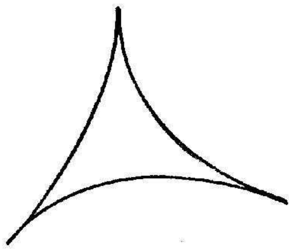
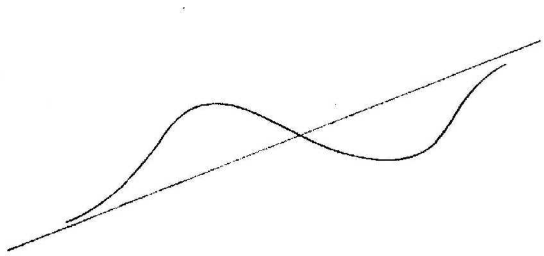
4.7 Übungsaufgaben

Polarisiere folgende Kurven (Formen):

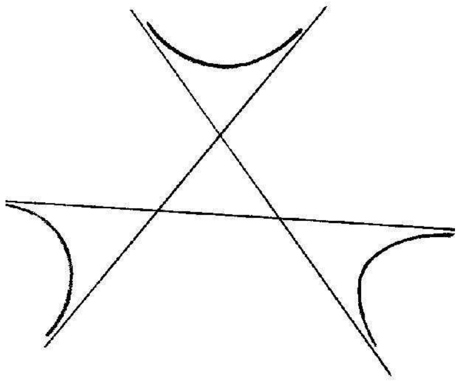
1.)



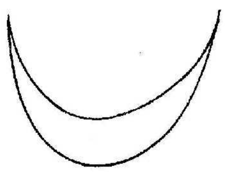


3 Dornspitzen		3 Wendestellen
kein ($0'$)		kein ($0'$)
($1'$) vorhanden	↔	($1'$) vorhanden
3. Klasse		3. Ordnung
4. Ordnung		4. Klasse

oder:



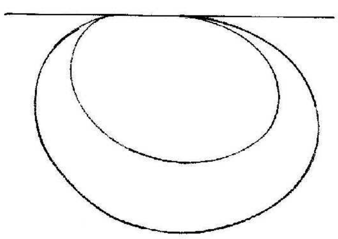
2.)

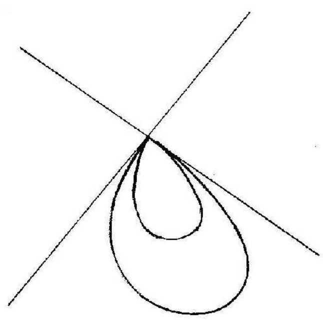


2 Schnabelspitzen		2 Schnabelspitzen
4. Ordnung	↔	4. Klasse
4. Klasse		4. Ordnung

Die Kurve ist **selbstpolar**

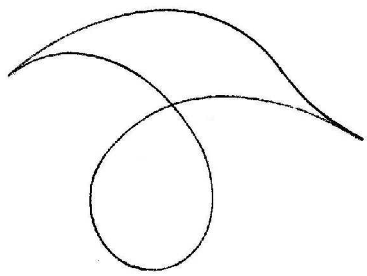
3.)





2 Schnabelspitzen mit		2 Schnabelspitzen mit
1 Doppeltangente	↔	1 Doppelpunkt

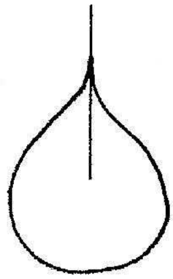
4.)

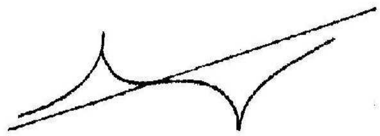


1 Doppelpunkt		1 Doppeltangente
1 Doppeltangente		1 Doppelpunkt
1 Wendestelle		1 Dornspitze
1 Dornspitze	↔	1 Wendestelle
1 Schnabelspitze		1 Schnabelspitze
6. Ordnung		6. Klasse
6. Klasse		6. Ordnung

Die Kurve ist **selbstpolar**

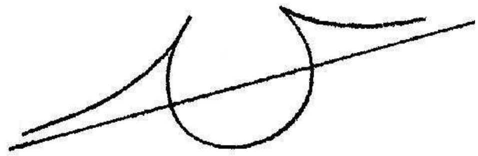
5.)



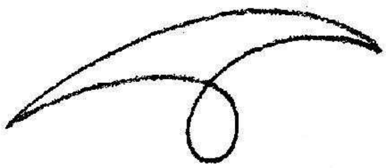


1 Dornspitze		1 Wendestelle
2 Wendestellen		2 Dornspitzen
kein (0′) Gebiet	↔	kein (0′)-Bereich
4. Ordnung		4. Klasse
3. Klasse		3. Ordnung

oder:



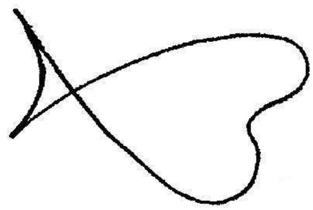
6.)



2 Schnabelspitzen		2 Schnabelspitzen
1 Doppelpunkt	↔	1 Doppeltangente
1 Doppeltangente		1 Doppelpunkt

Die Kurve ist **selbstpolar**

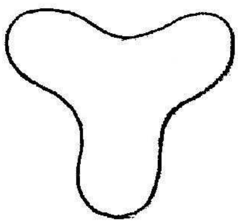
7.)

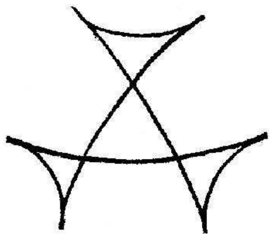


2 Dornspitzen 1 Doppelpunkt 2 Wendestellen 1 Doppeltangente	↔	2 Wendestellen 1 Doppeltangente 2 Dornspitzen 1 Doppelpunkt

Die Kurve ist **selbstpolar!**

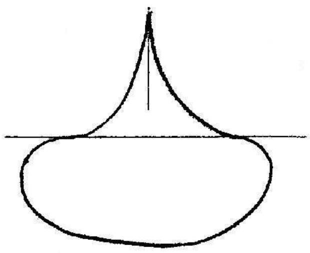
8.)

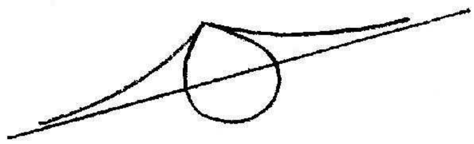




6 Wendestellen 3 Doppeltangenten	↔	6 Dornspitzen 3 Doppelpunkte

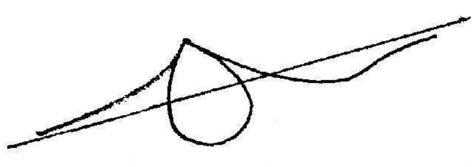
9.)





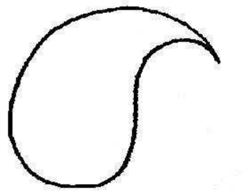
2 Wendestellen mit Doppeltangente 1 Dornspitze kein (0˙)-Gebiet (0′)-Bereich vorhanden	↔	2 Dornspitzen mit Doppelpunkt 1 Wendestelle kein (0′)-Bereich (0˙)-Gebiet vorhanden

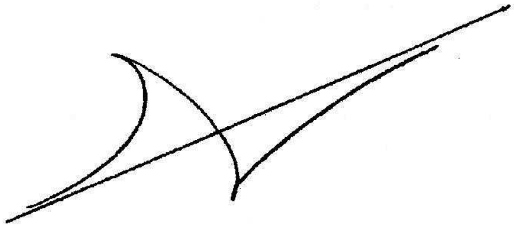
Ein Hinweis:



Bei dieser Variante gibt es kein (0˙)-Gebiet, daher keine Lösung!

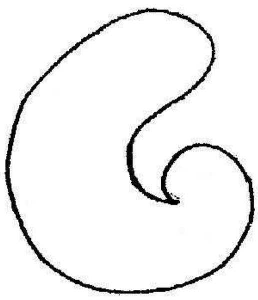
10.)

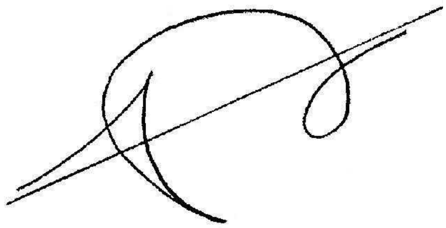




1 Wendestelle		1 Dornspitze
1 Schnabelspitze	↔	1 Schnabelspitze
kein (0')-Gebiet		kein (0′)-Bereich

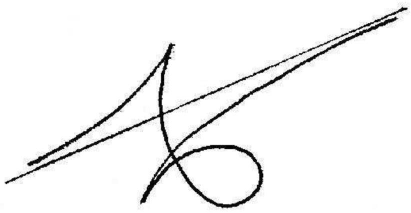
11.)



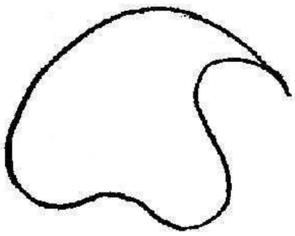


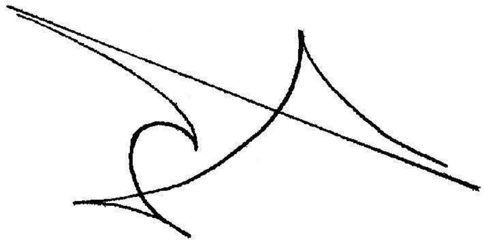
1 Wendestelle		1 Dornspitze
1 Schnabelspitze	↔	1 Schnabelspitze
2 Doppeltangenten		2 Doppelpunkte
kein (0')-Gebiet		kein (0′)-Bereich

oder:



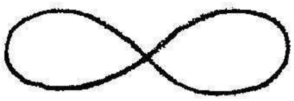
12.)

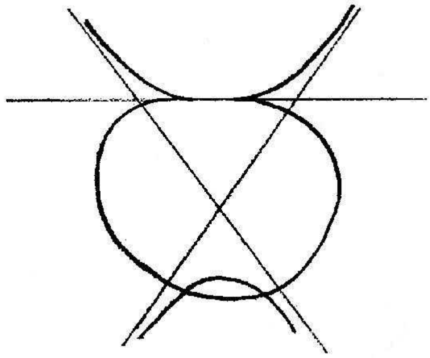




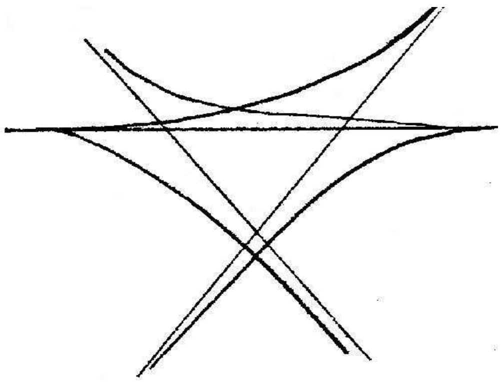
1 Schnabelspitze 3 Wendelstellen 1 Doppeltangente kein (0′)-Gebiet	↔	1 Schnabelspitze 3 Dornspitzen 1 Doppelpunkt kein (0′)-Bereich

13.)



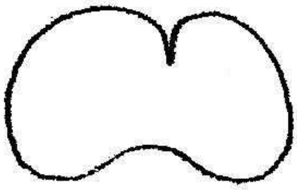


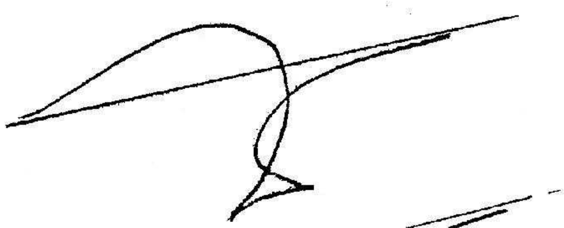
oder:



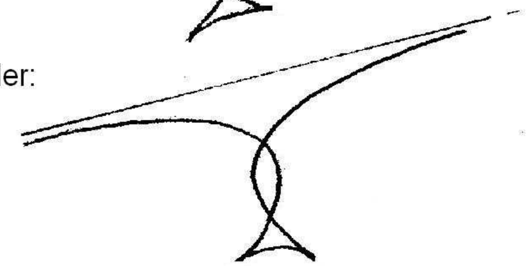
2 Wendestellen im Doppelpunkt 2 Doppeltangenten kein (0′)-, (1′)-Gebiet	↔	2 Dornspitzen mit Doppeltangente 2 Doppelpunkte kein (0′)-, (1′)-Bereich

14.)





oder:

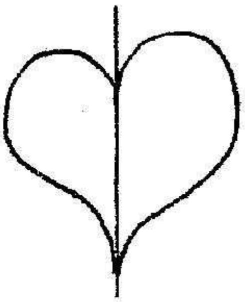


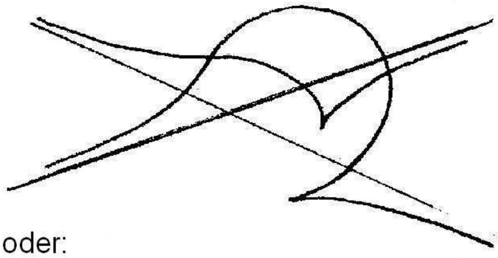
2 Wendestellen
2 Doppeltangenten
1 Dornspitze
kein (0')-Gebiet

↔

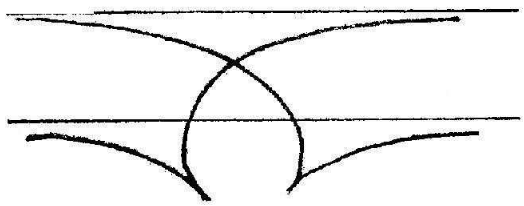
2 Dornspitzen
2 Doppelpunkte
1 Wendestelle
kein (0′)-Bereich

15.)





oder:

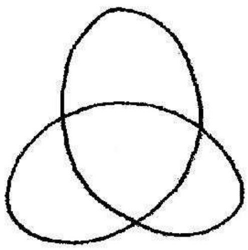


2 Dornspitzen mit Doppeltangente
1 Doppeltangente
2 Wendestellen
kein (0')-, (1')-Gebiet

↔

2 Wendestellen mit Doppelpunkt
1 Doppelpunkt
2 Dornspitzen
kein (0′)-, (1′)-Bereich

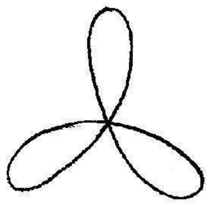
16) a)

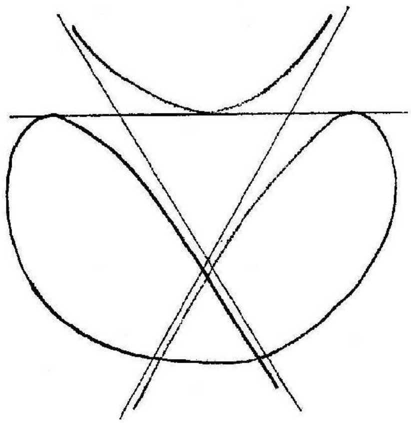


3 Doppeltangenten ↔ 3 Doppelpunkte
3 Doppeltpunkte 3 Doppeltangenten

Die Kurve ist selbstpolar

b)



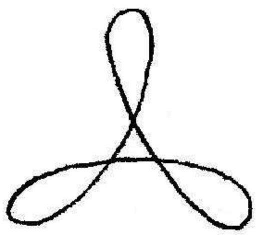


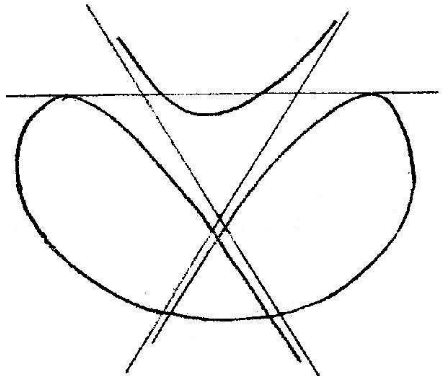
1 Dreifachpunkt
3 Doppeltangenten
kein (0')-, (1')-
Gebiet

↔

1 Dreifachtangente
3 Doppelpunkte
keine (0′), (1′)-
Bereich

c)



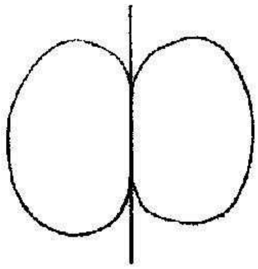


3 Doppelpunkte
3 Doppeltangenten
kein (0')-, (1')-Gebiet

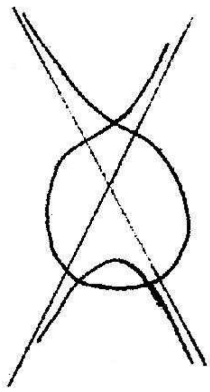
↔

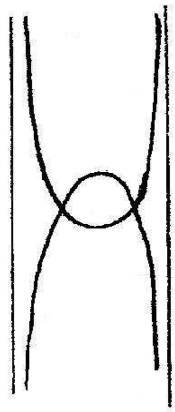
3 Doppeltangenten
3 Doppelpunkte
kein (0′)-, (1′)-Bereich

17 a)



↔



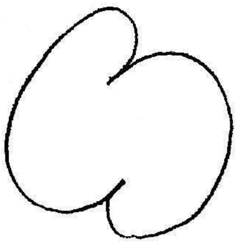


2 Doppeltangenten ↔ 2 Doppelpunkte

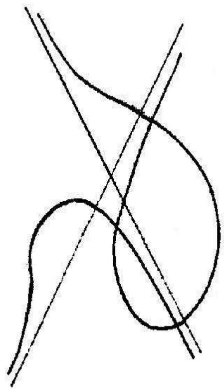
1 Doppeltangente mit 2 Dornspitzen ↔ 1 Doppelpunkt mit 2 Wendestellen

kein $(0')$-, $(1')$-Gebiet ↔ kein $(0')$-, $(1')$-Bereich

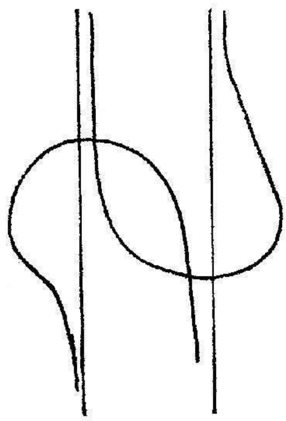
b)



↔



oder:



2 Dornspitzen ↔ 2 Wendestellen

3 Doppeltangenten ↔ 3 Doppelpunkte

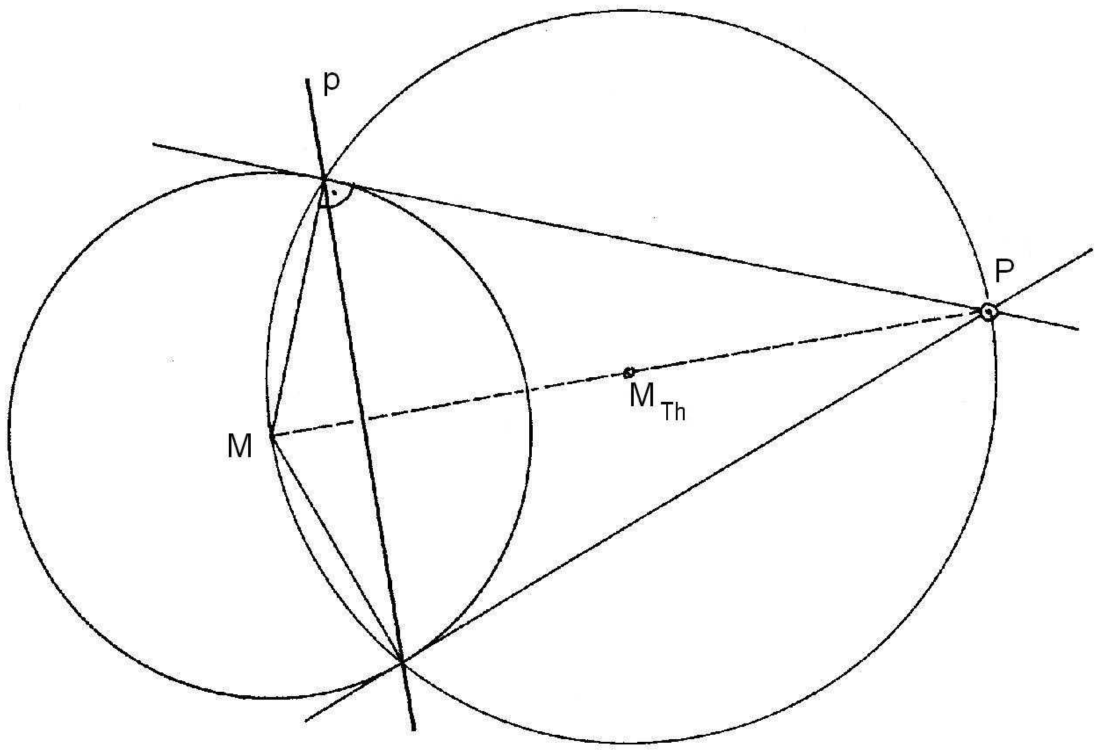
5. Polarreziproke Verwandlungen

5.1 Pol und Polare in Beziehung zu Kreiskurven (Kurven zweiter Ordnung)

Durch eine Kreiskurve wird das Punktfeld in zwei Gebiete gegliedert: in ein (2˙)- und ein (0˙)-Gebiet, und das Geradenfeld in zwei Bereiche: in einen (2′)- und einen (0′)-Bereich.

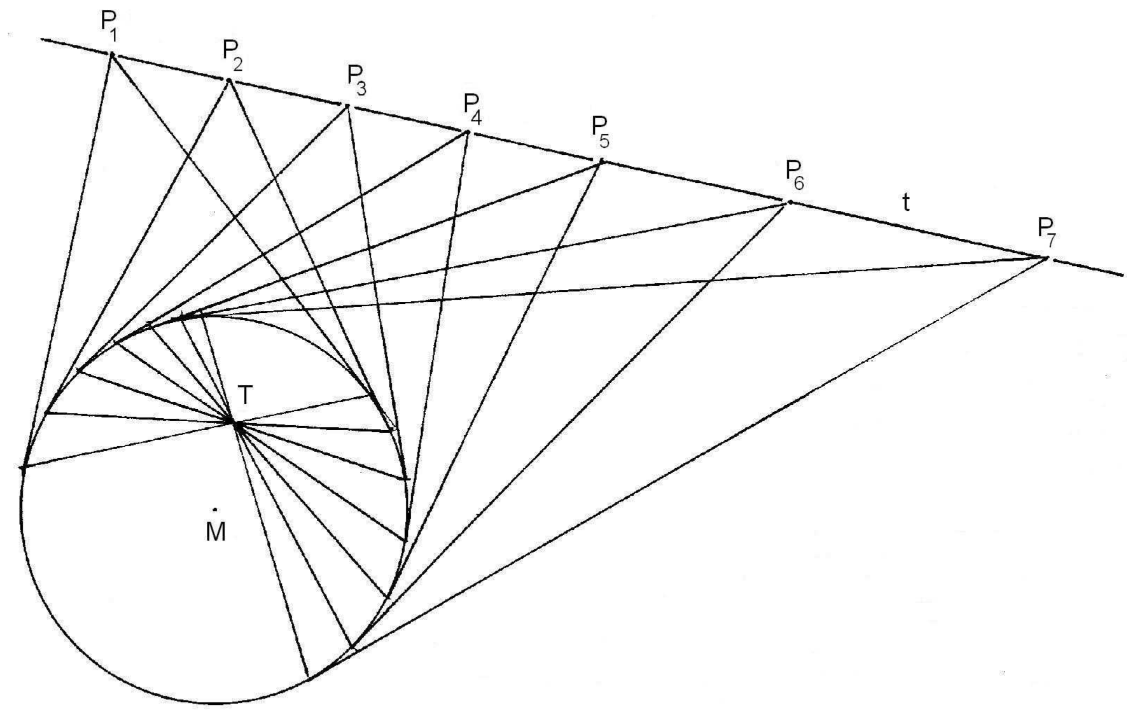
> Durch die Beziehung **Pol** – **Polare** gehört zu jeder Geraden des (2′)-Bereiches ein Pol. Oder anders formuliert: zu jedem Punkt des (2˙)-Gebietes gehört eine Polare.

(Für alle folgenden Zeichnungen wird als Kreiskurve der Kreis gewählt. Die Konstruktionen sind dann mit Zirkel und Geodreieck durchführbar. Alle Aussagen gelten aber auch für alle Kreiskurven: Ellipse, Parabel, Hyperbel.)



P = Pol, p = Polare, M_{Th} = Mittelpunkt des Thaleskreises

Wir stellen uns die Frage: Wie verhält sich die Polare, wenn der Pol sich in einer Geraden bewegt?

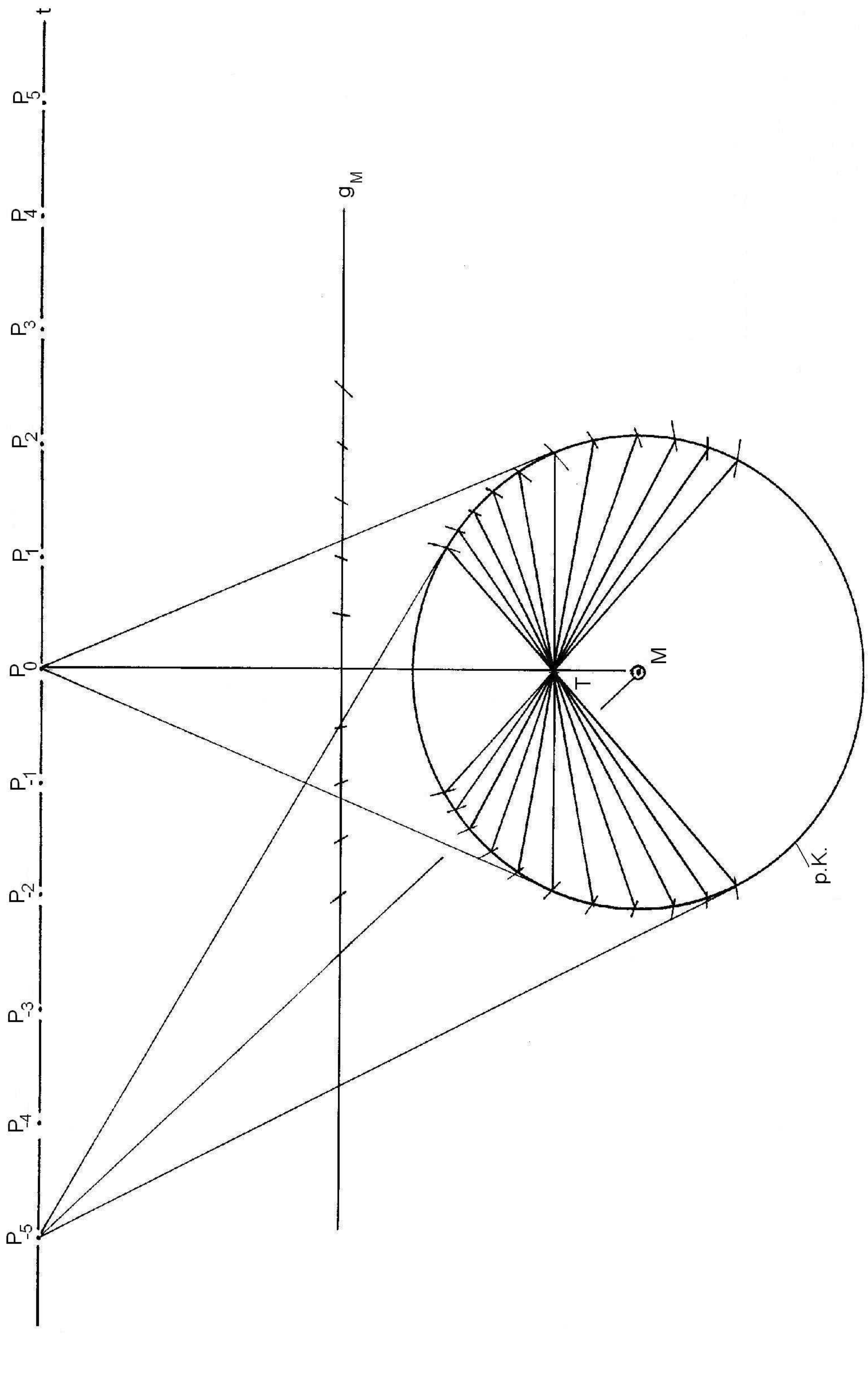


Diese Zeichnung zeigt uns, was wir auf Grund des Polaritätsgesetzes erwarten: Durchläuft der **Pol** eine **Punktreihe**, so durchläuft die **Polare** ein **Geradenbüschel**. Träger der Punktreihe ist die Gerade t, Träger des Geradenbüschels ist der Punkt T. T und t haben somit eine polare Beziehung: **T ist der Pol der Polaren t.**

Die Beziehung zwischen Pol und Polare ist umkehrbar (reziprok): Ist der Pol im (2˙)-Gebiet, durchsetzt die Polare die Kreiskurve, sie ist im (2′)-Bereich. Befindet sich der Pol im (0˙)-Gebiet, gehört die zugehörige Polare dem (0′)-Bereich an.

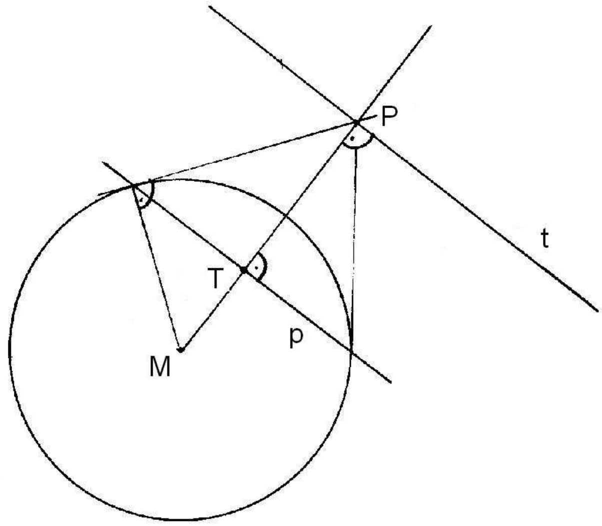
Zur Konstruktion auf der nächsten Seite:
Die Polaren p_i zu den Punkten P_i der Geraden t können mit Hilfe der Thaleskreise gezeichnet werden (s.o.). g_M ist der geometrische Ort der Mitten aller Zentralen P_iM, also der Mittelpunkte der Thaleskreise. Von diesen Thaleskreisen sind nur kleine Bögen (Schnitte mit dem Kreis p.K.) zu zeichnen. Durch Verbinden der Schnittpunkte hat man die Polaren rasch und genau.

Konstruiere zu den Punkten …; P_{-2}; P_{-1}; P_0; P_1; P_2; … der Geraden t die Polaren bezüglich des Kreises p.K.



Aufgabe: Wie findet man zu einem Pol T im Kreisinnern die zugehörige Polare?

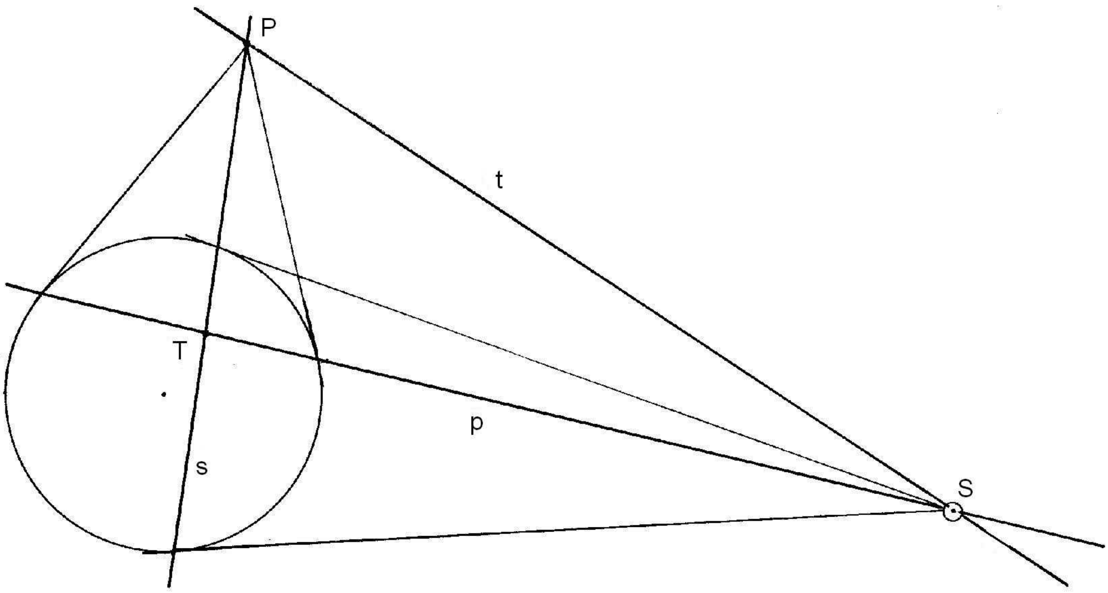
Lösung: (unter Verwendung der Symmetrie am Kreis):



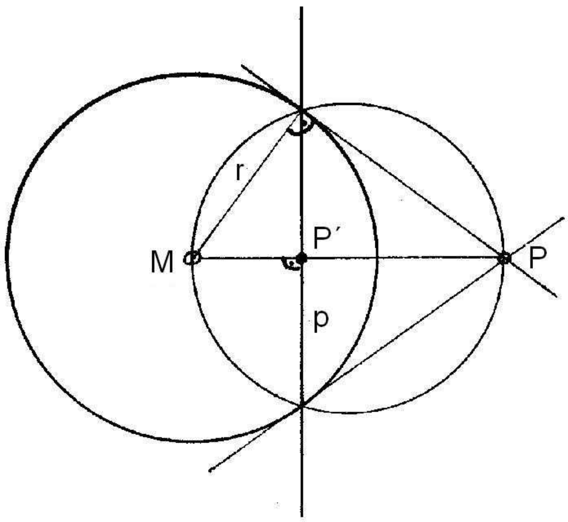
Diese Konstruktion lässt uns die Beziehung zwischen einem Pol P außerhalb und einem Pol T auf der Polaren p erkennen:
Liegt T in p, so geht t durch P.

Der gefundene Zusammenhang lässt sich erweitern zum „selbstpolaren Dreieck“:

Liegt ein Pol S in der Polaren p, so geht seine Polare s durch den Pol P. Der Schnittpunkt T von s und p ist Pol zur Verbindungsgeraden von S und P. Das entstandene Dreieck ist gleichzeitig ein „**Poldreieck**“ und ein „**Polarendreiseit**“.



Ergänzung zur Konstruktion der Polaren t, wenn der Pol T im Kreis liegt.



Nach dem Kathetensatz gilt:

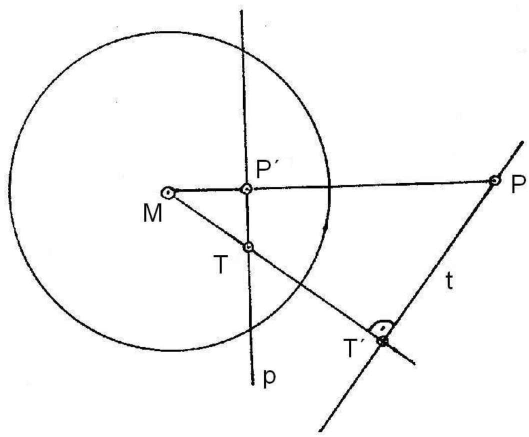
$\overline{MP'} \cdot \overline{MP} = r^2$

$\rho_1 \cdot \rho_2 = r^2$

Man wähle im Kreisinneren T in p: t muss dann senkrecht $\overline{MT}$ sein. Es soll gezeigt werden, dass t durch P geht:

Mit $\overline{MT} = r_1$ und $\overline{MT'} = r_2$
Muss auch hier gelten:
$r_1 \cdot r_2 = r^2$

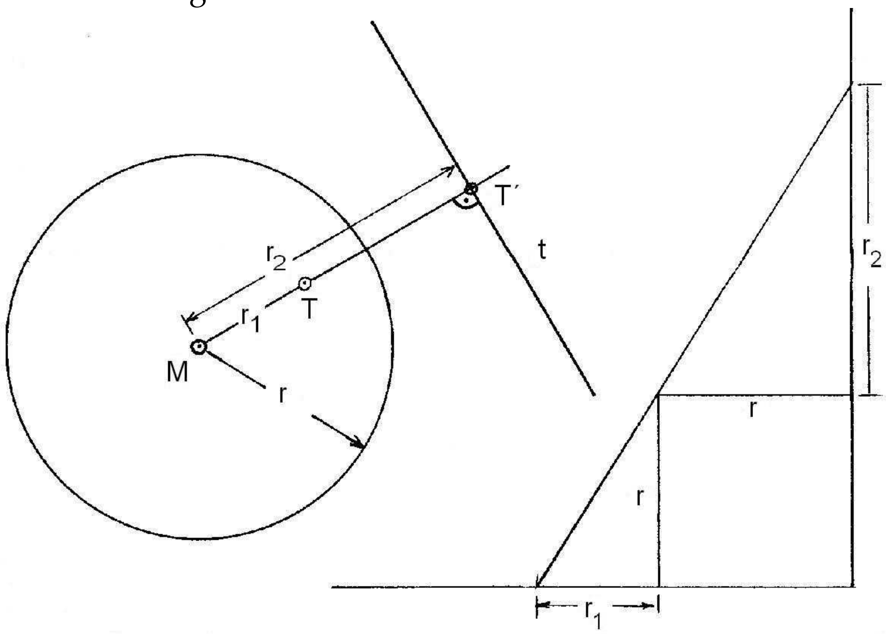
$\Delta\ MTP' \sim \Delta\ MT'P$
und somit ergibt sich:
$\dfrac{\overline{MT}}{\overline{MP'}} = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{MT'}}$ – das ist:
$\dfrac{r_1}{\rho_1} = \dfrac{\rho_2}{r_2} \Rightarrow$
$r_1 \cdot r_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 = r^2$



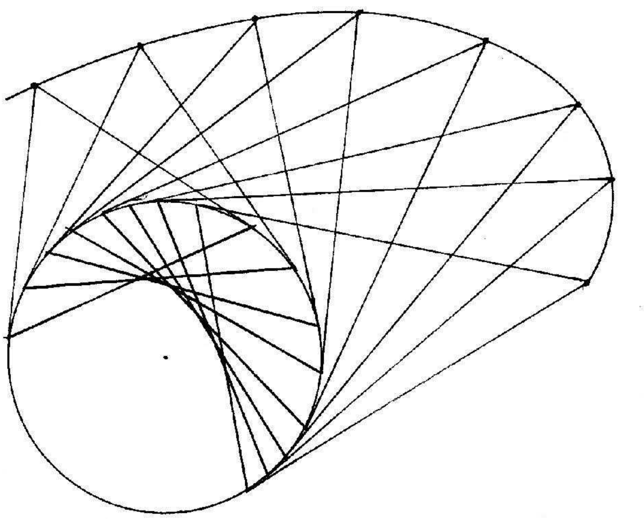
Somit ist gezeigt, dass t durch P geht.

Aus der Beziehung $r_1 \cdot r_2 = r^2$ kann man folgende Konstruktion der äußeren Polaren gewinnen:

Man trage $\overline{MT} = r_1$ auf der unteren Hilfsfigur ab und man erhält entsprechend der Hilfszeichnung r_2 [In der Hilfsfigur gilt: $r_1 : r = r : r_2 \rightarrow r_1 \cdot r_2 = r^2$]
r_2 wird mit dem Zirkel übernommen und von M über T abgetragen: T´. Nun kann man rechtwinklig zu MT die Polare t zeichnen.



Eine interessante Fragestellung: Bewegt sich ein Pol außerhalb der Kreislinie auf einer gekrümmten Linie, was entsteht dann aus dem Polaren-Geradenbüschel im Inneren der Kreislinie?
Die Antwort muss lauten: Nach dem Polaritätsgesetz entspricht dem Krümmen einer Punktreihe das Auflösen eines Geradenbüschels. Und dies erwarten wir auch von unserer Konstruktion:

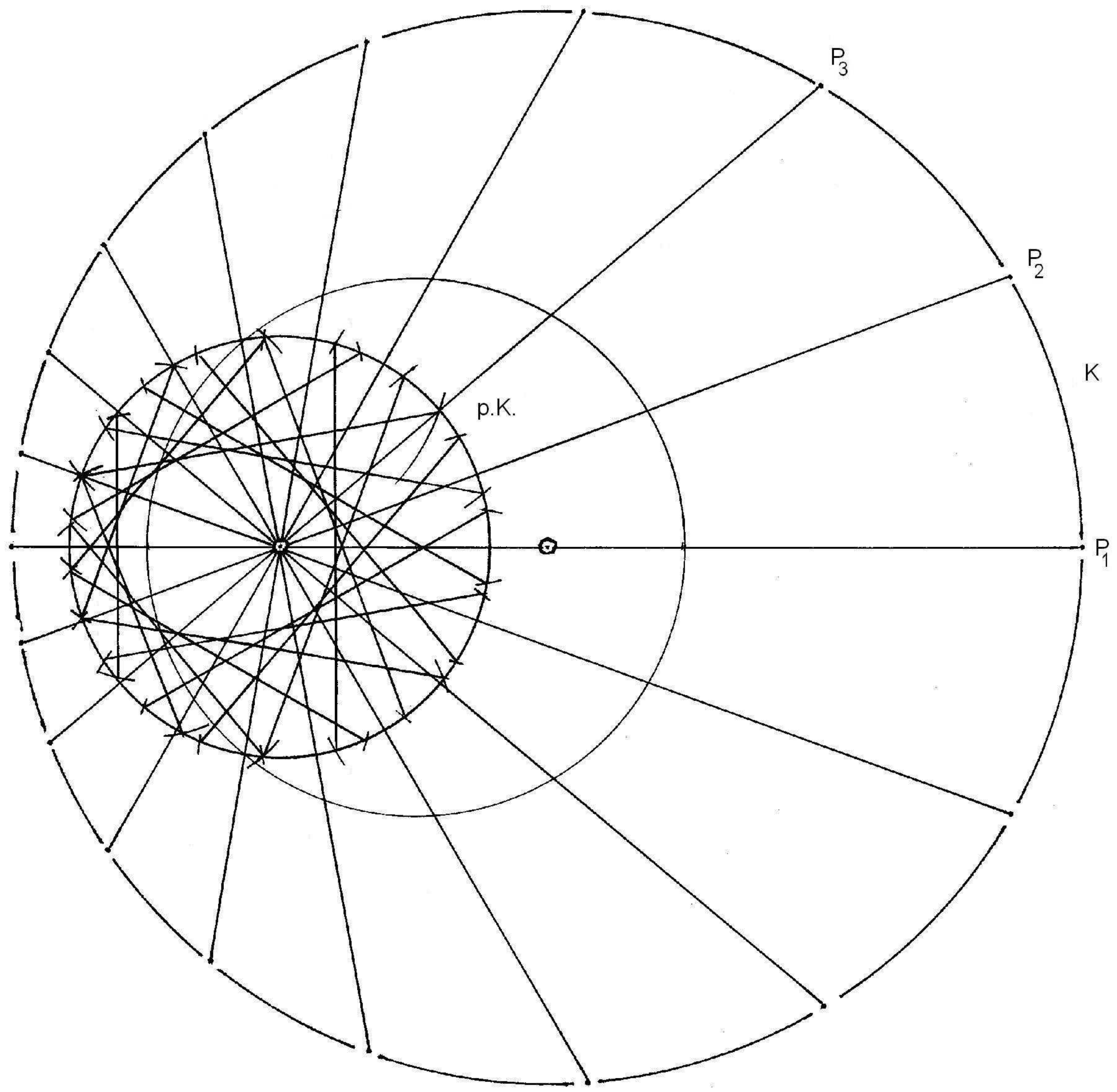


Wir erkennen: Beschreibt der Pol eine Kurve (als Punktgebilde), so beschreibt seine Polare eine Gegenkurve (als Geradengebilde, Hüllkurve). Dies gilt auch dann, wenn das Punktgebilde im Inneren der Kreiskurve verläuft und die Polaren außerhalb derselben sind.

Durch diese fundamentale Beziehung kann man zu jeder Kurve ihre polare Kurve (Gegenkurve) konstruieren. Die Kreiskurve (im weitesten Sinne) ist der Mittler zwischen diesen beiden polaren Formen.

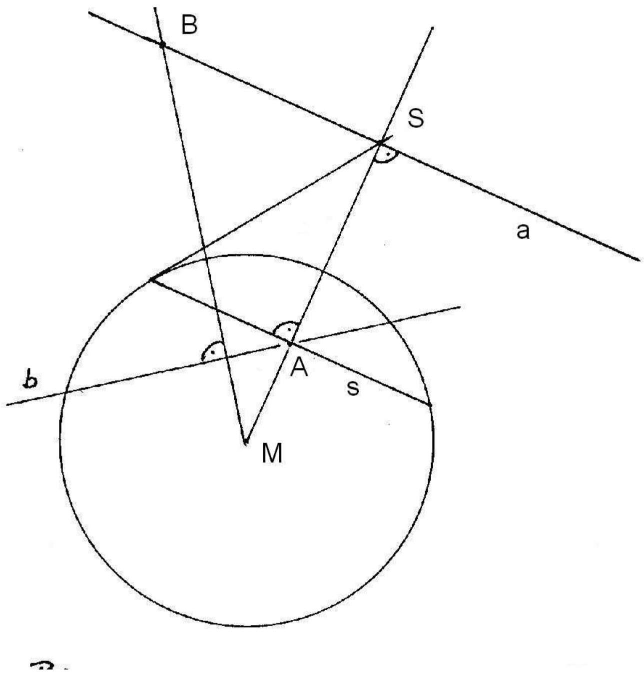
5.2 Konstruktion von polaren Kurven

Das folgende Beispiel zeigt die Durchführung der Konstruktion einer Hüllkurve: Die Gegenform des Kreises K ist als Hüllkurve der Polaren p_i von den einzelnen Kreispunkten P_i entstanden. p.K. ist der polarisierende Kreis. Die Konstruktion wird mit Hilfe der Thaleskreise ausgeführt. K_M ist der geometrische Ort der Mitten der Zentralen MP_i, also der Mittelpunkte der Thaleskreise. Von diesen Thaleskreisen werden nur kleine Bögen gezeichnet. Durch Verbinden der Schnittpunkte erhält man die Polaren genau, die die Gegenform, die **polare** Kurve einhüllen.



Ein Hinweis zur Konstruktionsdurchführung beim Polarisieren eines Kurvenpunktes und seiner Tangente:

Gegeben: Das Kurvenelement A* b

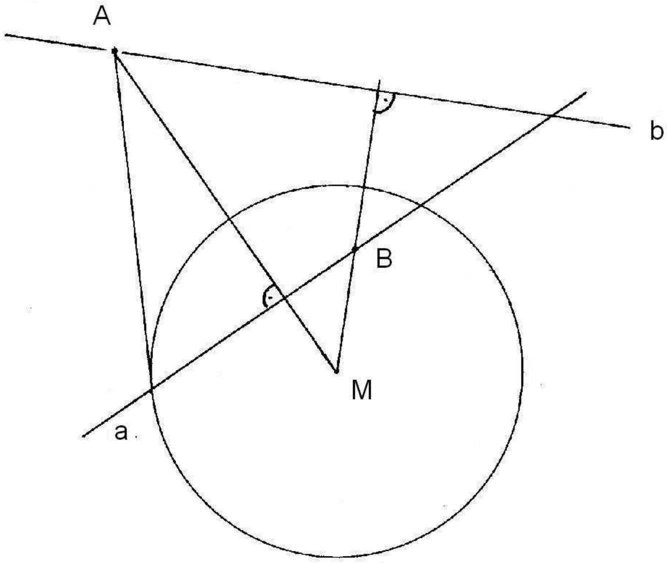


1. Zuerst wird zum Punkt A die Polare a konstruiert (Dazu: Zentrale MA; in A s⊥ MA; s schneidet K in C; Kreistangente in C schneidet MA in S; Lot in S bezüglich MA: Polare a)

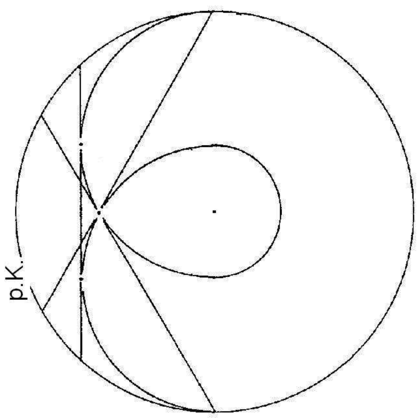
2. Von M das Lot auf b fällen. Dieses schneidet die Polare a im Pol B der Polaren b. (Zur Erinnerung: geht die Polare b durch den Pol A, dann liegt der Pol B in der Polaren a – Dualitätsprinzip!)

B* a ist das polare Element zu A* b

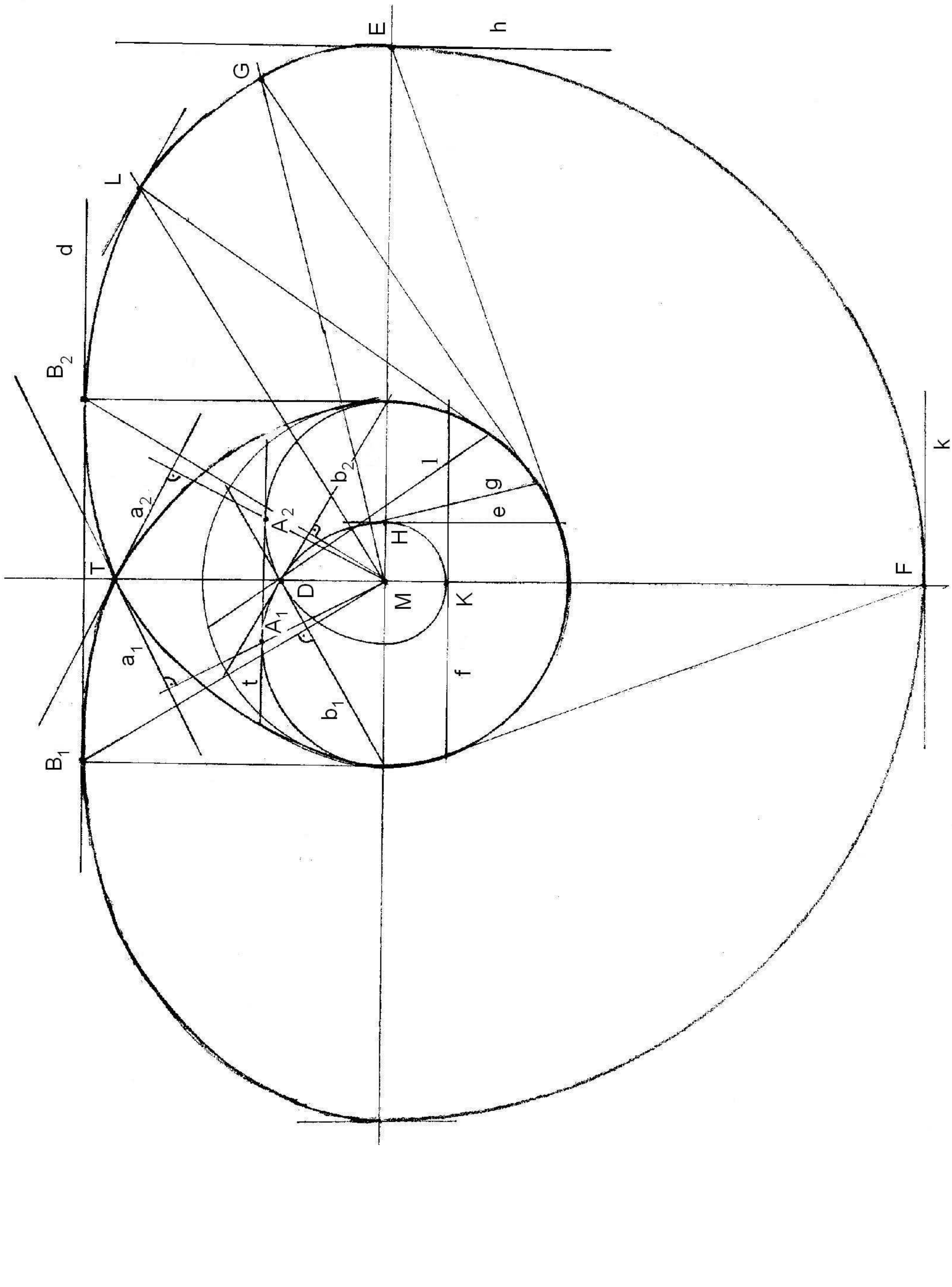
Entsprechend wird die Konstruktion durchgeführt, wenn das Kurvenelement A* b außerhalb des Kreises liegt.



Polarisiere die innere „Kreiskurve“ an dem polarisierenden Kreis



Lösung:



Polarisiere die gezeichnete Kurve am polarisierenden Kreis p.K.