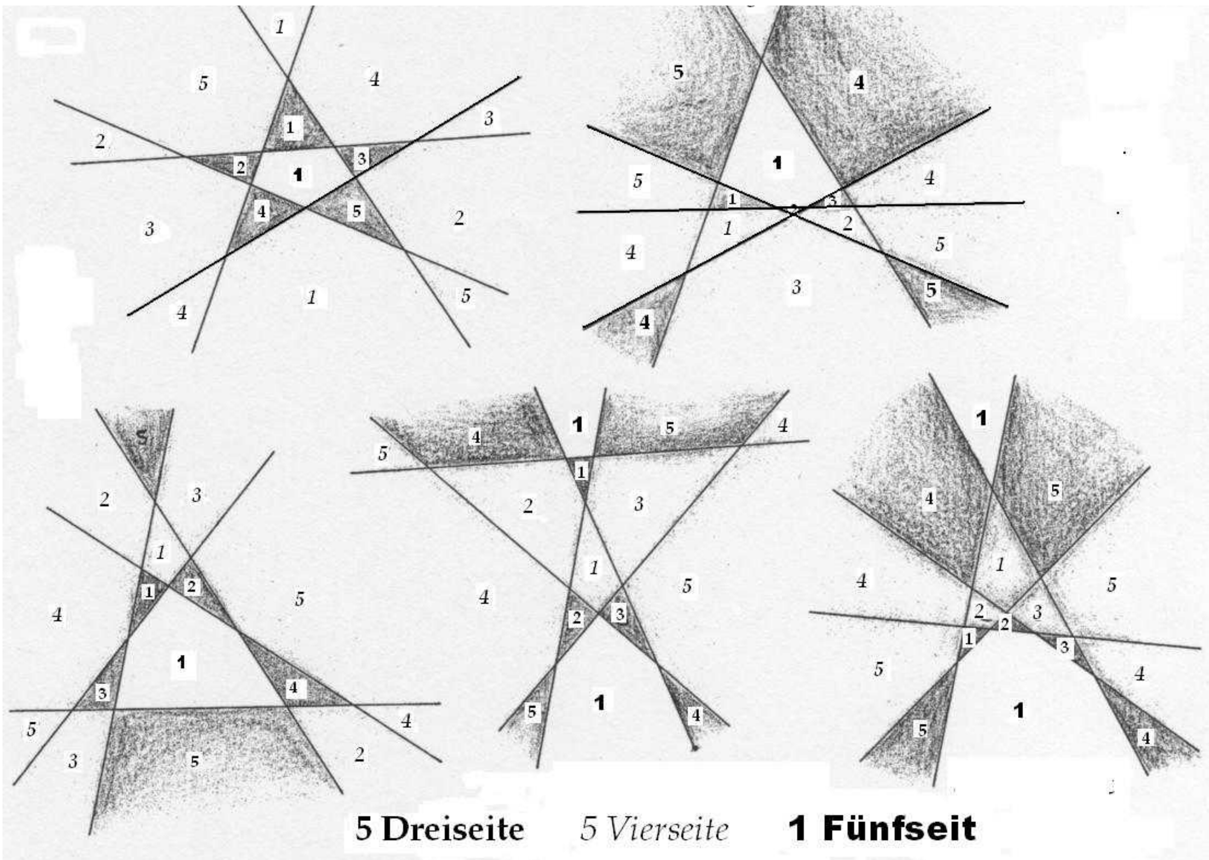




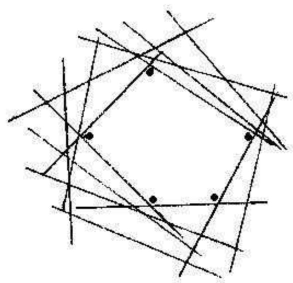
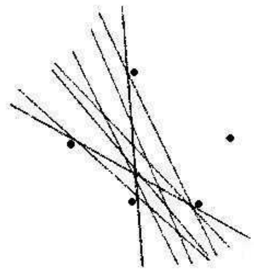
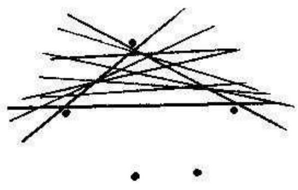


2.3 Gliederung der Ebene durch 5 Elemente

a) durch Geraden



b) durch Punkte

1 Fünfeck 5 Vierecke 5 Dreiecke

2.4 Gliederung der Ebene durch 6 Elemente

a) durch 6 Geraden (von denen nicht drei durch einen Punkt gehen) kann man, je nach Lage dieser Geraden,
z.B. 10 Dreiseite und 6 Fünfseite oder
6 Dreiseite, 9 Vierseite und 1 Sechsseit oder
6 Dreiseite, 8 Vierseite und 2 Fünfseite oder
7 Dreiseite, 6 Vierseite und 3 Fünfseite oder
7 Dreiseite, 8 Vierseite und 1 Fünfseit erhalten.

b) durch 6 Punkte (von denen nicht drei in einer Linie liegen) kann man, je nach Lage dieser Punkte,
z.B. 10 Dreiecke und 6 Fünfecke oder
6 Dreiecke, 9 Vierecke und 1 Sechseck oder
6 Dreiecke, 8 Vierecke und 2 Fünfecke oder
7 Dreiecke, 6 Vierecke und 3 Fünfecke oder
7 Dreiecke, 8 Vierecke und 1 Fünfeck erhalten.

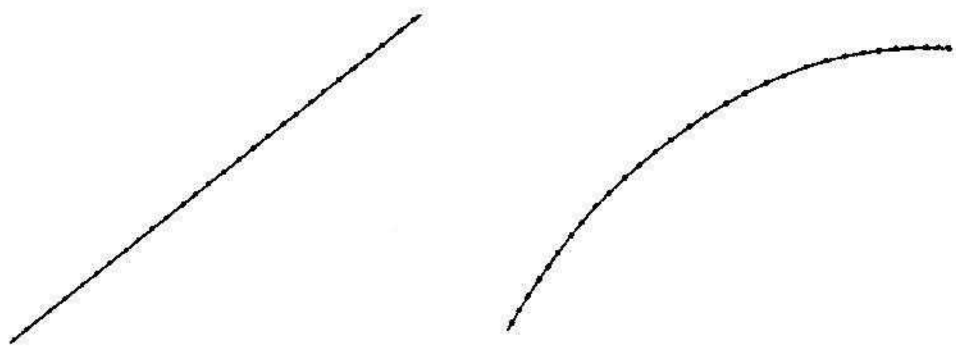
3. Der Bogen

3.1 Vorbetrachtung

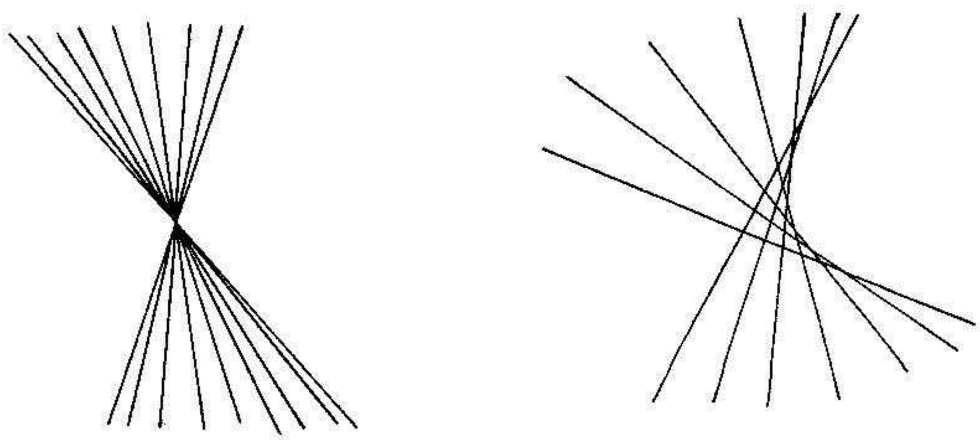
Laufen wir eine Kurve, so lebt deren Dynamik zunächst am stärksten in den verschiedenartigen Krümmungsverhalten. Im Extrem kann sie sich zur Geraden strecken (Krümmung null) oder zum Punkt krümmen (unendliche Krümmung). In der Geraden wird die Bewegung zu einem geradlinigen Fortschreiten, es gibt keine Richtungsänderung. Im Punkt ist als Bewegung nur noch die Drehung möglich. Es gibt kein Fortschreiten mehr, nur noch Richtungsänderung. Laufen wir eine gewöhnliche Kurve, so schreiten wir fort **und** drehen uns dabei. Die Punkte der Kurve geben die durchlaufenen Orte an, die Tangenten die sich ändernden Richtungen. Punkt und Gerade, Fortschreiten und Drehen sind für die ebenen Kurven die Polaritäten, zwischen denen sie sich bewegen.

3.2 Definition des Bogens

Wird eine Strecke (Punktmenge) gekrümmt, so erhalten wir einen Bogen:

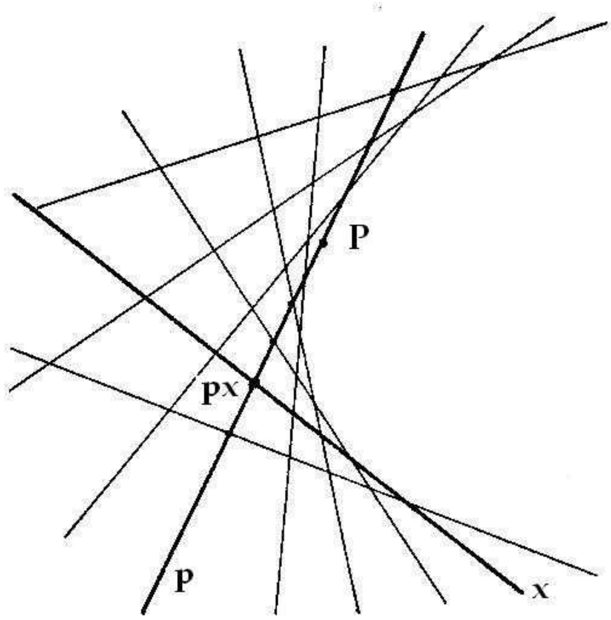


Welcher Vorgang entspricht polar diesem Krümmen im Geradenfeld? Dort müssen wir nicht von einem Stück geraden Weges, sondern von einem „Stück" Drehung ausgehen, einem Winkel. Um den analogen Vorgang zum Krümmen zu finden, überlegen wir, was den Bogen von der Strecke unterscheidet. Offenbar liegen keine drei Punkte mehr in einer und derselben Geraden. Entsprechend werden wir den Winkel so umzuwandeln haben, dass keine drei Geraden mehr durch einen Punkt gehen. Der Winkel wird zu einer Bogenhülle aufgelöst: Die Geraden hüllen als Tangenten einen einfachen Bogen ein.



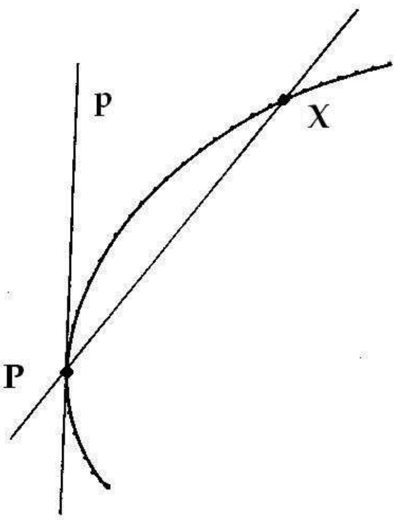
Wir sehen, dass wir bei diesen polaren Vorgängen „**krümmen**" und „**auflösen**" zu einer ähnlichen Form kommen. Der aufgelöste Winkel bestimmt als Hülle einen Bogen. In jeder Geraden dieses Hüllbogens liegt ein Punkt des Bogens.

Wie finden wir für eine beliebige Gerade p des Hüllbogens diesen Bogenpunkt?



Betrachten wir den Bogen als gekrümmte Punktreihe, so können wir die polare Untersuchung durchführen:

Ein Punkt X durchlaufe die Punktmenge auf einen festen Punkt P hin. Wir verfolgen die Bewegung der Verbindungsgeraden PX. Nähert sich X dem Punkt P, so wird die Verbindungsgerade PX in einem Moment unbestimmt, indem X in P fällt. Sobald X aber P überschritten hat, ist die Gerade PX wieder eindeutig bestimmt. Es gibt aber genau eine Gerade p von P, die diese Lücke schließt: die Tangente p in P.

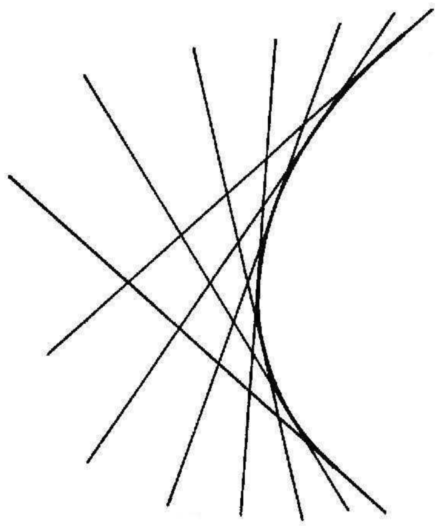


Wir können somit den Bogen als Punkt- und Geradengebilde zugleich ansehen, wobei keine Betrachtungsart vor der anderen ausgezeichnet ist. Der Bogen erscheint als Ergebnis des Zusammenwirkens von Punkt- und Geradenfeld. Der Bogen ist **in sich polar.**

Definition Ein Punkt P des Bogens und seine Tangente p stellen das **Element** $P * p$ des Bogens dar.

Ein Bogen hat ein Anfangselement $A * a$ und ein Endelement $E * e$.

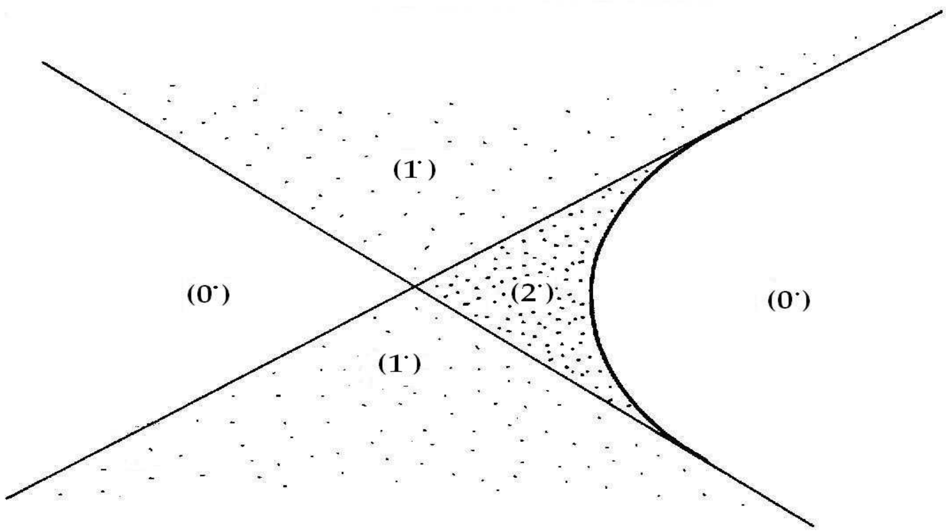
3.3 Gliederung der Ebene durch einen Bogen



Betrachten wir einen Bogen, so fällt uns auf, dass die Ebene als Punktfeld nicht gleichmäßig von den Geraden des Bogens überstrichen wird. Es gibt Punkte, durch die eine, wieder andere, durch die keine Gerade geht. So erkennen wir: Durch einen Bogen wird das Punktfeld in verschiedene Gebiete gegliedert

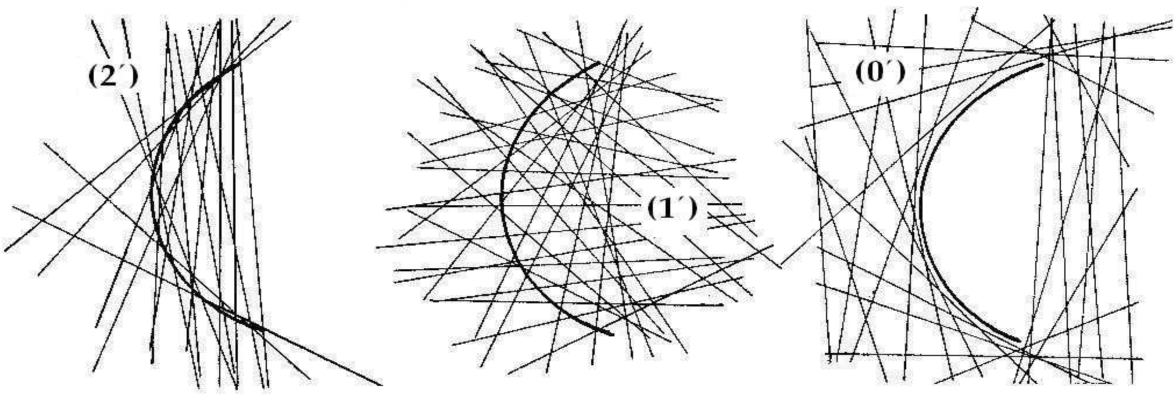
Von einem Punkt des Punktfeldes werden an den Bogen gesandt:

Im Gebiet (2′) zwei Tangenten,
im Gebiet (1′) eine Tangente,
im Gebiet (0′) keine Tangente.



Die Grenzen der Gebiete werden von den Endtangenten des Bogens und dem Bogen als Punktmenge gebildet.

Entsprechend (polar) wird das ebene Geradenfeld durch den Bogen in drei Geradenbereiche gegliedert:



Der Bereich (2′) besteht aus allen Geraden, die den Bogen in **zwei** Punkten treffen,
der Bereich (1′) besteht aus allen Geraden, die den Bogen in **einem** Punkt treffen,
der Bereich (0′) besteht aus allen Geraden, die den Bogen in **keinem** Punkt treffen.

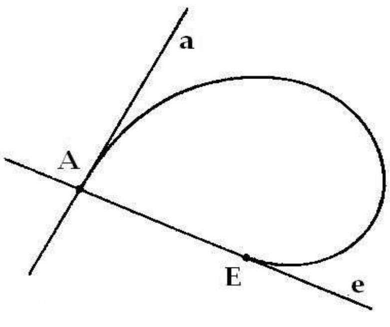
Die Grenzen der Bereiche werden von den Endpunkten des Bogens und dem Bogen als Geradenmenge gebildet.

3.4 Spezielle Bögen

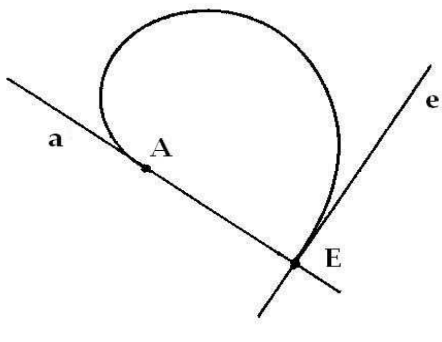
Wir haben bisher ausschließlich einfache Bögen betrachtet. Verlängert man nun einen einfachen Bogen, so erreicht man notwendigerweise einmal ein Element, mit welchem der Bogen aufhört, einfach zu sein. Es kann dies auf zwei Arten eintreten:

1. Man gelangt zu einem Endelement $E * e$, für welches die Gerade e den Anfangspunkt enthält ($A \in e$), oder
2. Man gelangt zu einem Endelement $E * e$, für welches der Punkt E der Anfangsgeraden angehört ($E \in a$).

Im 1. Fall ergibt sich eine einwickelnde Spirale, im 2. Fall eine sich auswickelnde Spirale. Einen solchen Bogen nennen wir einen **Spiralbogen**. Er ist ein in sich polares Gebilde.



$A \in e$

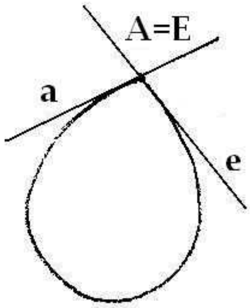


$E \in a$

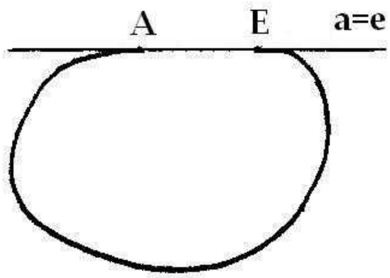
Wenn nun $A = E$ bzw. $A = e$ ist,

erhalten wir

eine **Ecke:** bzw. eine **Strecke:**

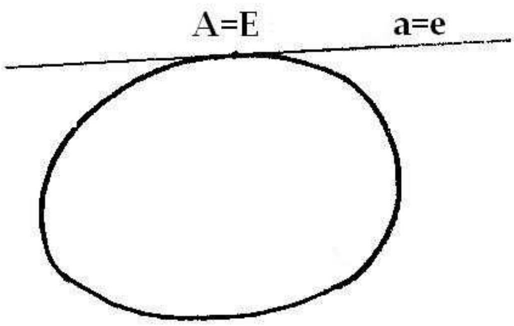


Spitzbogen



Flachbogen

Ist letztlich A = E und a = e, erhalten wir die **Eilinie** oder das **Oval**:



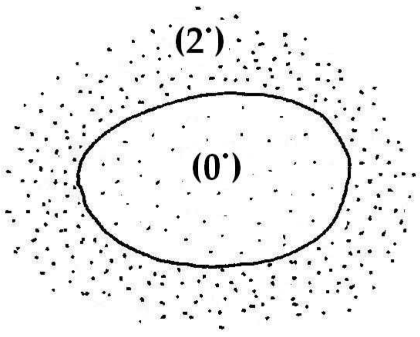
Die Eilinie (Oval) steht zwischen den beiden Möglichkeiten der ein- und auswickelnden Spirale, zwischen dem Spitzbogen und dem Flachbogen. Sie ist eine **Kurve** ohne irgendwelche Besonderheit („**Singularität**“).

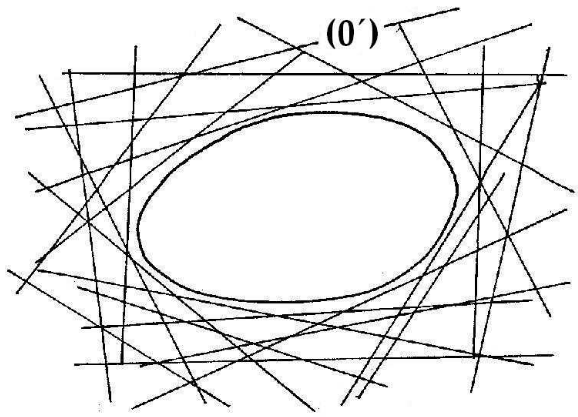
Als Punktgebilde zerlegt die Eilinie die Ebene als Punktfeld in zwei Gebiete:

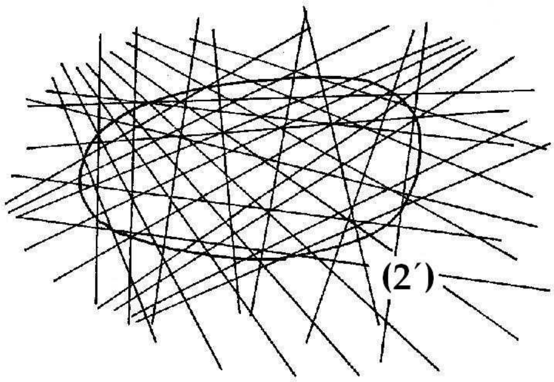
$(0^{\bullet})$ = „Innen“ und $(2^{\bullet})$ = „Außen“.

Als Geradegebilde zerlegt die Eilinie die Ebene als Geradenfeld in zwei Bereiche:

$(0')$ = „Innen“ und $(2')$ = „Außen“.







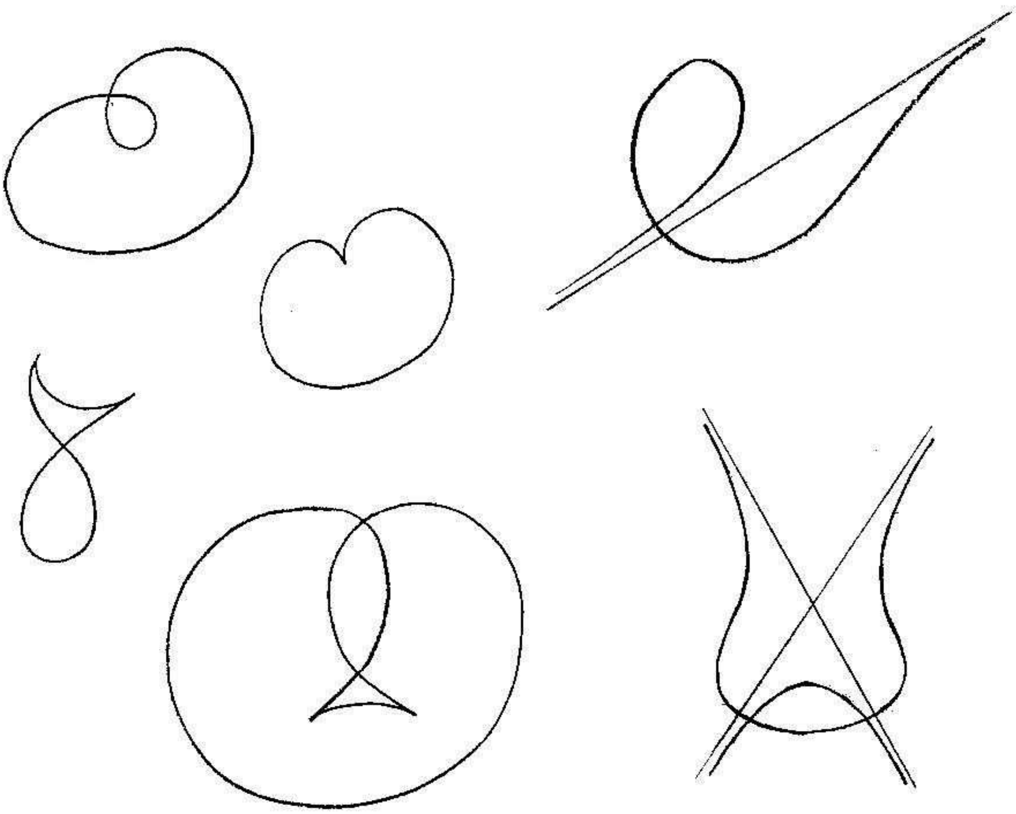
4. Kurven

4.1 Vorbemerkungen

Unter einer Kurve versteht man einen geschlossenen, also in sich zurückkommenden Bogen (der auch über das Unendliche geschlossen sein kann).
Im vorigen Kapitel haben wir als eine einfache Kurve die Eilinie (Oval) kennen gelernt. Sie hat mit Geraden des Geradenfeldes höchstens 2 Punkte gemeinsam und sendet durch Punkte des Punktfeldes höchstens 2 Tangenten. Ein bekanntes Beispiel für solche Kurven sind die Kegelschnitte.

4.2 Singularitäten und andere Besonderheiten an Kurven

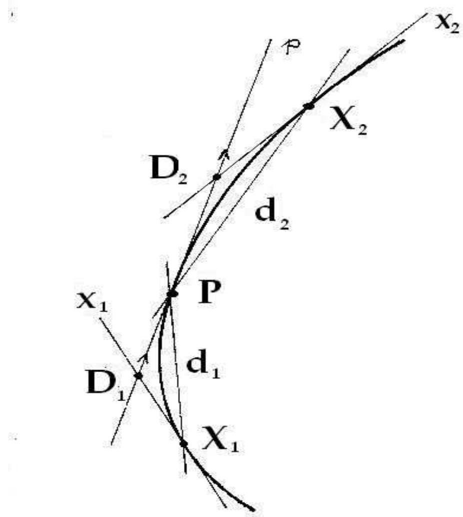
Einige Beispiele für Kurven mit **Singularitäten** und anderen Besonderheiten:



Für einen regulären Kurvenpunkt gilt:
Jeder Punkt habe genau eine Tangente und jede Tangente gehöre genau einem Kurvenpunkt als Berührpunkt an. Wie die Beispiele von Kurven zeigen, ergeben sich nur dann die verschiedenen interessanten Kurven, wenn wir Kurvenpunkte zulassen, die nicht regulär sind, sondern lokale Singularitäten besitzen.

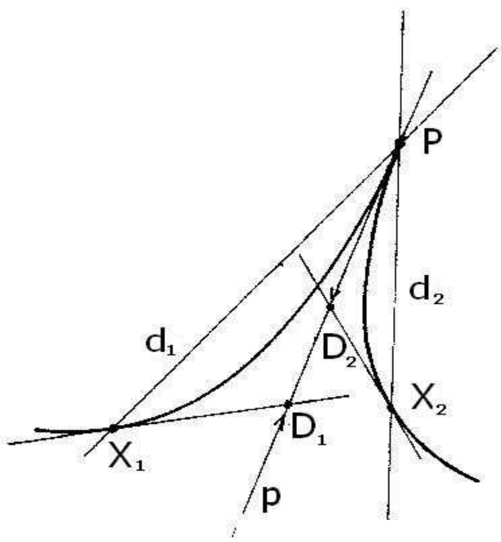
Wollen wir ein Kurvenelement $P * p$ auf Singularitäten untersuchen, müssen wir ermitteln, ob im Element der Punkt oder die Gerade oder gar beide ein besonderes Verhalten zeigen. Wir wenden dazu ein Verfahren an: Wir lassen einen beweglichen Punkt X mit seiner Tangente x („Testelement" $X * x$) den Punkt P mit seiner Tangente p (Element $P * p$) überschreiten. Dabei beobachten wir das Verhalten der Geraden PX = d („Direktionsgerade") und des Punktes xp = D („Direktionspunkt"). Diese sind stets eindeutig bestimmt und durchlaufen einfache Bewegungen, solange $X * x$ keinem besonderen Element angehört. Ausnahmen treten dann auf, wenn $X * x$ mit $P * p$ zusammenfällt, dann sind D und d unbestimmt. Wie wir in 3.2 sahen, kann eine derartige Lücke stetig geschlossen werden, und dies wollen wir auch hier voraussetzen. Wir führen zuerst diese Untersuchung bei einem regulären Linienelement $P * p$ durch:

Der Punkt X durchlaufe P und dabei durchläuft auch x die Tangente p. Dies geschieht ohne Bewegungsumkehr.
Wir sehen außerdem: D durchläuft p ohne Änderung der Bewegungsrichtung in P und d dreht sich um P ohne Änderung der Bewegungsrichtung. Ein solches Element $P * p$ ist unter Punktaspekt und unter Geraden-aspekt „**regulär**", es hat die Charakteristik (**R;r**).



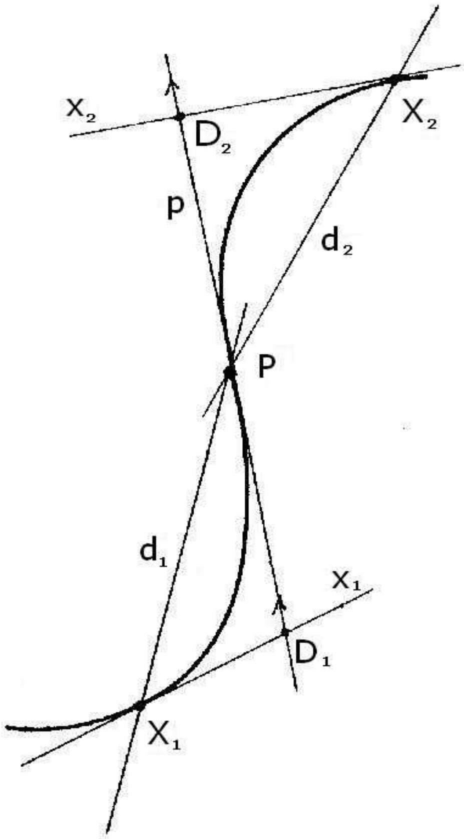
Dornspitze

Der Punkt X erfährt in P eine Umkehrung seiner Bewegungsrichtung, die Tangente x bewegt sich ohne Richtungsänderung über p hinweg.
Wir sehen: D durchläuft p mit Änderung der Bewegungsrichtung in P, aber d dreht sich um P ohne Richtungsänderung. Dieses Element $P * p$ ist **singulär** unter dem **Punktaspekt**, aber **regulär** unter dem **Geradenaspekt**, es hat die Charakteristik (**S**,**r**).
Man nennt es eine **Dornspitze**.



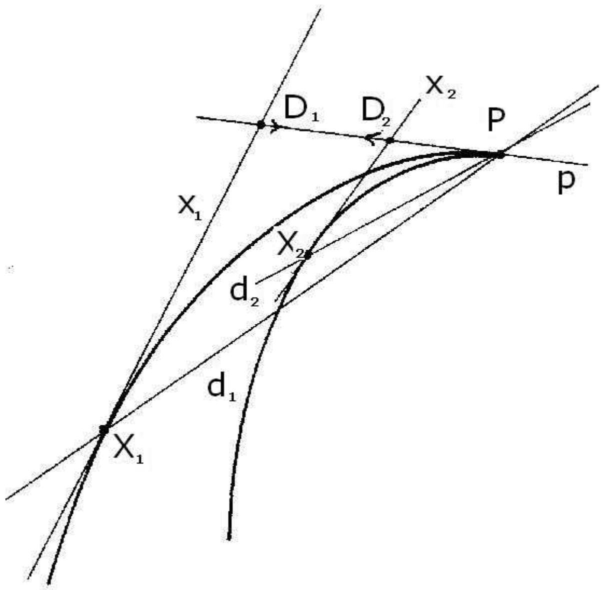
Wendestelle

Der Punkt X bewegt sich ohne Richtungsänderung über den Punkt P hinweg, aber die Tangente p erfährt in p eine Umkehr ihres Drehsinns.
Wir sehen: D durchläuft p ohne Änderung der Bewegungsrichtung, aber d dreht sich um P bis in die Lage von p und dann zurück.
Dieses Element $P * p$ ist **regulär** im **Punktaspekt** und **singulär** unter dem **Geradenaspekt**, es hat die Charakteristik (**R,s**).
Man nennt es eine **Wendestelle**



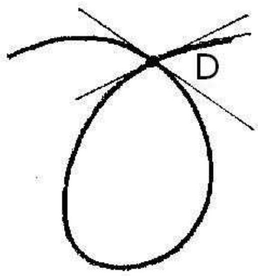
Schnabelspitze

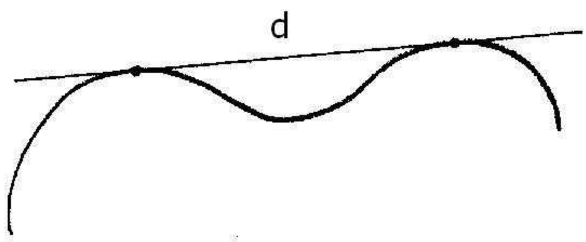
Der Punkt X erfährt eine Richtungsänderung in P und auch x erfährt eine Richtungsänderung in p.
Wir sehen: D durchläuft p bis P und kehrt dann seine Bewegungsrichtung um, d dreht sich um P bis in die Lage von p und dreht dann zurück. Dieses Element $P * p$ ist unter **Punkt-** und **Geradenaspekt singulär**, es hat die Charakteristik (**S,s**).
Man nennt es eine **Schnabelspitze.**



Mit dieser Betrachtungsart können wir auch das Verhalten von Kurven in eventuell vorhandenen Fernpunkten und Ferngeraden untersuchen

Lassen wir als Besonderheit noch **Doppelpunkt** und **Doppeltangente** zu, so können wir mit diesen Begriffen eine erstaunliche Fülle von Kurven umfassen und ordnen.





Aus obiger Beschreibung geht hervor, dass

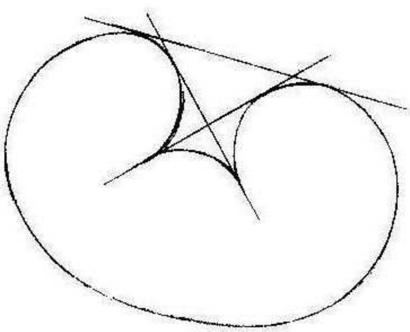
Dornspitze (S,r)	und Wendestelle (R,s)	polare Kurvenelemente sind,
Schnabelspitze (S,s)	und regulärer Punkt (R,r)	selbstpolar sind und
Doppelpunkt	und Doppeltangente	ebenfalls polar sind.

Im Folgenden verstehen wir unter Kurven stets eine geschlossene Kurve mit endlich vielen singulären Elementen. Die Kurven, die wir betrachten, werden wir zunächst nicht durch Konstruktion gewinnen, sondern freihand zeichnen.

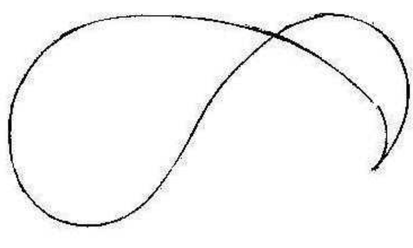
4.3 Übungsaufgaben

1. Aufgabe: Welche Singularitäten besitzen folgende Kurven?

a)



b)



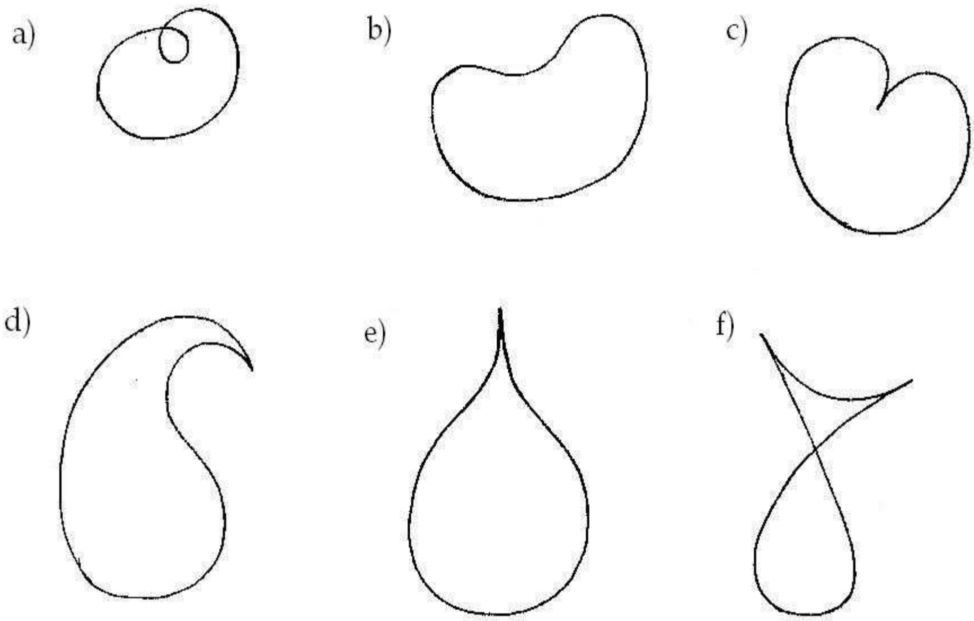
Antwort:

a)	b)
2 Dornspitzen (DS)	1 Schnabelspitze (SS)
3 Doppeltangenten (DT)	1 Doppelpunkt (DP)
	1 Doppeltangente (DT)
	1 Wendestelle (WS)

2. Aufgabe: Zeichne Kurven mit den folgenden (und nur diesen!) Singularitäten:

a) 1 Doppeltangente und 1 Doppelpunkt
b) 1 Doppeltangente und 2 Wendestellen
c) 1 Doppeltangente und 1 Dornspitze
d) 1 Wendestelle und 1 Schnabelspitze
e) 2 Wendestellen und 1 Dornspitze
f) 2 Dornspitzen und 1 Doppelpunkt.

Lösungen:



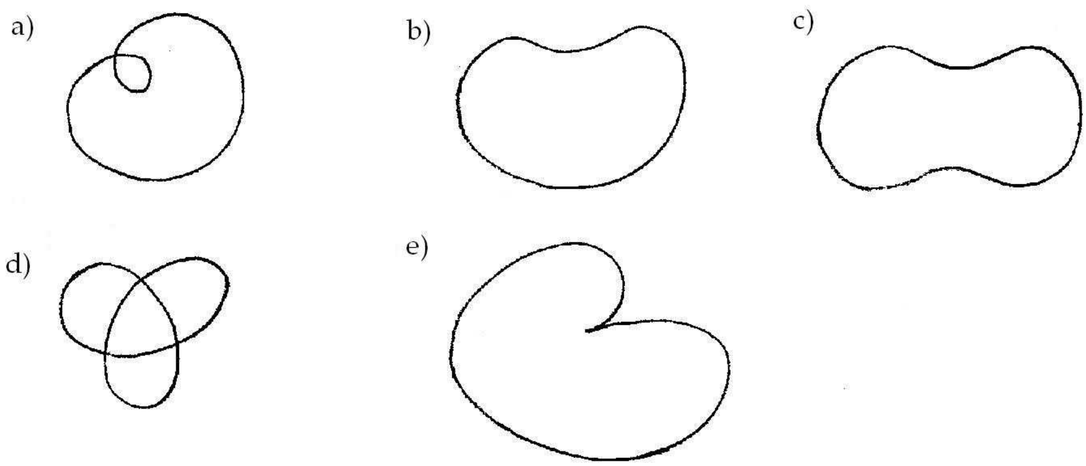
4.4 Form und Gegenform

Zu jeder Kurvenform in der Ebene gibt es eine polare ebene Form, die **Gegenform**. Dies folgt aus der in sich polaren Struktur der verschiedenen bisher behandelten Elemente und Grundsätze.
Einige Entsprechungen des **Polaritätsgesetzes** sind im Folgenden zusammengestellt:

Punkt	Gerade
Punktreihe	Geradenbüschel
Punktfeld	Geradenfeld
Schnittpunkt zweier Geraden	Verbindungsgerade zweier Punkte
verbinden	schneiden
liegen in	gehen durch
Durchlaufen einer Geraden	Drehen um einen Punkt
Strecke	Winkel
Kerngebiet	Hüllenbereich
Bogen als Punktgebilde	Bogen als Geradengebilde
krümmen	auflösen
Dreieck	Dreiseit
singulärer Punkt	singuläre Tangente
Dornspitze	Wendestelle
Schnabelspitze	Schnabelspitze
Doppelpunkt	Doppeltangente
gemeinsame Punkte einer Geraden mit einem Bogen als Punktgebilde	Gemeinsame Geraden eines Punktes mit einem Bogen als Geradengebilde
Ordnung einer Kurve [1]	Klasse einer Kurve [2]

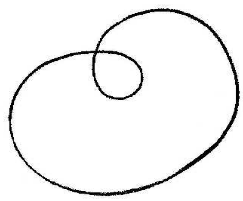
[1] siehe 4.6
[2] siehe 4.6

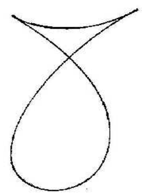
Aufgabe: Zeichne zu den gegebenen Formen (Kurven) die polaren Formen (Gegenformen).

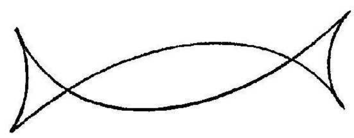


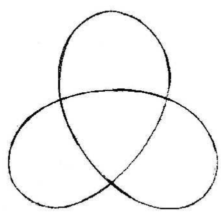
Lösungen:

Die Form hat die Singularitäten:	↔	Die Gegenform hat demnach die Singularitäten
a)		
1 Doppelpunkt 1 Doppeltangente	↔	1 Doppeltangente 1 Doppelpunkt
b)		
2 Wendestellen 1 Doppeltangente	↔	2 Dornspitzen 1 Doppelpunkt
c)		
4 Wendestellen 1 Doppeltangente	↔	4 Dornspitzen 1 Doppelpunkt
d)		
3 Doppeltangenten 3 Doppelpunkte	↔	3 Doppelpunkte 3 Doppelpunkte
e)		
1 Dornspitze 1 Doppeltangente	↔	1 Wendestelle 1 Doppelpunkt



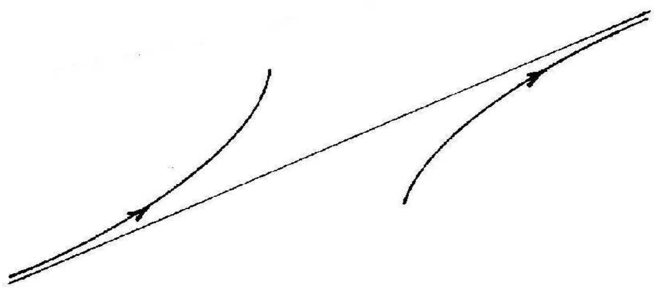




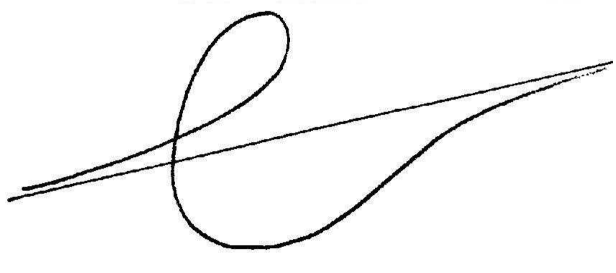


Die Gegenform zu e) ist durch einfache Überlegungen nicht zu finden. Führen wir eine vollständige Betrachtung der gegebenen Form durch, so erkennen wir – neben den beiden Singularitäten Dornspitze und Doppeltangente – dass es in der ganzen Ebene keinen Punkt gibt, der keine Tangente an die Kurve sendet, dass also kein (0')-Gebiet vorhanden ist. Somit darf die Gegenform, wenn wir das Polaritätsprinzip konsequent anwenden, keinen (0')-Bereich haben! D.h., die gesuchte Gegenform muss von jeder Geraden der Ebene geschnitten werden, also auch von der unendlichfernen Geraden. Das ist aber nur möglich, wenn die Gegenform über das Unendliche geht.

Wir wollen nun den Durchgang durch das Unendliche genauer untersuchen. Geht eine Kurve in Richtung einer vorgegebenen Geraden (Asymptote) durch das Unendliche, ohne dort eine Singularität zu besitzen, so muss sie „auf der anderen Seite" der Geraden wieder erscheinen.[3] Die projektive Ebene ist einseitig (vgl. das „Möbiusband"): der Punkt erscheint also nach dem Durchgang auf der „anderen" Seite der Ebene wieder, weshalb die Gerade weiterhin „links" von ihm liegt.



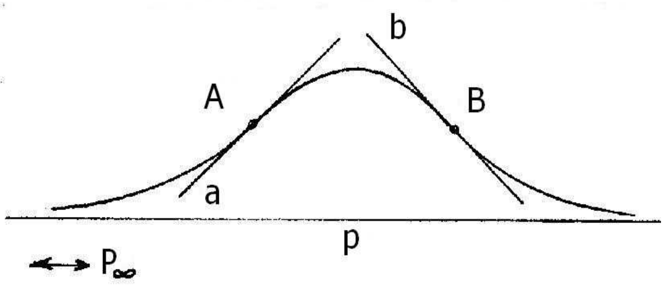
Die zu unserer Form e) polare Form kann nun so gezeichnet werden:

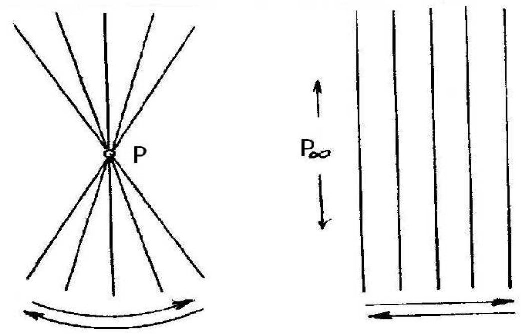


[3] Hier wird eine entsprechende Betrachtung in der Projektiven Geometrie der 11. Klasse vorausgesetzt, z.B. bei der „Dreiecksverwandlung".

4.5 Wendestelle im unendlichfernen Kurvenpunkt

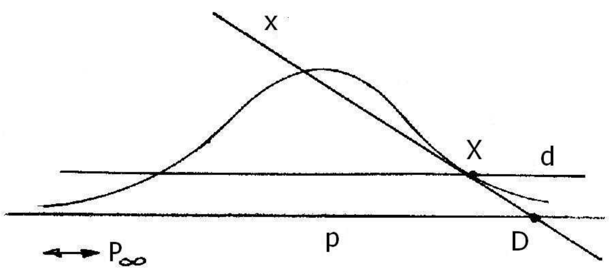
An der nebenstehenden Kurve erkennen wir, dass die beiden Elemente A∗a und B∗b Wendestellen sind. Nun wollen wir das Verhalten der Kurve im Unendlichen, d.h. im Fernpunkt P_∞ untersuchen. Dazu müssen wir das Element $P * p$ betrachten.





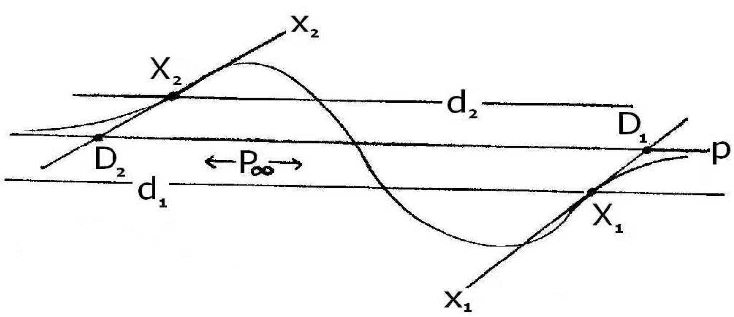
Eine Vorbetrachtung:

Dem Drehen einer Geraden um den Punkt P im Endlichen entspricht eine Parallelverschiebung, wenn der „Drehpunkt“ der Fernpunkt P_∞ ist.



Bewegt sich das Testelement $X * x$ auf der Kurve durch das Unendliche, so behält der Direktionspunkt D seine Bewegungsrichtung bei, während die Direktionsgerade d eine Richtungsänderung erfährt. Für $P_\infty * p$ gilt die Charakteristik (R, s). Also befindet sich im Unendlichen eine Wendestelle.

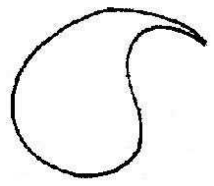
Zum Vergleich kann man an der nebenstehenden Zeichnung erkennen, dass es sich beim Grenzpunkt P_∞ um ein reguläres Kurvenelement handelt. Für $P_\infty * p$ gilt die Charakteristik (R,r)



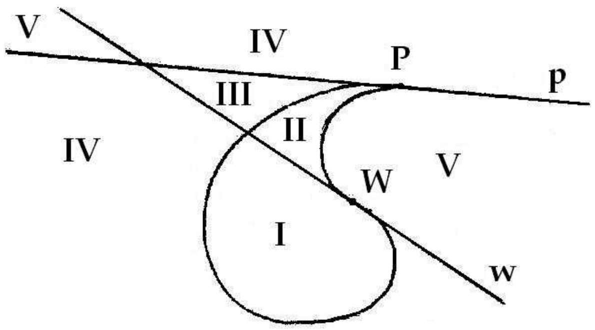
4.6 Gliederung der Ebene durch eine Kurve

Aufgabe: Untersuche die gegebene Kurve danach, wie sie die Ebene als Punkt- und als Geradenfeld gliedert.

1. Beispiel



a) Gliederung der Ebene als Punktfeld (unter Punktaspekt):



I:	(1')
II:	(3')
III:	(5')
IV:	(3')
V:	(1')

Die größte Anzahl der Geraden, welche die Kurve durch einen Punkt senden kann, ist **fünf**. Es ist daher eine Kurve **5. Klasse**.

b) Gliederung der Ebene als Geradenfeld (unter Geradenaspekt):

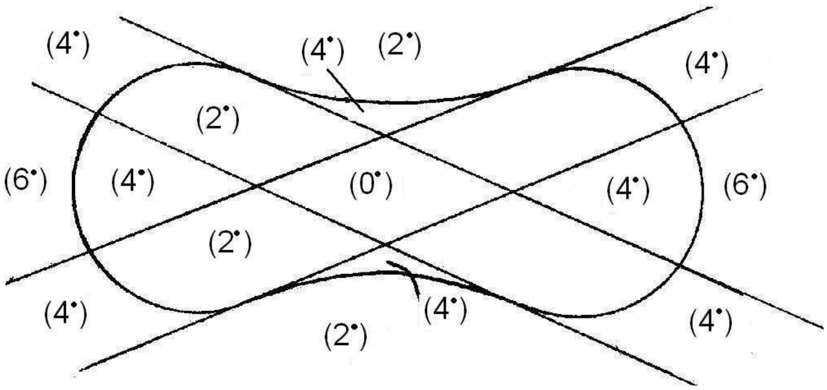
Es gibt folgende Bereiche: (0'), (2') und (4').

Die größte Anzahl der Punkte, welche die Kurve mit einer Geraden gemeinsam haben kann, ist **vier**. Es ist daher eine Kurve **4. Ordnung**.

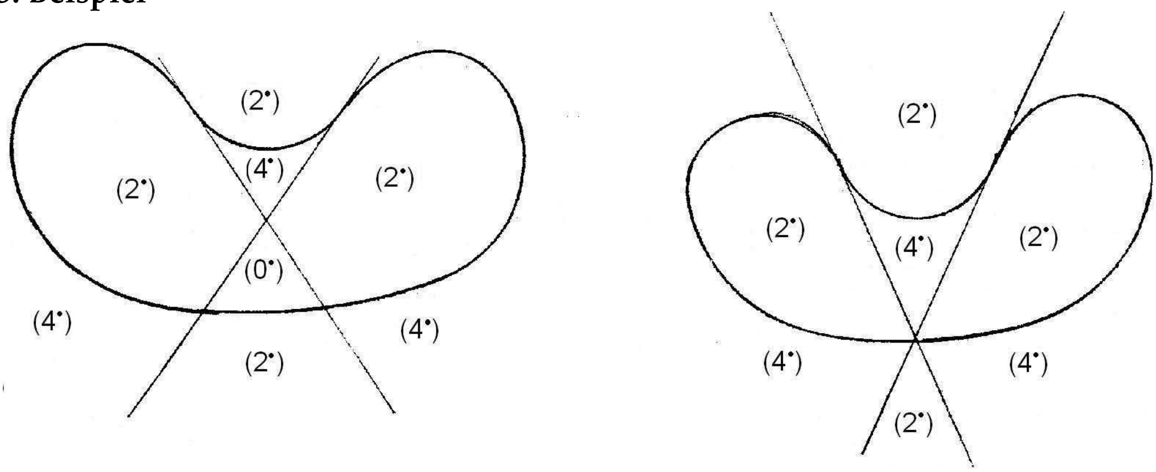
Unsere Beispielkurve ist von 4. Ordnung und 5. Klasse

2. Beispiel

Diese Kurve ist von 4. Ordnung und 6. Klasse



3. Beispiel



Diese Kurven sind Varianten einer Kurve 4. Ordnung und 4. Klasse

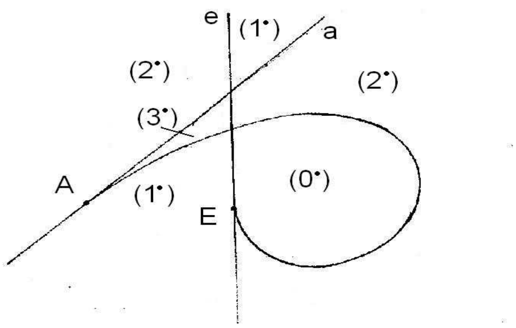
Anmerkung: Eine Kurve 2. Ordnung ist immer auch von 2. Klasse. Bei höherer Ordnung können Ordnung und Klasse auch verschieden sein.

Übung:

Bestimme die Gliederung der Spiralen im Punktfeld und im Geradenfeld.

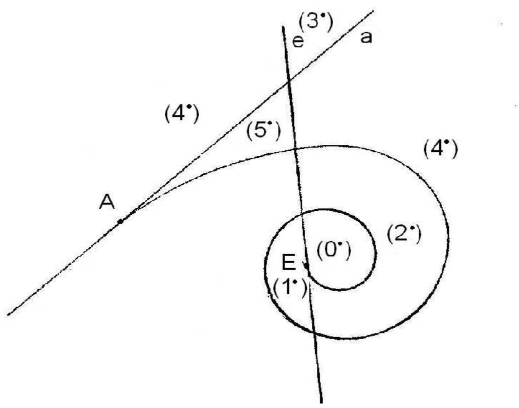
Gliederung im Punktfeld: Gliederung im Geradenfeld:

a)



(0′), (1′), (2′), (3′)

b)



(0′), (1′), (2′), (3′), (4′), (5′)