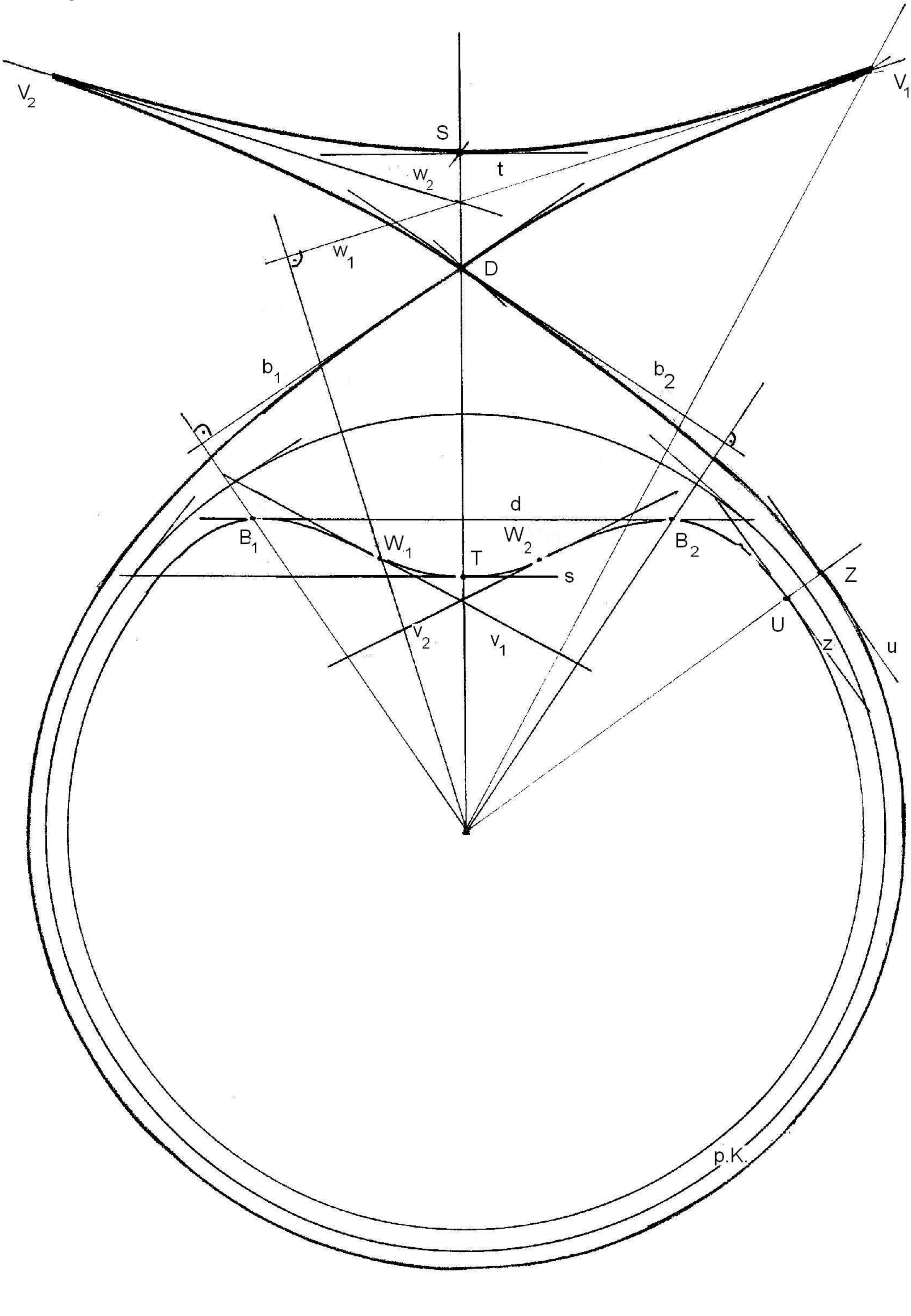
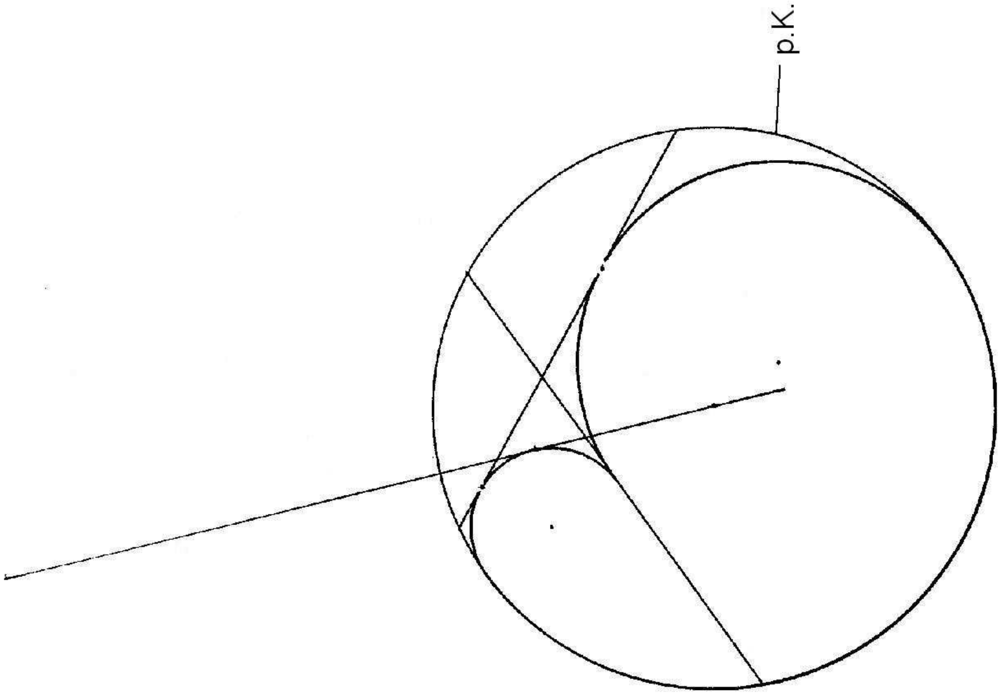
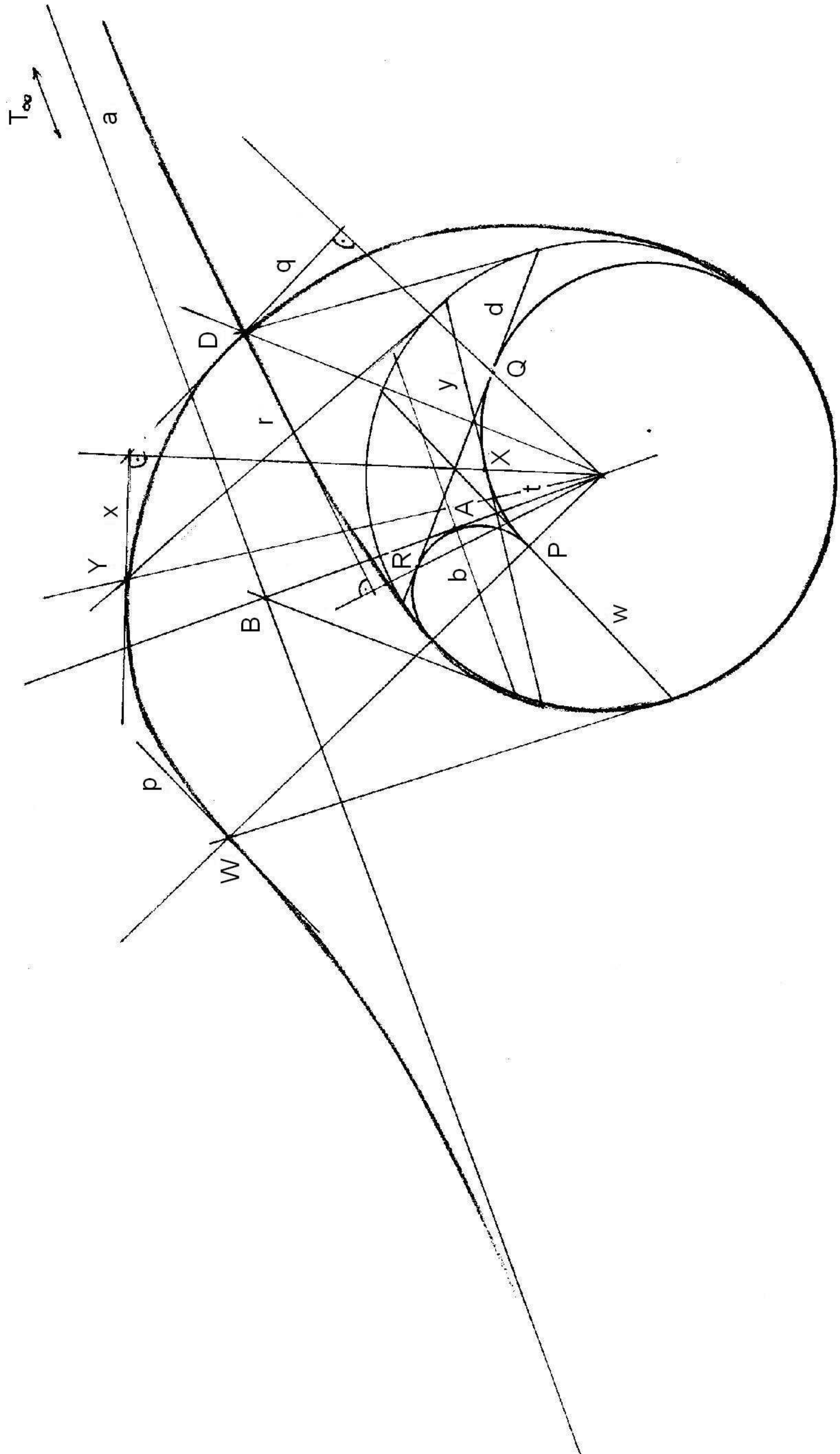
Lösung:



Polarisiere die gezeichnete Kurve am Kreis p.K



Lösung:



6. Auflösen eines Doppelpunktes und einer Doppeltangente

Die Gestalt ist ein Bewegliches, ein Werdendes, ein Vergehendes. Gestaltlehre ist Verwandlungslehre. Die Lehre der Metamorphose ist der Schlüssel zu allen Zeichen der Natur.

Johann Wolfgang Goethe

Bogenteile durch einen kleinen Wollen wir nun Formverwandlungen, Formmetamorphosen durchführen, so ist dabei das **Auflösen** von Doppelpunkten und Doppeltangenten ein grundsätzliches Hilfsmittel.

Jeder Doppelpunkt einer Elementarkurve entsteht durch Kreuzen zweier einfacher Bögen. Es entstehen dabei stets vier Ecken A, B, C und D (Figur 1). Jede dieser Ecken können wir abrunden, indem wir die zwei eine Ecke bildenden Bogen verbinden. Dabei haben wir drei Möglichkeiten:

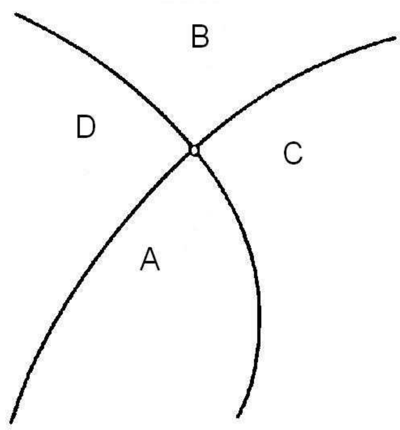


Fig. 1

1. Die **reguläre Ecke**. Runden wir die Ecke A ab, so schließt der Rundungsbogen an beide Bogenteile regulär an (Figur 2).
2. Die **Dornecke**. Runden wir die Ecke B ab, so müssen wir an beiden Bogenteilen jeweils durch eine Wendestelle anschließen (Figur 3).
3. Die **Wendeecke**. Die beiden Ecken C und D werden dadurch gerundet, dass an einem Bogenteilein regulärer Anschluss möglich ist und an dem anderen Bogenteil durch eine Wendestelle. (Figur4).

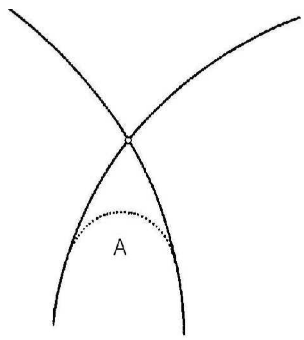


Fig.2: „reguläre Ecke"

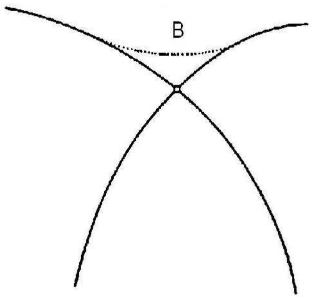


Fig. 3: „Dornecke"

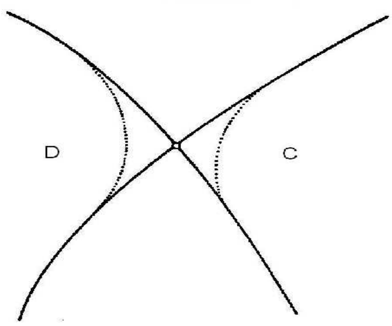


Fig. 4: „Wendeecke

Der zum Auflösen eines Doppelpunktes **polare** Vorgang ist das Auflösen einer Doppeltangente. Dies geschieht durch **Runden von Strecken**:

1. Die **reguläre Strecke**. Hierbei wird die Doppeltangente durch einen einfachen Bogen überbrückt, der sich beidseitig an die Kurve regulär anschließt (Figur 5). Der Überbrückungsbogen kann sich auch über das Unendliche erstrecken (Figur 6).

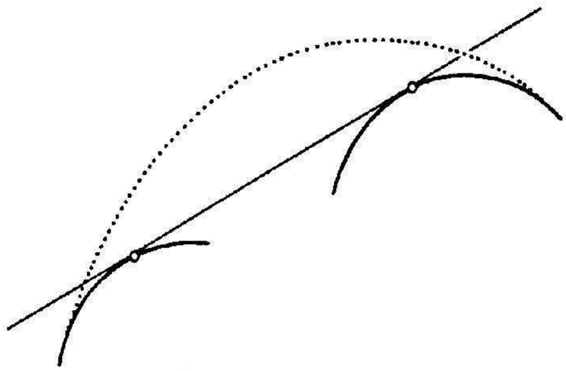


Fig. 5

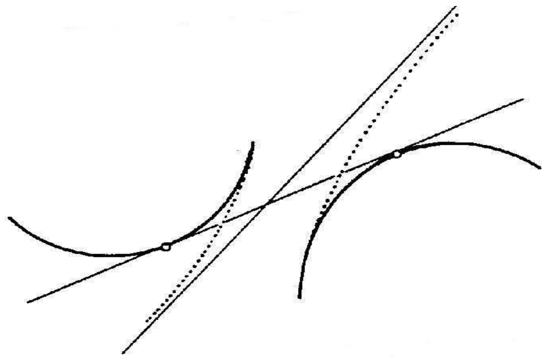


Fig. 6

2. Die **Wendestrecke**. Die Doppeltangente wird durch einen Bogen überbrückt, der an beiden Enden singulär anschließt und somit zwei Dornspitzen bildet (Figur 7). In Figur 8 erfolgt die Überbrückung über das Unendliche.

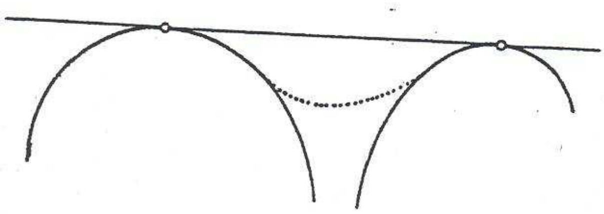


Fig. 7

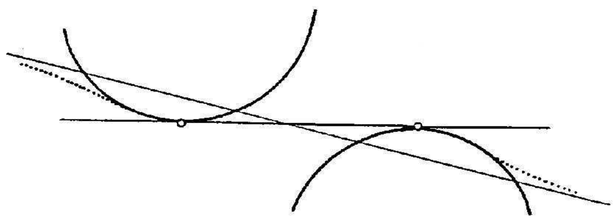


Fig. 8

3. Die **Spitzenstrecke**. Hier schließt sich der Überbrückungsbogen an einem Ende regulär und am anderen Ende singulär an die Kurve an (Figur 9). In Figur 10 erfolgt die Überbrückung über das Unendliche.

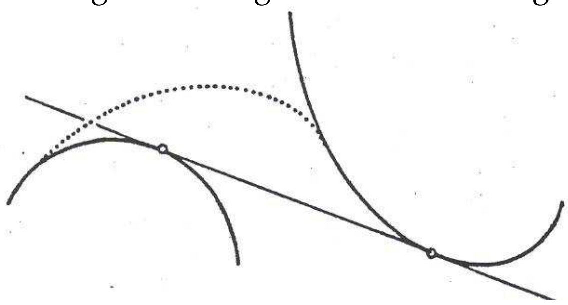


Fig. 9

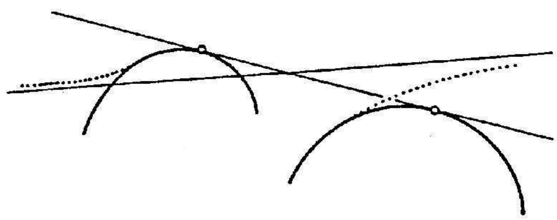


Fig. 10

Ein Doppelpunkt wird **symmetrisch** aufgelöst, indem beide Wendeecken abgerundet werden (Figur 11). Unter **unsymmetrischem** Auflösen verstehen wir das Runden der regulären Ecke und der Dornecke (Figur 12).

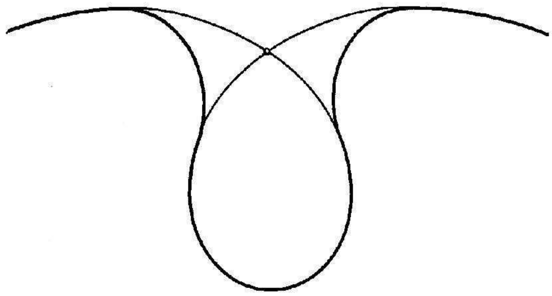


Fig. 11 (symmetrisch)

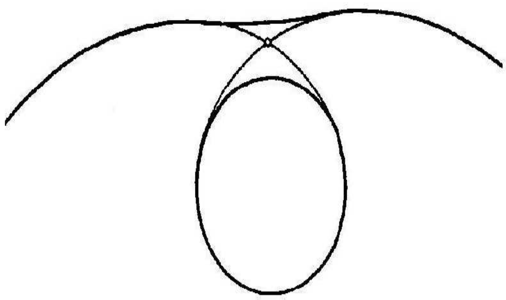


Fig. 12 (unsymmetrisch)

Durch das Auflösen der Doppelpunkte wird die Ordnung der Kurve nicht erhöht.

Unter der **symmetrischen** Auflösung einer Doppeltangente verstehen wir das Runden der beiden Spitzenstrecken (Figur 13). Das **unsymmetrische** Auflösen besteht im Runden der regulären Strecke und der Wendestrecke (Figur 14).

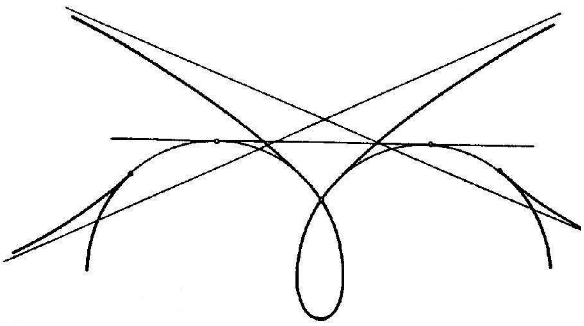
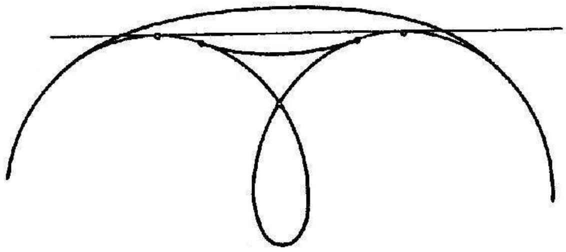


Fig.13 (symmetrisch)



Figur 14 (unsymmetrisch)

Durch das Auflösen einer Doppeltangente wird die Klasse der Kurve nicht erhöht.

Übungen

Auf den folgenden Seiten lassen wir verschiedene Kurven vierter Ordnung und vierter Klasse durch Auflösen (Runden von Ecken bzw. Strecken) aus einer vorgegebenen Anordnung hervorgehen.

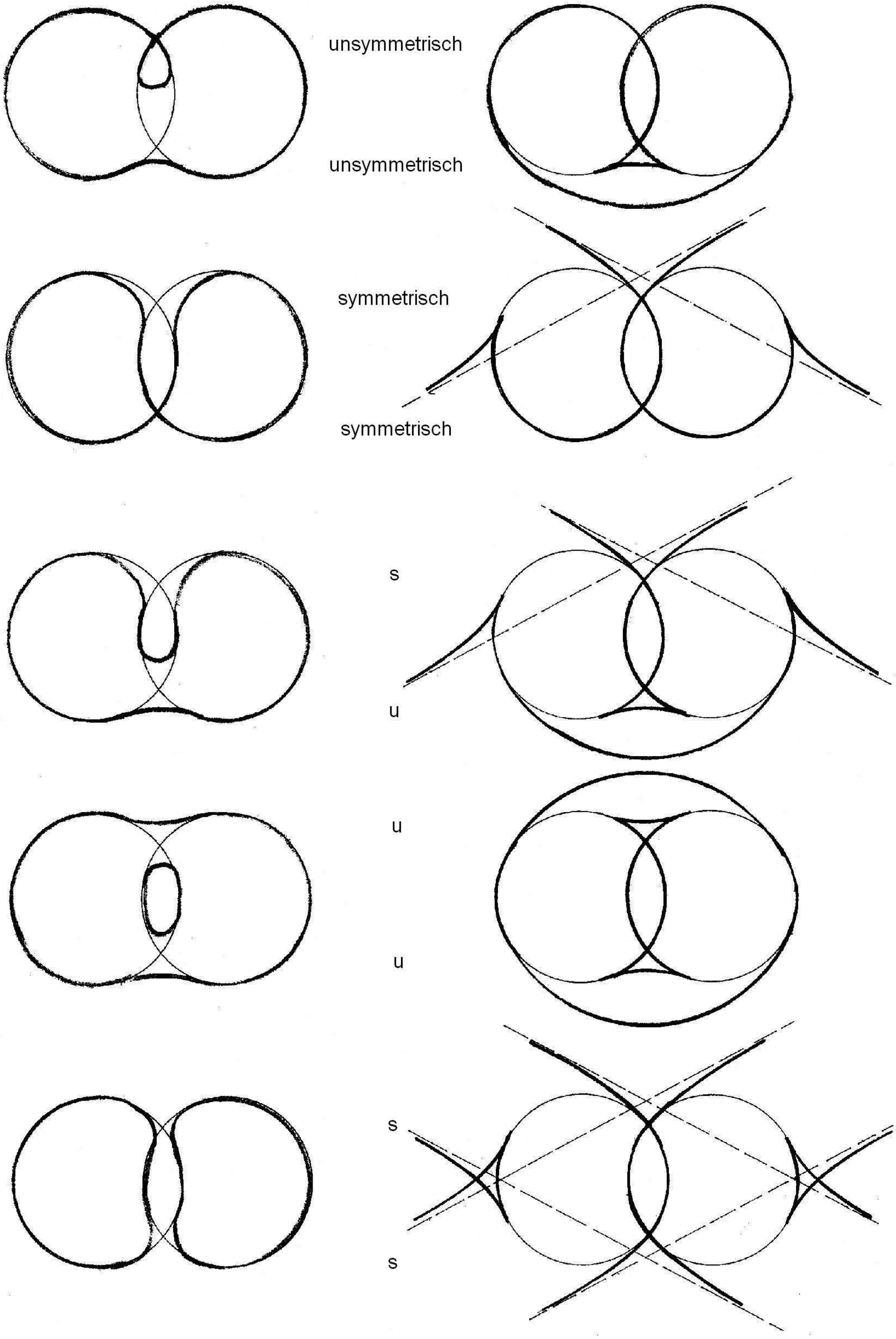
Das symmetrische und unsymmetrische Auflösen führen wir durch an:

1. Runden von Ecken an zwei Eilinien:
   a) zwei sich schneidenden Kreisen (Übung 1)
   b) Ellipsen und Hyperbel, die sich schneiden (Übung 3).

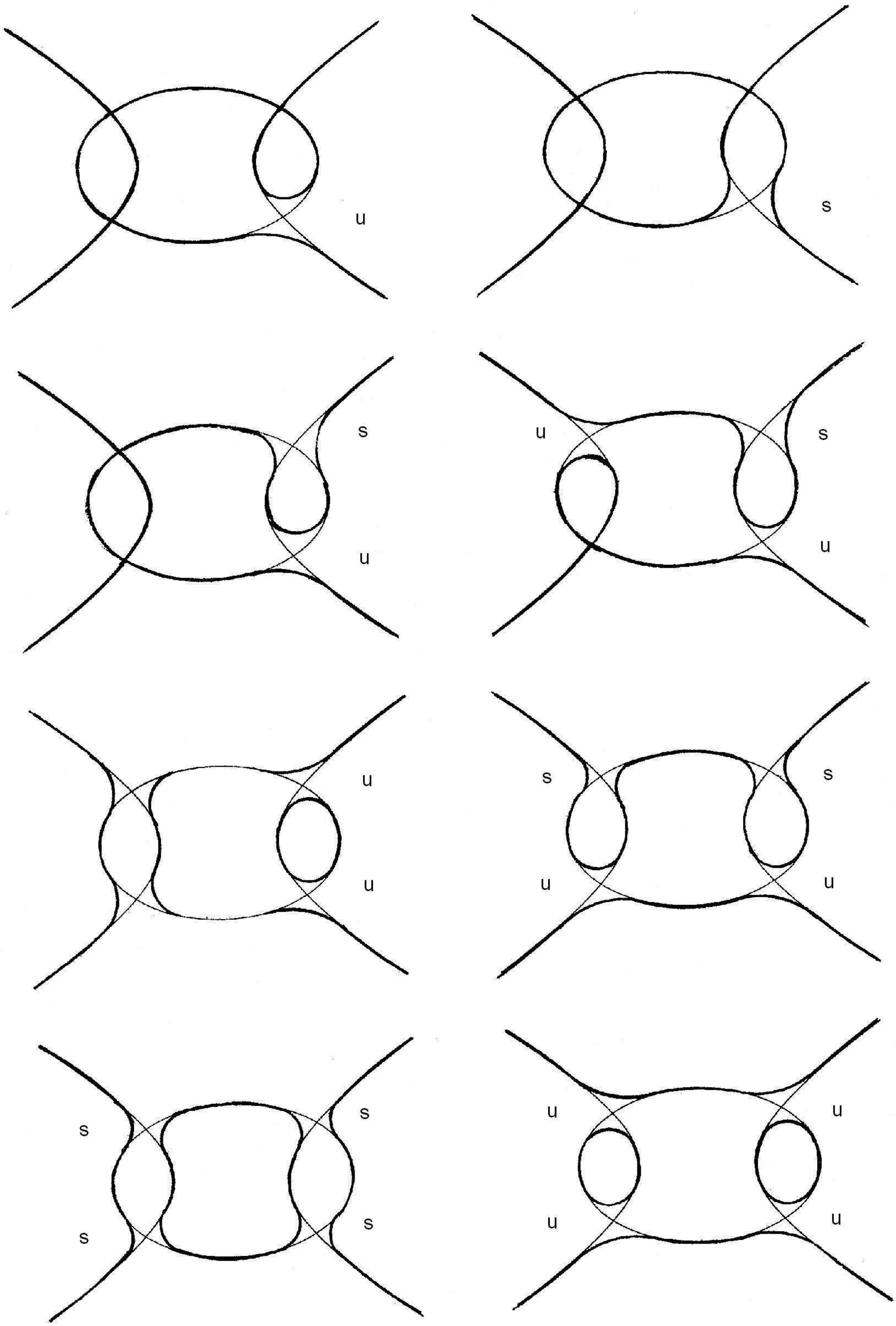
2. Runden von Strecken an:
   a) zwei sich schneidenden Kreisen (Übung 2)
   b) zwei sich meidenden Kreisen (Übung 4).

Übung 1:
Runden von Ecken

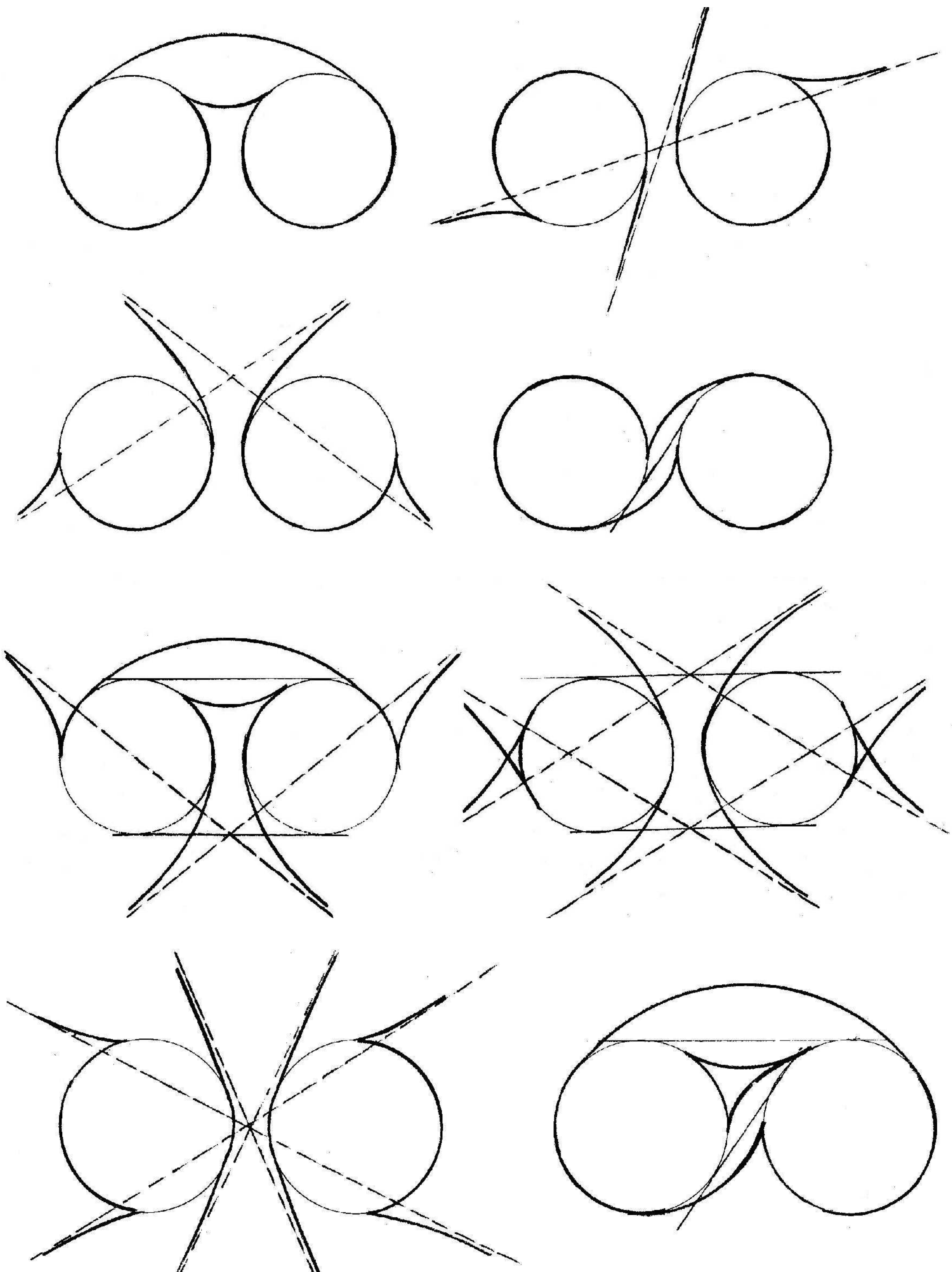
Übung 2:
Runden von Strecken



Übung 3: Runden von Ecken zweier sich schneidender Eilinien



Übung 4:
Runden von Strecken (Doppeltangenten) bei zwei sich meidenden Eilinien (Kreise)



und viele weitere Möglichkeiten!

7. Kurvenmetamorphosen

In diesem abschließenden Kapitel soll angeschaut werden, wie für eine Form, welche in bestimmter Weise durch aufeinander folgende Stadien eine Verwandlung erfahren soll, auch die Gegenform eine Verwandlungsreihe durchläuft. In Kapitel 3.7 haben wir schon für einzelne Formen die Gegenform gefunden, auch unter Berücksichtigung der Tatsache, dass jede Form ihr Umfeld gliedert. Da die Art dieser Gliederung Bestandteil der Form ist, muss sich dies entsprechend auf die Gegenform auswirken (z.B. eine Kurve 3. Ordnung, 4. Klasse hat eine Kurve 3. Klasse, 4. Ordnung als Gegenform).

Nun fragen wir uns, welche Veränderungen der Gestalt einer Kurve zu einer Verwandlung der Gegenkurve führen. Wir sehen: Treten bei der Verwandlung neue Singularitäten auf, wirkt sich dies zwingend auf die Gegenkurve aus. In diesem Fall kann sogar die geringste Veränderung einer Form zu einer vollständigen Verwandlung der Gegenform führen.

Zeichnet man zwei Kurven, die einander so verwandt sind, dass sie als ganz offensichtlich auseinander hervorgegangen gedacht werden können, so ergeben sich nicht selten zu diesen Gegenformen, die auf den ersten Blick völlig beziehungslos nebeneinander stehen.

Genau in diesem Sachverhalt liegt aber der eigentliche Wert solcher Metamorphosenbetrachtungen!

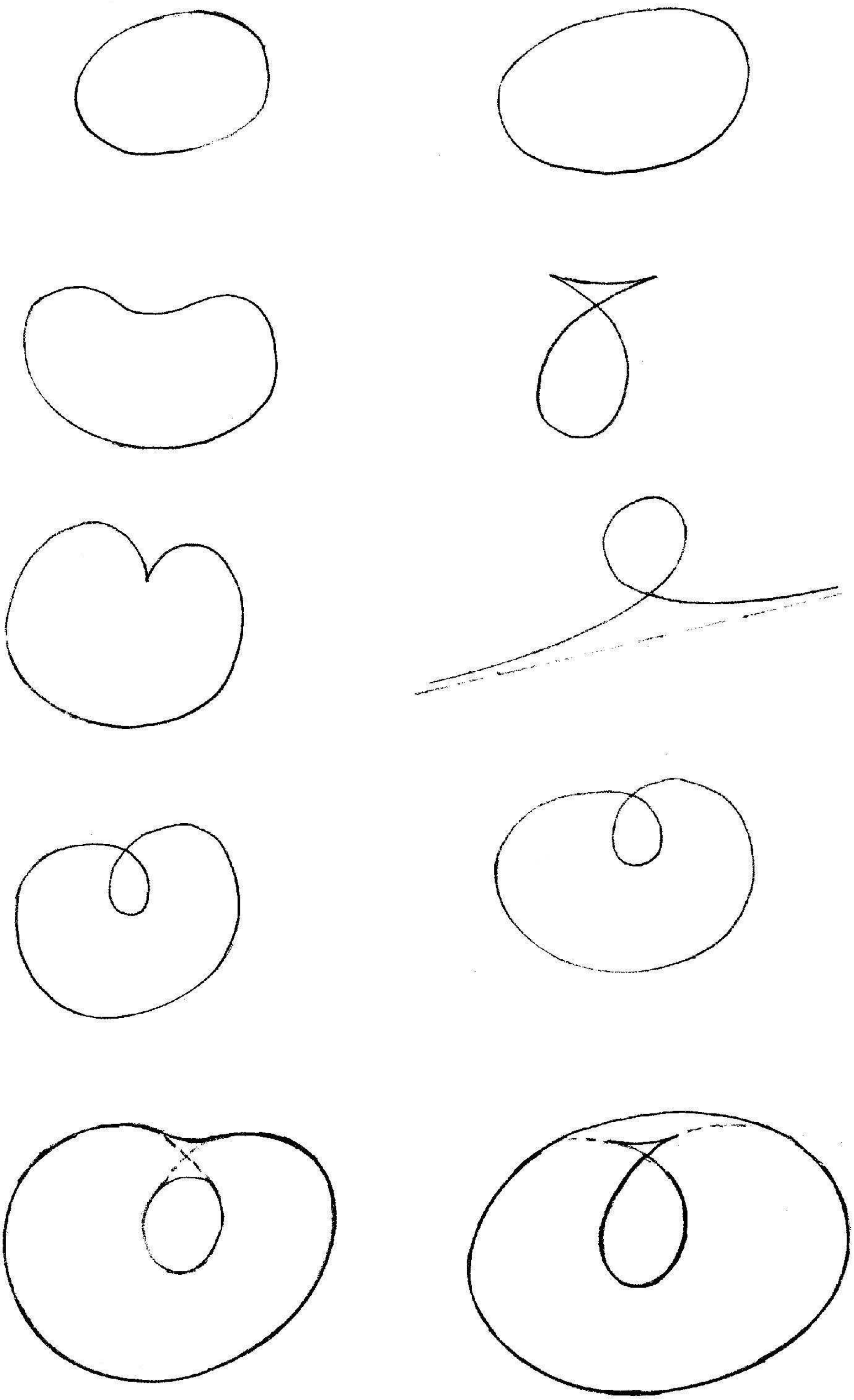
Man wird nämlich für keine zwei Formen, die in einer wie auch immer gearteten Beziehung zueinander stehen, Gegenformen erhalten, die qualitativ gänzlich voneinander verschieden sind. Es kommt nur darauf an, ein wirklich lebendiges Vorstellungsvermögen zu entwickeln, das es ermöglicht, auch mehr verborgene Verwandtschaftsverhältnisse erkennen zu können.

Wir betrachten die Eilinie und ihre Gegenform, die sich **begrifflich** nicht unterscheiden. Dennoch handelt es sich hier bei Form und Gegenform um **qualitativ** völlig verschiedene Gebilde (vergleiche die Konstruktionsaufgabe in Kap. 4.2, „PASCAL'sche Schnecke"). Es ist lediglich nicht möglich, diese Verschiedenheit ohne die bisher entwickelten Begriffe aufzuzeigen. Wir sahen in Kap. 3.4, dass die Eilinie als Punktgebilde polar der Eilinie als Geradengebilde ist.

Wir wählen nun im Folgenden die Eilinie als Ausgangsform in der erwähnten polaren Gestalt und verfolgen zwei verschiedene Metamorphosenreihen.

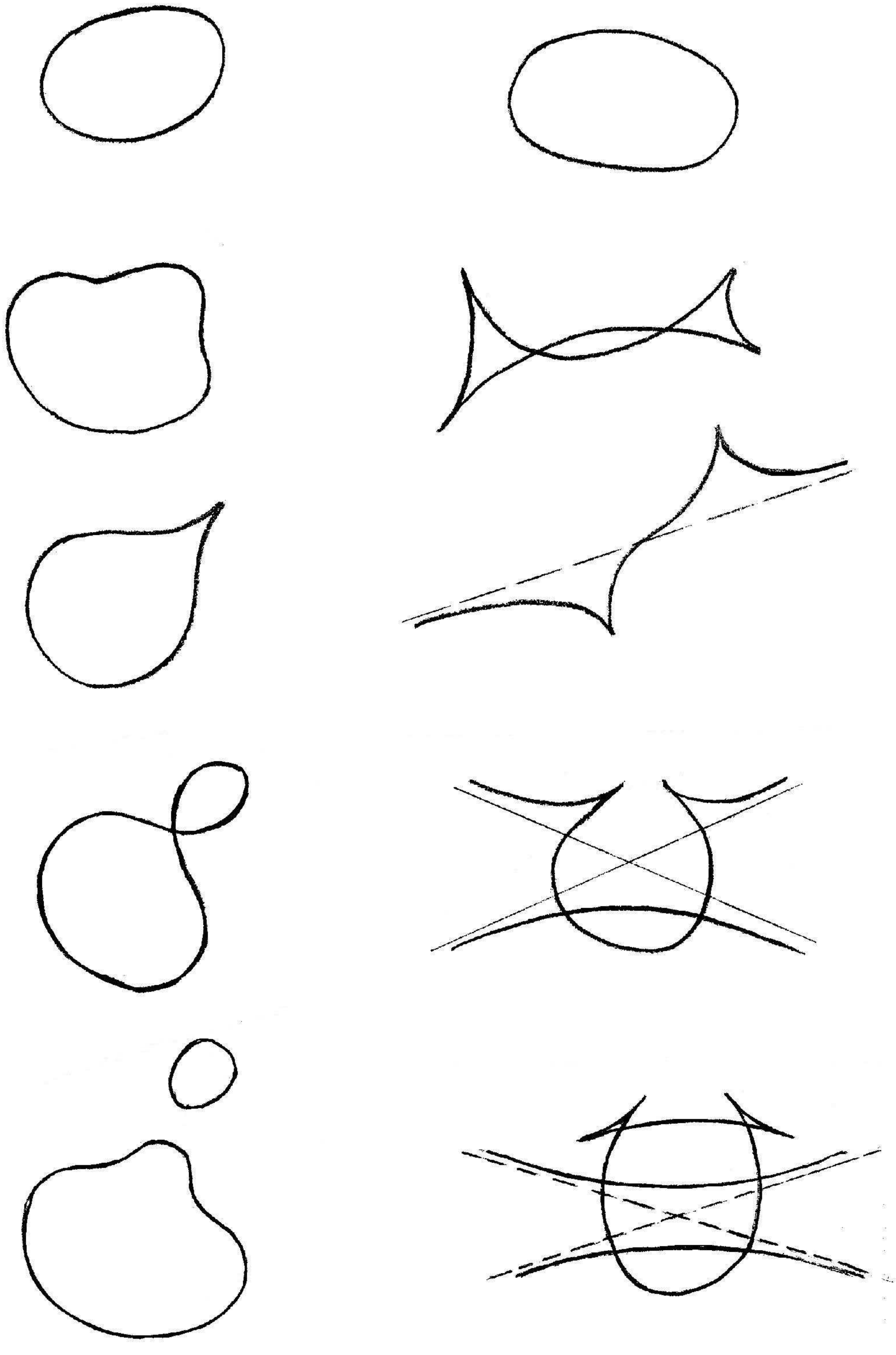
1. Reihe

Form Gegenform



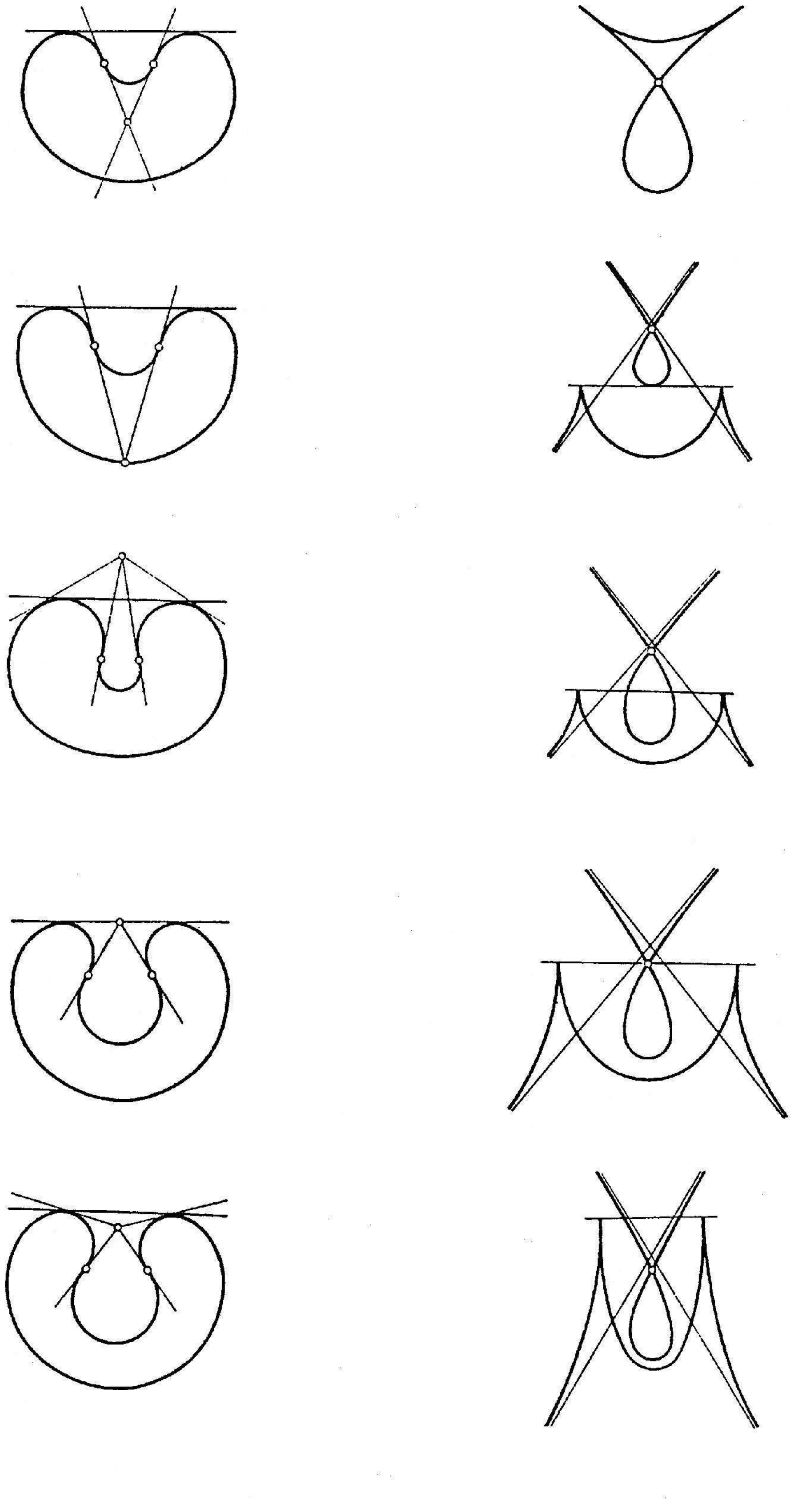
2. Reihe

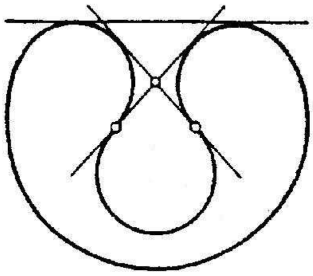
Form Gegenform

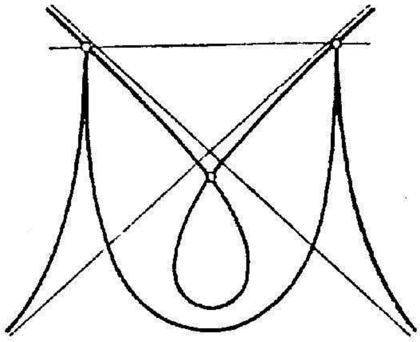


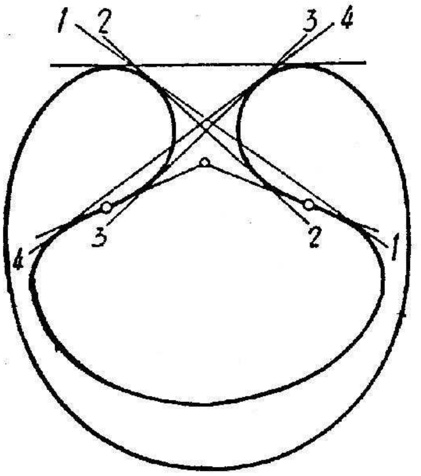
Ein Beispiel einer Veränderung einer Form und ihre Gegenform

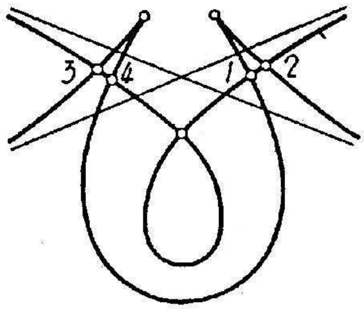
(aus Louis Locher-Ernst: „Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven“)

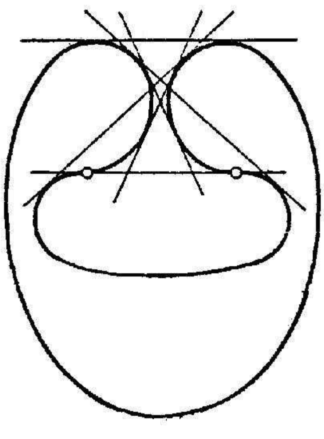


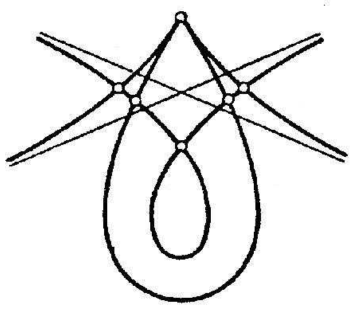


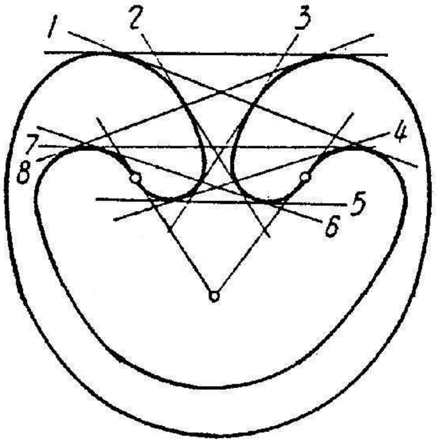


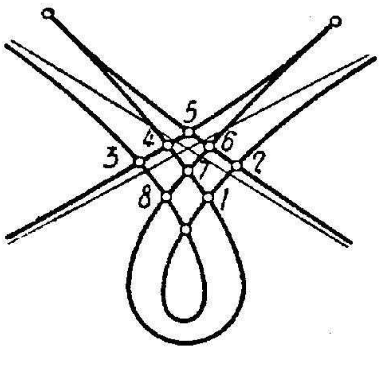

1
2
3
4
4
3
2
1


3
4
1
2






1
2
3
4
7
8
5
6


5
4
6
3
7
2
8
1

Weitere Beispiele von Metamorphosenreihen