7. Projektive Geometrie als Weg zu einem ganzheitlichen Raumverständnis

Georg Glöckler

Entwicklungsepochen der Geometrie

Mathematik und Geometrie galten in alten Kulturen als Vorschule für die Initiations- bzw. Geisterkenntnis.[1]

Die mathematisch-geometrische Arbeit beruht auf einer gerichteten Aktivität im Denken. Diese kann sich sowohl auf sinnlich erfahrbare Objekte richten, sich aber auch weitgehend davon unabhängig machen. So sind Zahlen und Linien nicht etwa an der äusseren Sinneserfahrung gewonnen, obwohl sie sich selbstverständlich auf diese beziehen lassen. Die eigentliche mathematische Tätigkeit liegt im *sinnlichkeitsfreien Denken*. Ein Denken, das sich auf sich selbst stützen kann, ist nicht nur von äusseren Stützen unabhängig, sondern macht denjenigen, der denkt, auch innerlich unabhängig. Darauf beruht der pädagogische Auftrag des Mathematischen. Entsprechend ist auch der Lehrplan der Waldorfschule darauf aufgebaut.

Ein besonders anschaulicher Bereich des Mathematischen ist die Geometrie. Hier werden Gedankenformen unmittelbar anschaulich, die von grösster Bedeutung sind für ein eingehendes Verstehen raum-zeitlicher Vorgänge auf den Gebieten der Embryologie, Medizin, Pharmazie, Botanik, Architektur und der allgemeinen Morphologie. Diese Einsichten in die verschiedenen Unterrichtsgegenstände im Laufe der Schulzeit aufzunehmen, ist eine der grossen Herausforderungen an eine Pädagogik, die die spirituelle Dimension auf wissenschaftliche Art und Weise integrieren will.

Geometrie gehört – wie überhaupt die Mathematik in ihrer Gänze – zu den wichtigsten Integrationswissenschaften, was im Bereich der Waldorfpädagogik besonders eindrucksvoll realisiert werden kann. Für den an den mathematischen Grundlagen und insbesondere an den allfälligen Beweisführungen Interessierten sei auf die einführende bzw. weiterführende Literatur verwiesen.

Die menschheitsgeschichtliche Entwicklung der Geometrie gliedert sich im Wesentlichen in vier Epochen:

1. Geometrie als Vorschule der Geisterkenntnis, aber auch als eine die Baukunst inspirierende Weisheit in den Mysterienstätten des Altertums (Babylonien, Ägypten, Südamerika/Tia huanaco/Bolivien).

2. Veröffentlichung der Geometrie durch Euklid (365 – 300 v. Chr.), der das Wissen seiner Zeit und auch das überlieferte Mysterienwissen zusammenfasste und in seinen Elementen allgemein zugänglich machte. In den mittelalterlichen Klosterschulen waren die Schriften des Euklid neben der Bibel die meistgelesenen Bücher. Daher formulierte der Mathematiker Georg Unger, dass die euklidische Geometrie über 2000 Jahre bis in die heutige Zeit der Erhärtung der Verstandeskräfte gedient hat.

3. Die Zeit der Renaissance mit der Entdeckung der Perspektive durch die Maler, wodurch ein neues Raumerleben und ein neues Raumverständnis entwickelt wurden. Dadurch wird die Erfassung der Peripherie des Raumes durch die so genannten Fernelemente (Fluchtpunkt, Horizont) möglich.

1 Vergleiche dazu auch Louis Locher-Ernst: Mathematik als Vorschule zur Geisterkenntnis. Gesammelte Aufsätze. Verlag am Goetheanum, Dornach ^{2}1973.

4. Auf der Grundlage des durch die perspektivische Anschauung Veranlagten konnte sich dann vom 17. bis ins 19. Jahrhundert die so genannte Projektive Geometrie entwickeln. Ihr wohnt die Grunderkenntnis inne, dass der Raum in sich dual strukturiert ist, d.h. dass es zu jeder Gestaltung im Raum eine dazu komplementäre Gestaltung gibt. Rudolf Steiner hat an diese Zusammenhänge anknüpfend die Begrifflichkeit *Raum – Gegenraum* eingeführt. Durch die Projektive Geometrie erfährt auch die Betrachtung der Perspektive eine entscheidende Ergänzung. Zu den Fernelementen Fluchtpunkt und Horizont – wie sie in der Perspektive gehandhabt werden – tritt noch die Fernebene hinzu. Auf diese Weise treten im Bereich der Projektiven Geometrie die drei geometrischen Grundelemente Punkt, Gerade und Ebene auch in der Funktion von Fernelementen auf.

1. Pyramiden als Zeugen der Mysterienweisheit alter Zeiten[2]

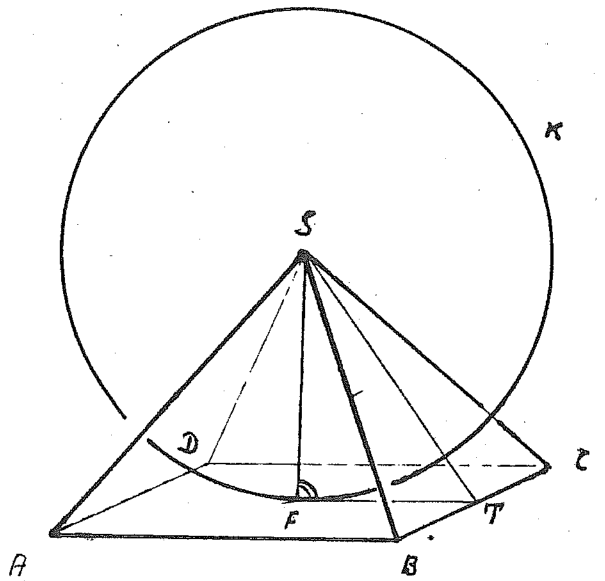


Abb. 1

An der grossen Pyramide des Pharaos Cheops in Ägypten bei Giseh hat man verschiedene Nachmessungen vorgenommen. Dabei stellte sich z.B. folgender Sachverhalt am rechtwinkligen „Stelldreieck" SFT heraus (vergl. Abb. 1):

$$\frac{FT}{ST} \approx \frac{55}{89} = 0{,}61787...(\approx 0{,}618033988... = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = g$$

Dieser Zahlenwert entspricht ziemlich genau der Masszahl g des goldenen Schnitts.[3] Dies ist an sich schon bemerkenswert. Noch bemerkenswerter kann die folgende Deutung sein. Der eingezeichnete Stellkreis K mit der Höhe der Pyramide als Radius kann als Symbol des Sonnenumlaufs angesehen werden. Setzt man den Umfang dieses Kreises gleich dem Umfang des Basisquadrates der Pyramide, dann ergibt sich sehr genau das obige Zahlenverhältnis. Dieses Vorgehen würde der sog. Quadratur des Kreises entsprochen haben. Die dazu notwendigen Rechnungen sind die folgenden:

2 Vergleiche Ernst Bindel: Die ägyptischen Pyramiden als Zeugen vergangener Mysterienweisheit. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1966.

3 Der Begriff des „Goldenen Schnitts" wird in Abschnitt 2 über das Pentagramm erläutert.

Rechnung:

Deutung: Mit $FS = r$ und $BC = CD = \ldots = s$ sei

$$2\pi \cdot r = 4 \cdot s$$

(Kreisumfang = Umfang des Basisquadrats)

Nun ist $(ST)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + r^2$ Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck SFT)

Weiter ist $FT = \frac{s}{2} = \frac{\pi \cdot r}{4}$

Daraus folgt nach kurzer Rechnung:

$$\frac{FT}{ST} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 16}} = 0{,}617667_8$$

Dieser Zahlenwert wird mit der Quotientenfolge bestmöglichster Näherungen[4] für g mit möglichst kleinen Zahlen folgendermassen ausgedrückt (vergl. auch S. 87ff.):

$$\frac{1}{1}/\frac{1}{2}/\frac{2}{8}/\frac{3}{5}/\frac{5}{8}/\frac{8}{13}/\frac{13}{21}/\frac{21}{34}/\frac{874}{1415} \ldots\ldots$$

Man kann dieses Ergebnis folgendermassen formulieren: Wenn die alten Ägypter die Kreiszahl π kannten, dann konnten sie daraus die Zahl „g“ symbolisch zum Ausdruck bringen, indem sie diese am „Stelldreieck“ zur Erscheinung brachten. Hätten sie hingegen die Zahl „g“ des goldenen Schnitts gekannt, dann wäre die Kreiszahl π ihrerseits symbolisch zur Darstellung gekommen im Umfang des „Stellkreises“. Für die Kreiszahl π würde sich dann entsprechend unseren Voraussetzungen nach einer kleinen Rechnung folgender Wert ergeben:

$$\pi = 4 \cdot \sqrt{g} \approx 3{,}1446\ldots$$

Es ist wahrscheinlich, dass im Bau der Cheops-Pyramide die geometrische Erkenntnis zur Anwendung kam, dass die Zahl g des Goldenen Schnittes und die Kreiszahl π in ein mathematisches Verhältnis zueinander gebracht werden sollten.

2. Das Pentagramm, die Masszahl g des goldenen Schnitts und vier mit ihr in Zusammenhang stehende fundamentale Einsichten

Warum erfolgt hier ein Beispiel aus der Euklidischen Geometrie? Diese fördert ein Sich-Beheimaten der Seele in der Endlichkeit der irdisch-räumlichen Gegebenheiten. Sie beschreibt deren Messbarkeit, Überschaubarkeit und Strukturiertheit. Sie stützt in jeder Beziehung das Lebensgefühl im Hier und Jetzt, im Alltagsleben, in der sogenannten gegenständlichen Realität. Im Rahmen dieser euklidisch-geometrischen Gesetze nimmt die Geometrie des Pentagramms eine besondere Stellung ein. Denn die hier sichtbar werdenden geometrischen Gesetze führen über die rein geometrische Raumerfassung hinaus in die prozessual-zeitliche Dimension. Es geschieht dies dadurch, dass die am Pentagramm zu entwickelnden Denkformen weit über das reine Erfassen des Pentagramms als einer räumlichen Gestalt hinausweisen. Die am Pentagramm entwickelbaren Denkformen führen zu vier fundamentalen Einsichten.

4 Der Begriff der „Näherung“ wird ebenfalls in Abschnitt 2 erläutert

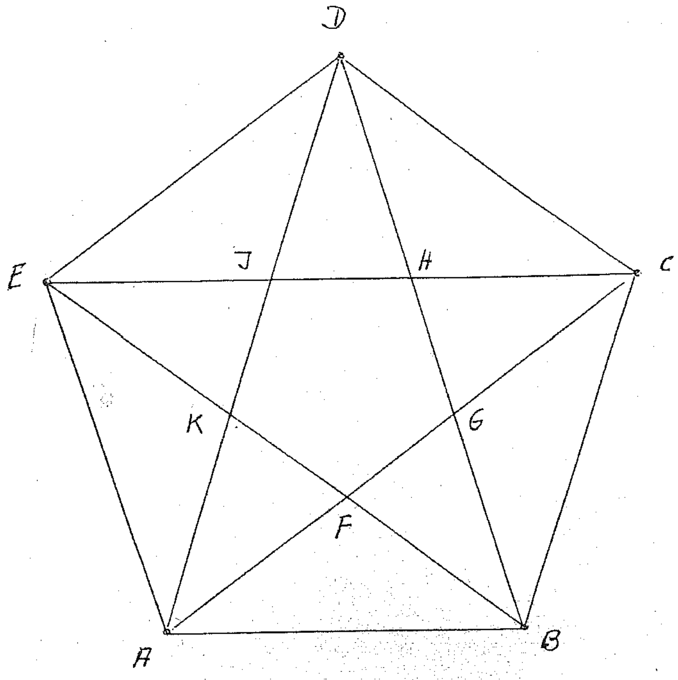


Abb. 2

Aus der Zeichnung ist – bei Voraussetzung elementarer geometrischer Grundkenntnisse – ersichtlich, dass DG = AG = AB ist und die beiden Dreiecke A B D mit B G A ähnlich sind, d.h. zum Beispiel, dass die entsprechenden Winkel gleich sind.
Daraus folgt:

$\frac{BG}{AB} = \frac{AB}{BD}$ und weil $DG = AB$ ist, auch $\frac{BG}{DG} = \frac{DG}{BD}$

Die Strecke BD wird also durch G so geteilt, dass sich die kleinere Strecke (Minor) BG zur grösseren Strecke (Major) DG so verhält, wie die grössere Strecke DG zur ganzen Strecke BD. Diese Teilung nennt man *Goldenen Schnitt* (sectio aurea). Sie kommt häufig in der Natur und der Kunst vor, aber auch in der menschlichen Gestalt. Sie wird daher auch „göttliche Proportion" genannt.[5]

Setzt man nun $BD = 1$ und $DG = g$, dann gilt wegen der obigen Beziehungen:

$\frac{BG}{DG} = \frac{DG}{BD}$ und damit

$\frac{1-g}{g} = \frac{g}{1}$ woraus $g^2 + g = 1$ folgt.

Dabei ist

$$g = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \approx 0{,}61803398_8$$

Die Masszahl g ist also eine quadratisch-irrationale Zahl.

5 vgl. Walther Bühler: Das Pentagramm. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1996.

Alle quadratisch-irrationalen Zahlen lassen sich mit Zirkel und Lineal konstruktiv erfassen. Für g ergibt sich die folgende Konstruktion:

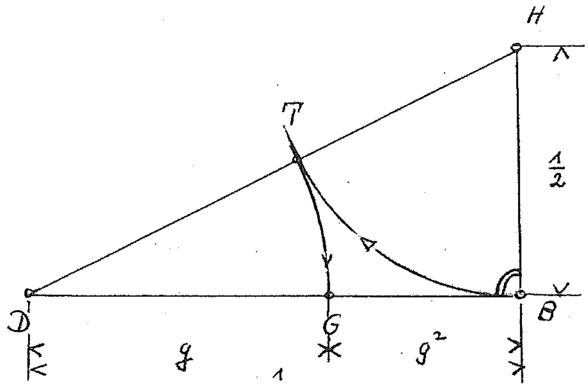


Abb. 3

$$(DH)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$ (Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck DBH)

daraus folgt

$$DH = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

und schliesslich

$$DT = DG = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = g$$

Dabei ist $BG = 1 - g = g^2 \approx 0{,}38196601_1$

Mit der Masszahl g des goldenen Schnittes sind nun neben den rein quantitativen Beziehungen eine Reihe von qualitativen Eigenschaften verbunden, deren Charakter weit über den Rahmen des rein Mathematischen hinausgeht. Um diese Eigenschaften sachgemäss beschreiben zu können, müssen wir vorab einen wichtigen Begriff klären, und zwar den Begriff der Näherungswerte von g.

Aus $g^2 + g = 1$ folgt zunächst

$$g = \frac{1}{1+g}$$

Dies ergibt fortgesetzt:

$$g = \frac{1}{1+\frac{1}{1+g}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+g}}} = \ldots\ldots$$

Die Masszahl g kann also als sogenannter Kettenbruch dargestellt werden.

Für diesen Kettenbruch gilt es nun Näherungswerte in Form von Bruchzahlen (sog. Näherungsbrüche) zu finden. Diese ergeben sich nacheinander wie folgt:

$$N_1 = \frac{1}{1} \qquad N_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2} \qquad N_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{2}{3} \qquad N_4 = \frac{3}{5}$$

$$N_5 = \frac{5}{8} \qquad N_6 = \frac{8}{13} \qquad \text{etc.}$$

$N_6 = \frac{8}{13}$ ist schon ein brauchbarer Näherungswert für g. Es ist nämlich

$$\frac{8}{13} = 0{,}615_4$$

Aus dem Vorangehenden kann man auch das Bildungsgesetz der hier dargestellten Näherungsbrüche N_1, N_2, N_3 usw. erkennen. Bei diesen Näherungsbrüchen treten Zahlen im Zähler und Nenner auf, die einer berühmten Zahlenfolge angehören, der von Fibonacci[6] gefundenen Fibonacci-Folge:

$$\begin{aligned}
f_1 &= 1\\
f_2 &= 1\\
f_3 &= 1 + 1 = 2\\
f_4 &= 1 + 2 = 3\\
f_5 &= 2 + 3 = 5\\
f_6 &= 3 + 5 = 8\\
f_7 &= 5 + 8 = 13\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Allgemein formuliert: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (für n = 3, 4, ...)

Bei einer Fibonacci-Folge ist ein Glied die Summe der beiden Vorhergehenden. Daraus ergibt sich für die obige Folge der Näherungswerte für g die Folge der Quotienten aus jeweils zwei aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen. Die Fibonacci-Zahlen selbst sind folglich mit der Masszahl g konstitutiv verbunden.

Vier fundamentale Einsichten im Zusammenhang mit der Masszahl g

1. Es gibt Prozesse, welche sensibel von den Ausgangsbedingungen abhängen. Dies lehrt die sogenannte Chaostheorie. Im Allgemeinen gehen aber die Ausgangsbedingungen in das Endresultat mitbestimmend ein.

   Darüber hinaus aber gibt es Prozesse, *die stärker sind als die Ausgangsbedingungen,* d.h. der Prozess *als solcher* überwindet seine Ausgangsbedingungen.

6 Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci. Geboren zwischen 1170 und 1180, gestorben ca. 1240.

Dass sich g durch die Folge der Näherungswerte N_1, N_2, N_3 immer besser approximieren lässt, wissen wir schon. Würden wir aber anstelle der Ausgangswerte f_1 und $f_2 = 1$ irgendwelche Ausgangswerte z.B. $a_1 = 1$ $a_2 = 3$ mit $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (für n = 3, 4, 5, ...) setzen und den gleichen arithmetischen Prozess darauf anwenden, so würde die Folge der Näherungswerte auch gegen g streben.

Beispiel:

$a_1 = 1$
$a_2 = 3$
$a_3 = 4$
$a_4 = 7$
$a_5 = 11$
$a_6 = 18$

$$N_1 = \frac{1}{3} \qquad N_2 = \frac{3}{4} \qquad N_3 = \frac{4}{7} \qquad N_4 = \frac{7}{11} \qquad N_5 = \frac{11}{18}$$

$$N_6 = \frac{18}{29} \qquad N_7 = \frac{29}{47} \qquad N_8 = \frac{47}{76} \qquad N_9 = \frac{76}{123} \qquad N_{10} = \frac{123}{199}$$

$$N_{10} = \frac{123}{199} \approx 0{,}618_1 \cdots\cdots$$

Die zugehörige mathematische Beweisführung lässt sich z.B. so formulieren:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n + a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}} = \frac{1}{1+g}\text{, was zu zeigen war.}$$

Dieses Prinzip lässt sich z.B. auch in der Homöopathie auffinden.

Das Potenzieren in der Homöopathie beruht auf zwei Grundprinzipien:

- der Wiederholung des Verdünnungsprozesses mit dem Ergebnis einer zahlenmässig erfassbaren Reihe, z.B. als Zehnerpotenzen D_1, D_2, D_3, in dem ein Teil Ausgangssubstanz mit 9 Teilen eines empfänglichen Mediums innigst durchmischt werden,
- der Aufnahme der Ausgangssubstanz durch den Schüttelvorgang im Medium Wasser oder dem Durchmischungsvorgang im Medium Milchzucker. Diese Aufnahme ins Medium kann einerseits als Verdünnung aufgefasst werden, andererseits erfolgt eine Verwandlung der Substanz, da diese im immer weiter Zerteilt-Werden ihr Geistig-Wesenhaftes in das Medium entlässt. Der Prozess des Aufgenommen-Werdens und sich dem Medium Einprägens wird stärker als die Ausgangssubstanz. Damit ist eine Gedankenform gewonnen, die es ermöglicht, den Übergang von statisch-räumlichen Verhältnissen zu prozessual-zeitlichen *Wirksamkeiten* deutend zu erfassen und zu verfolgen.

Ein dem Potenzieren analoger Vorgang ist der arithmetisch unendliche Prozess, der unabhängig von den beiden Ausgangszahlen zur Masszahl g geführt hat. Die Ausgangszahl entspricht der Ausgangssubstanz; die Masszahl g dem vollständigen „Sterbe-" bzw. Vergeistigungsvorgang des Prozesses.

2. Typisch für einen Organismus ist die Tatsache, dass in seinen Teilen immer die Ganzheit wirkt. Einige herausragende Beispiele dafür sind Seesterne oder die Pflanze Bryophyllum, die unmittelbar in der Lage sind, aus einem ihrer Teile (etwa bei Isolierung) sich als Ganzes wieder hervorzubringen. Man betrachte dazu auch das in Abschnitt 4 Dargestellte. Genau auf diesen qualitativen Sachverhalt stossen wir bei der Betrachtung der Masszahl g. Es ist nämlich

$$\underline{g} = \frac{1}{1+\underline{g}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\underline{g}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\underline{g}}}} = \cdots\cdots$$

Im Lebendigen gilt das Gesetz, dass das Ganze mehr ist als die Summe seiner Einzelteile. Durch die Wechselwirkungen, durch die jedes mit jedem verbunden ist, entzieht sich jeder Lebensvorgang einer linear-kausalen Beschreibung. Komplexen Wirkungszusammenhängen wohnen scheinbar einfache Lebensrhythmen und -wirkungen inne, wie die der Masszahl g und der ihr innewohnenden unendlich vielen Bezüge und Rückbezüge.

3. Es gibt Prozesse, die langsamer als andere verlaufen. Der Prozess der Menschenwerdung, vor allem was seine Gestalt als homo sapiens betrifft, ist im Vergleich mit den Säugetieren am langsamsten. Dabei ist die menschliche Gestalt vom Goldenen Schnitt ganz und gar durchproportioniert.[7] Der Mensch tritt innerhalb der Evolution als Letzter der Arten in Erscheinung. Er steht am Ende der Entstehung der Arten („eine Sekunde vor 12“) und integriert sie mit ihren Prozessen und Fähigkeiten in einer neuen Schlichtheit, Schönheit, Einfachheit.

Nun kann man zeigen, dass irgendeine irrationale Zahl durch die Näherungsbrüche ihrer Kettenbruchentwicklung bestmöglichst angenähert werden kann. Dies bedeutet z.B. konkret, dass es z.B. für 8/13 als Näherungsbruch von g keine Bruchzahl mit kleineren Zahlen im Zähler und im Nenner gibt, die eine bessere Näherung von g wäre. Vergleicht man nun weiter die verschiedenen Folgen von Näherungsbrüchen für irrationale Zahlen, so ergibt sich die zugehörige Folge für g als diejenige, deren Zahlen im Zähler und im Nenner am *langsamsten* wachsen.

Drei Beispiele für Folgen bestmöglichster Näherungen für die Maßzahlen g, h und k:

$g = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$: $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{13} \cdots$ langsamstes „Wachstum“ der Zahlenwerte

$h = \sqrt{2}-1$: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{29} \cdot \frac{29}{70} \cdot \frac{70}{169} \cdots$ schnelleres „Wachstum“

$k = \sqrt[3]{5}$: $\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{22}{31} \cdot \frac{71}{100} \cdot \frac{235}{331} \cdots$ noch schnelleres „Wachstum“

Es zeigt sich, *dass unter allen irrationalen Zahlen g diejenige ist, deren schrittweise Annäherung durch bestmögliche Näherungen die langsamste von allen ist.* So wird mathematisch unmittelbar verständlich, warum der Goldene Schnitt mit seiner Masszahl g in den Proportionen des menschlichen Körpers die alles Beherrschende ist. Durch die Langsamkeit seiner Entwicklung

7 vergl. die schönen Darstellungen und Bezüge bei Walter Bühler (s. Anm. 6)

hat der Mensch die Möglichkeit „seelisch mitzukommen“, „dabei zu sein“, „verbindlich zu werden“, Identität zu entwickeln. Es zeigt sich daran auch, warum *Geduld* die Kerntugend aller Erziehungs- und Entwicklungsarbeit ist.

4. Für alle Fibonacci-Zahlen und auch für g ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, *dass sie sich aus sich selbst heraus rekonstituieren.* Dazu drei Beispiele:

   a) Rekonstituierung durch Quadrate der Fibonacci-Zahlen

allgemeines Gesetz: $\sum_{1}^{n}(-1)^{n+1} f_{2n-1} = (-1)^{n+1} fn^2$ (für n = 1, 2, ...)

Also z.B.

$$\begin{array}{ll} 1 & = 1 \\ 1-2 & = -1^2 \\ 1-2+5 & = 2^2 \\ 1-2+5-13 & = -3^2 \\ 1-2+5-13+34=5^2 & = 5^2 = f_1 - f_3 + f_5 - f_7 + f_9 - f_5^{\,2} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

   b) Rekonstruktion einer Fibonacci-Zahl aus dem gesamten Spektrum derselben:

   allgemeines Gesetz: $f_{n+v-2} = f_v \cdot f_n - f_{v-2} \cdot f_{n-2}$

   Also z.B.

$$\begin{aligned} &\vdots \\ 34 &= 5 \cdot 8 - 2 \cdot 3 = f_5 \cdot f_6 - f_3 \cdot f_4 \\ &= 3 \cdot 13 - 1 \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 21 - 1 \cdot 8 \\ &= 1 \cdot 34 - 0 \cdot 13 \\ &\vdots \end{aligned}$$

   c) Rekonstituierung von g aus dem gesamten Spektrum der Fibonacci-Zahlen:

allgemeines Gesetz: $(-1)^{n+1} \cdot g = (f_n + f_{n-1} \cdot g) \cdot (f_n \cdot g - f_{n-1})$ (für n = 1, 2, ...)
Also z.B.

$$\begin{array}{rll} g = & (1-0) & \cdot\ (g-0) \\ -g = & (1+g) & \cdot\ (g-1) \\ g = & (2+g) & \cdot\ (2g-1) \\ -g = & (3+2g) & \cdot\ (8g-2) \\ g = & (5+3g) & \cdot\ (5g-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Auch diese Beispiele zeigen mathematische Gedankenformen, die den Lebensvorgängen eigen sind: Will man das Leben als solches charakterisieren, so steht als erstes die Fähigkeit, sich aus sich selbst heraus zu erneuern bzw. sich zu rekonstituieren, ganz im Vordergrund. Das schönste Beispiel dafür ist die Pflanzenwelt selbst. Im 19. Jahrhundert haben Schimper und Braun die Anordnung der Blätter um den Stängel herum untersucht (die sog. Phylotaxis). Blätter wachsen in Spiralform um den Stängel herum, wobei der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Blättern konstant ist. Auf den Vollkreis bezogen ergeben sich dann für die am häufigsten auftretenden Blattstellungen, ausgedrückt durch Bruchzahlen, die folgenden:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{21}{55}, \frac{34}{89} \ldots$$

Das sind die Brüche, die man erhält, wenn man in der Fibonacci-Folge immer ein Glied überspringt. z.B. entsprechen der Blattstellung $\frac{2}{5}$ der Rose 5 Blätter bei 2 Stängelumwindungen. Diese überraschenden Tatsachen hatte wohl schon Johannes Kepler im Auge, als er die folgenden Sätze formulierte:

„In der Ähnlichkeit dieser aus sich selbst heraus entwickelnden Folge bildet sich meiner Meinung nach die Fähigkeit zur Ausbreitung ab. Deshalb ist in Pflanzen das Kennzeichen dieser Fähigkeit, das Pentagramm, nämlich zu sehen. Alle weiteren Beweise, die man nach langem Grübeln hierfür anbringen kann, übergehe ich an dieser Stelle.“[8]

Die häufigsten Blattstellungen, als Folge der obigen Bruchstellen geschrieben, weisen auf eine zweite bemerkenswerte Tatsache hin: Diese Folge strebt nämlich nicht gegen g, sondern gegen die 1. Potenz von g, nämlich g^2. Denkt man dabei an die Anschauung Goethes von der Urpflanze, die in ihren Ausgestaltungen den verschiedenen Typen der Pflanzen entspricht, dann hat man in der obigen Quotienten-Folge das dafür arithmetische Korrelat. Dieses weist darauf hin, dass die Pflanzenwelt uns in ihren Bildeprozessen schon zeigt, dass sie das Potenzierungsgesetz im Ansatz in sich trägt.

Die angeführten vier fundamentalen Einsichten mit Bezug auf die Masszahl g weisen unmittelbar auf den Bereich des Lebendigen hin. Dieser ist gekennzeichnet durch Prozesse der Integration, der Wechselwirkung, der Potenzierung, der Vereinfachung, der Reproduzierbarkeit. Gedankenformen aus Mathematik und Geometrie des Goldenen Schnittes können dazu beitragen, die „Intelligenz“ lebender Systeme transparent zu machen und die raum-zeitlichen Gesetze des Lebens zu studieren.

3. Die Perspektive und das neue Raumbewusstsein

Zunächst sind es die Künstler, die das neuzeitliche Raumbewusstsein erleben und insbesondere auf dem Gebiet der Malerei zur Darstellung bringen. Sie erleben sich offensichtlich selbstständig in einem sie umgebenden Raum. Die farbperspektivisch angelegten Bilder (z.B. die berühmte Felsengrottenmadonna von Leonardo da Vinci) oder die späteren linienperspektivischen Darstellungen (z.B. die Schule von Athen des Raffael) zeigen dieses neue Raumerleben an. Später wird es dann auch von Mathematikern und Geometern gesetzlich beschrieben und gedanklich erfasst. Die folgenden Skizzen zeigen drei Varianten, wie sich parallele Linien z.B. einer Strasse in einem Fluchtpunkt F treffen und damit die Möglichkeit gegeben ist, perspektivische Verkürzungen unbegrenzt in die Tiefe zu verfolgen und geometrisch-gesetzlich zu beschreiben.

8 Zitiert nach David Wells: Das Lexikon der Zahlen. Fischer-Taschenbuch-Verlag, S. 66.

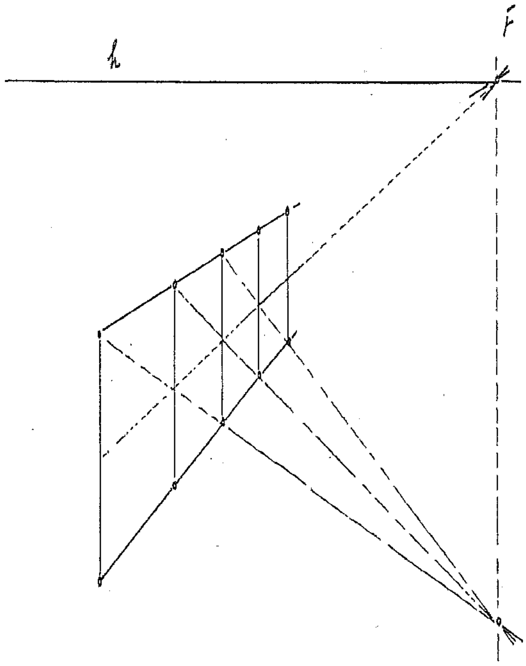


Abb. 4

Abbildung 4 zeigt, wie sich die „Parallelen“ im Fluchtpunkt F auf dem Horizont h schneiden. Dieser Fluchtpunkt bringt erstmals für das erkennende Bewusstsein den unendlich fernen Horizontpunkt, beispielsweise einer Strasse, die auf den Horizont zuläuft, in die geometrisch beschreibbare Anschauung.

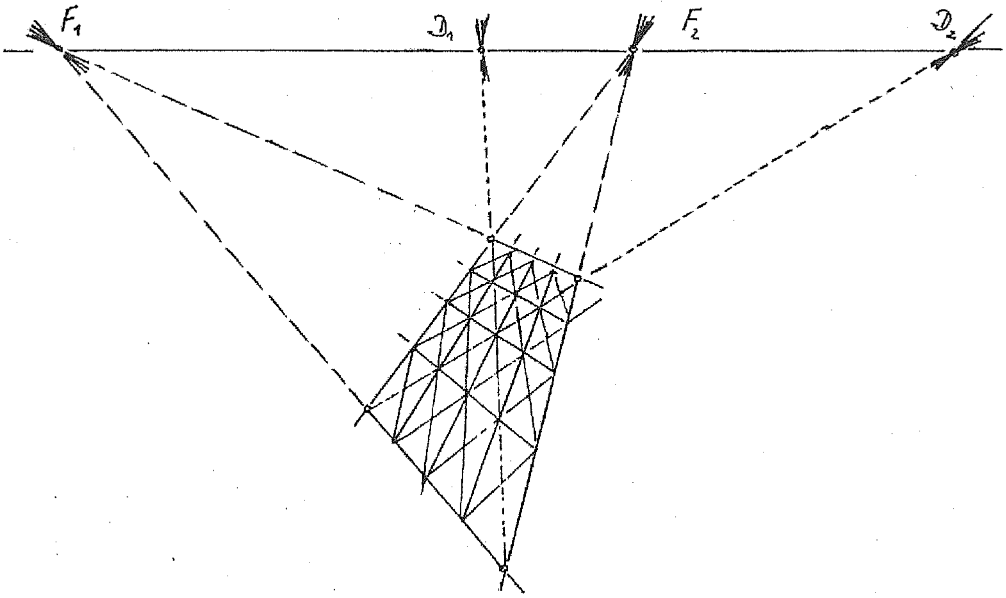


Abb. 5

Die Abbildung 5 zeigt das Entsprechende für die perspektivische Verzerrung eines regelmässig gegliederten Rechtecks (sog. Übereck-Perspektive).

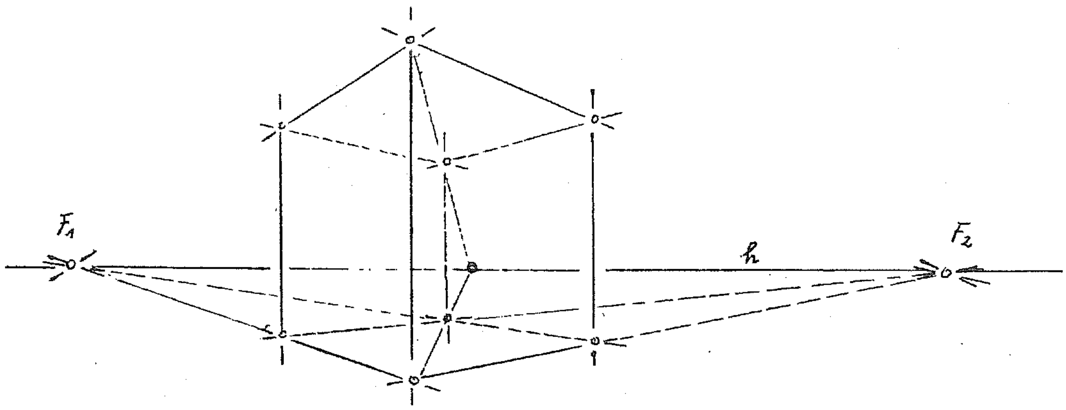


Abb. 6

Abbildung 6 stellt eine Übereckperspektive eines Quaders dar. Das ist noch immer nicht der allgemeine Fall, was folgende Abbildung 7 zeigt.

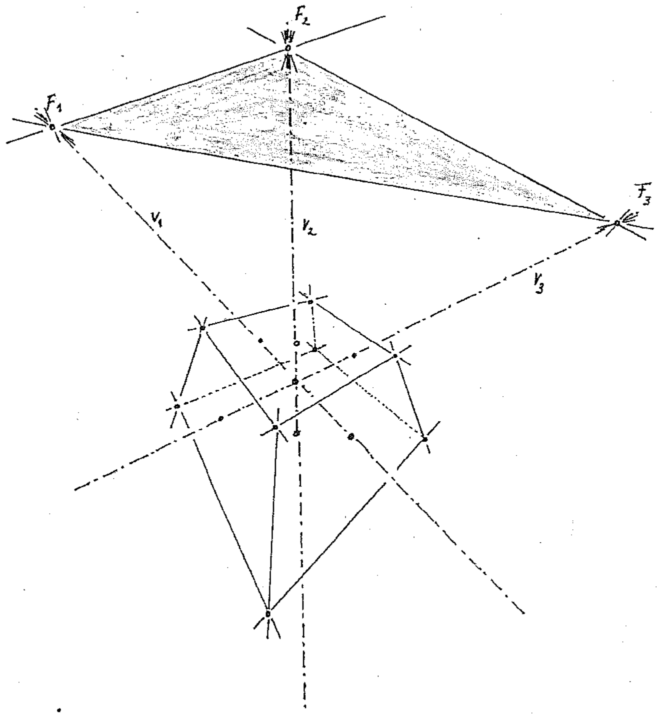


Abb. 7

Während in den Abbildungen 4, 5 und 6 nur ein bzw. zwei Fluchtpunkte zur Beschreibung der Lageverhältnisse benötigt werden, sind dies in der Abbildung 7 drei Fluchtpunkte. In der Abbildung 6 in der speziellen Lage des dort wiedergegebenen Quaders kommt man mit zwei Fluchtpunkten aus, da der dritte aufgrund der besonderen Verhältnisse nicht darstellbar ist, weil die vertikalen Parallelen hier in der unmittelbaren Anschauung parallel bleiben und sich folglich nicht in einem gemeinsamen Fluchtpunkt treffen können. Dies wird in der Abbildung 7 grundlegend anders: Der hier wiedergegebene Quader ist auf eine allgemeine Weise perspektivisch gezeichnet, indem hier keine Parallelen mehr als solche in der Anschauung bestehen bleiben, sondern sich alle jeweils auf den ihnen zugehörigen Fluchtpunkt hinbewegen bzw. beziehen. Die Zeichnung gibt hier einen Quader wieder (im Spezialfall kann es auch ein Würfel sein), der zwölf Kanten besitzt, von denen jeweils vier parallel sind und die je einen gemeinsamen Fluchtpunkt haben. Diese drei Fluchtpunkte bestimmen ihrerseits eine Ebene, die Fernebene genannt wird und dem Horizont in den Abbildungen 4 bis 6 entspricht. An die Stelle des Horizontes tritt also jetzt eine Ebene, die gemäss den Gesetzen der Perspektive das unendlich Ferne in die beschreibbare geometrische Anschaulichkeit rückt.

Welche neue Anschauungsform wurde also durch die Maler der Renaissance und die sich daran anschliessende mathematisch-geometrische Erfassung bewusst gemacht? Es zeigt sich hier, dass die bekannten geometrischen Grundelemente Punkt, Gerade und Ebene jetzt in der Funktion von Fernelementen auftreten und zwar in der Form eines Fluchtpunktes, einer Ferngeraden (als Horizont) und einer Fernebene. Durch Berücksichtigung der Fernebene kann eine Form, wie hier der Quader, als von den Fernelementen her bestimmt gedacht werden. Damit kann die punktorientierte Binnenbetrachtung ergänzt werden durch die Perspektive vom Umkreis her. So erscheint ein Kristall – z.B. der Quader eines Kochsalzes – einerseits durch sein Kristallgitter binnenstrukturiert. Andererseits kann er als durch die Fernelemente strukturiert beschrieben werden. Damit sind erstmals die geometrischen Begriffe gebildet, die den Umkreis, d.h. die Peripherie des Raumes, ebenso exakt beschreiben, wie dies die Euklidische Geometrie für die endlich gedachten Formen und Gestalten des Raumes getan hat.

Die perspektivische Betrachtung erweist sich so als eine Raumvorstellung, die zwischen dem endlich gedachten und dem peripherisch gedachten Raum vermittelnd auftritt. Während der euklidische Raum Formen und Gestalten dieser Welt im Endlichen begrenzt denkt und beschreibt und damit zu einem in sich abgeschlossenen Weltbild die Grundlagen liefert, geht der perspektivisch gedachte Raum an die Grenze zur Unendlichkeit, ohne diese *jedoch zu überschreiten*. Das heisst mit anderen Worten: Das Reich des Unendlichen wird hier in Form von Fernebene, Horizontlinie und Fluchtpunkt in die sichtbare Anschauung herübergeholt und macht damit den Umgang mit dem so genannten Unendlichen erstmals gedanklich voll bewusst. Im Bereich der perspektivischen Darstellung werden die Fernelemente konstruktiv funktionell erfasst und damit zeichnerisch handhabbar. Punkte, Geraden und Ebenen können dabei in ihrer Funktion als Fernelemente zeichnerisch gehandhabt werden.

4. Entdeckung und Studium der Projektiven Geometrie – Durchbruch in ein Raumbewusstsein unabhängig von der Sinnesanschauung

Begriffe wie Projektive Geometrie oder Synthetische Geometrie beschreiben Gesetzmässigkeiten, die nicht bei denen der Euklidischen Geometrie und der Perspektive stehen bleiben. Es kommt zur Entdeckung neuer Gesetzmässigkeiten in Form des Polaritätsgesetzes und der Beschreibung von doppel- bzw. geometrischen Mehrfachverhältnissen. Erkannt wurde, dass jedem geometrischen Grundelement (Punkt, Gerade und Ebene) ein Complementäres entspricht: dem Punkt die Ebene, der Ebene der Punkt und der Geraden wieder eine Gerade. Die Gerade ist also zu sich selbst polar. Entsprechend sind z.B. Gebilde wie ebenes Punktfeld und Ebenenbündel zueinander polar.[9]

Das Studium der Projektiven Geometrie führt daher zur Überwindung des einseitig punktzentrierten Bewusstseins zugunsten einer dynamischen Raumvorstellung, die den Kontext, den Umkreis miterfasst. So kann man beispielsweise eine Gerade oder Ebene als Gesamtheit aller diese strukturierenden Punkte auffassen. Dadurch erscheinen solche Gebilde dann als zu-

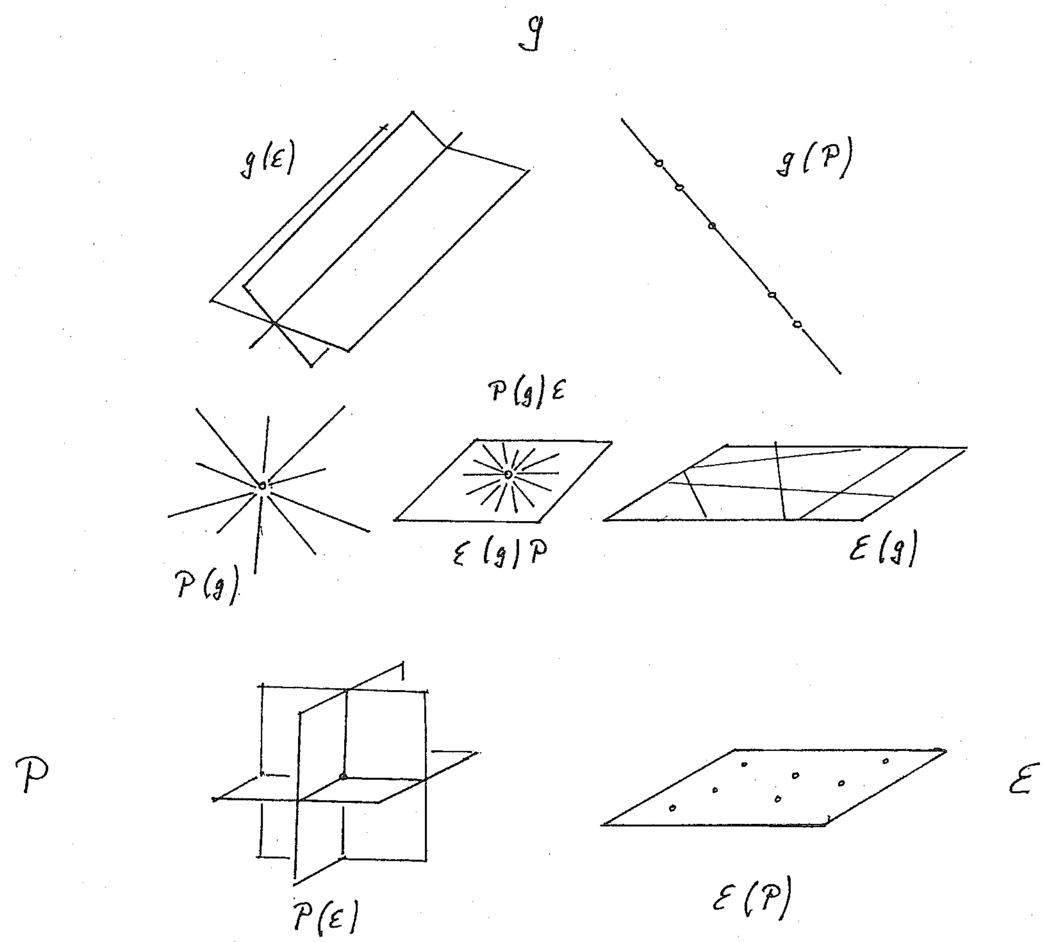
9 Im 19. Jhdt. haben die Mathematiker Poncelet, von Staudt und Reye diese Gesetzmässigkeiten z.T. unabhängig voneinander entdeckt und erforscht.

sammengesetzt bzw. gegliedert durch unendlich viele kleinste Bausteine bzw. Punkte. Umgekehrt können Geraden und Punkte als Gesamtheit aller diese strukturierenden Ebenen aufgefasst werden usw.

Die sieben Grundgebilde des projektiven Raumes:[10]

$P(\varepsilon)$ Ebenen-Bündel	$\leftrightarrow$	$\varepsilon(P)$ ebenes Punktfeld
$P(g)$ Strahlen-Bündel	$\leftrightarrow$	$\varepsilon(g)$ ebenes Geradenfeld
$g(\varepsilon)$ Ebenen-Büschel	$\leftrightarrow$	$g(P)$ gerade Punktreihe

$P(g)\varepsilon \equiv \varepsilon(g)P$
Strahlenbüschel



Ein einzelner Punkt kann also durch Ebenen und Geraden gegliedert sein und wiederum eine Gerade durch Ebenen und Punkte. Die drei elementaren Bausteine der Geometrie werden in

10 Louis Locher-Ernst: Urphänomene der Geometrie. Verlag am Goetheanum, Dornach [2]1980.

der Projektiven Geometrie zu völlig gleichberechtigten Anschauungsformen. Dem Punktbewusstsein des euklidisch-geometrisch geschulten Menschen wird ein Geraden- und Ebenen-Bewusstsein an die Seite gestellt, durch das Prozesse, Gestaltungen und Objekte ganz neu in ihrer Raumstruktur verstanden werden können. Der Raum hört auf, nur ein „Gefäss" zu sein, in dem sich Objekte befinden und bewegen. Er wird zu einer dynamischen Qualität, die sich dem Denken erschliesst. D.h. der Raum hört auf, nur eine „Anschauungsform der Sinne" zu sein. Er wird als Idee zu einer Perspektive des Denkens. Praktisch heisst dies, dass jede Gestaltung durch Punkte, Geraden oder Ebenen beschrieben werden kann, allerdings hat Louis Locher Recht, wenn er feststellt, dass es für das Alltagsbewusstsein des modernen Menschen leicht ist, eine Gerade als Gesamtheit ihrer Punkte zu verstehen, wo hingegen wir Mühe haben, eine Gerade als Gesamtheit ihrer Ebenen zu betrachten. Daher hier nochmals einige Übungsbeispiele:

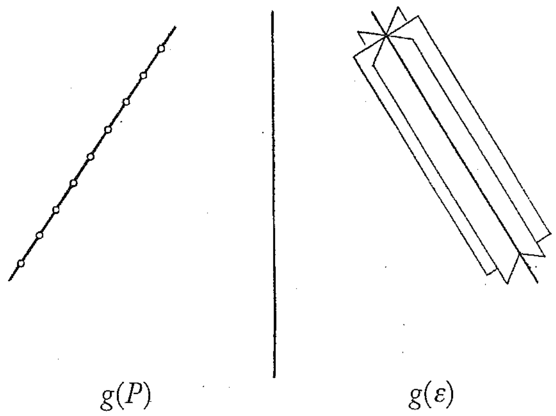


Abb. 8: Die Gerade als Träger von Punkten und als Träger von Ebenen.

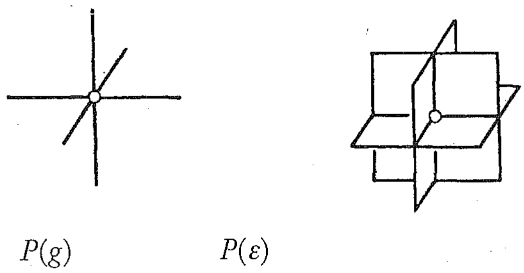


Abb. 9: Punkte erleben wir spontan als Teile eines Ganzen, die Gerade jedoch als Träger dieser Teile. Entsprechend ist es aber auch möglich, den Punkt begrifflich als das Ganze aufzufassen, die Ebenen und Geraden eines Punktes hingegen als dessen Teile anzuerkennen.

Das gewöhnliche, selbstzentrierte Bewusstsein, das von sich als dem Mittelpunkt des Geschehens ausgeht und von dort aus die Welt betrachtet, kann durch eine solch dreifältige Betrachtungsart in seiner Einseitigkeit erkannt werden. Es kann durch das „Geraden-„ bzw. „Ebenen"-Bewusstsein ergänzt werden. Die Frage ist nur, *woher die Bewusstseinsbildung in Richtung Punkt-, Geraden-, Ebenenbewusstsein ihre jeweilige* ***Erlebnisgrundlage*** *bezieht.* Hierzu hat Louis Locher bemerkenswerte Ausführungen gemacht: „In den letzten Jahrzehnten ist man zur Ansicht gelangt, dass die Aufgabe der Mathematik in ihrem gesamten Umfange darin bestehe, Strukturschemata zu liefern, die vom menschlichen Geist nach Zweckmässigkeitsgründen in Anpassung an die Erscheinungswelt ausgedacht werden. Dies bedeutet einen Fortschritt gegenüber der lange herrschenden, früher von Kant vertretenen Meinung, der Raum sei eine festgeprägte Anschauungsform, die man fertig hinzunehmen hat. Einen weiteren Fortschritt wird es bedeuten, zu erkennen, *wie das Denken dazu gelangt, ganz bestimmte Strukturschema dazu zu schaffen.* Um diese Einsicht zu gewinnen, hat man den Menschen in seinem Werden zu betrachten. In den ersten Jahren seines Lebens hat er sich – ohne begriffliches Bewusstsein – in die Vertikale hineingearbeitet, im Zusammenspiel der Funktionen seines rechten und linken Organismus die Breitendimension erlebt, im Visieren mit den beiden Augen – auch mit dem Greifen der Arme – die Tiefendimension verwirklicht. Als Substrat dieser inneren Erlebnisse – nicht als Abstraktion aus der Erscheinungswelt – vermag er, nachdem die Gestalt schaffenden Bildkräfte von ihrer Tätigkeit am physischen Leibe zum Teil entlassen worden sind, im Denken den abstrakten Raum zu bilden. So erscheinen denn die Dimensionen des üblichen Raumes als spätere abstrakte Spiegelbilder früherer organischer Tätigkeiten.

Wenn es gelingt, vielleicht ohne unmittelbares Bewusstsein davon, Spiegelbilder im Denken zu schaffen von noch weiter zurückliegenden Tätigkeiten – etwa in den Jahren vor der Geburt, wo die Individualität, auf die Erde niedersteigend, sich mit den Bildekräften aus der Weltumgebung umhüllt – so kommt ein anderer Raumbegriff zustande, nämlich derjenige des Gegenraumes[11].

Festzuhalten ist jedoch, dass dieses Polaritätsgesetz von Punkt und Ebene mit den die beiden vermittelnden Geraden *nicht abgeleitet ist aus Experiment und Beweisführung*, sondern **Phänomen** ist, d.h. axiomatischen Charakter hat. Nachfolgende Zeichnungen bringen diese phänomenale Gesetzmässigkeit in die Anschauung. Bei den Abbildungen 10a und 10b handelt es sich um die Polarisierung eines Würfels, wodurch ein Oktaeder zur Erscheinung kommt. Jeder kann ein solches Oktaeder leicht in einen zuvor gezeichneten Würfel hineinkonstruktieren, indem er dem Polaritätsgesetz folgt und überall da, wo er beim Würfel eine Ebene findet, den Mittelpunkt des die jeweilige Würfelfläche begrenzenden Quadrates setzt. Ebenso muss dem Polaritätsgesetz folgend anstelle der acht Würfelecken (in denen sich drei Kanten schneiden) eine durch drei Geraden begrenzte Ebene erscheinen. Diese acht Ebenen des dadurch entstehenden Oktaeders ergeben sich durch Verbinden der Quadratmittelpunkte der sechs Würfelflächen. Offensichtlich ist, dass es sich bei diesen beiden polar zueinander stehenden Körpern um zwei der fünf platonischen Körper handelt. Denn die fünf sogenannten platonischen Körper zeichnen sich vor allen anderen geometrischen Körpern dadurch aus, dass sie bezüglich ihrer Eckpunkte und Flächen voll regelmässig gegliedert sind. So wie Würfel und Oktaeder einander polar sind, sind dies auch der Pentagondodekaeder (er besteht aus zwölf regelmässigen Fünfecken) und der Ikosaeder (er besteht aus zwanzig regelmässigen Dreiecken). Der fünfte platonische Körper, das Tetraeder, ist zu sich selbst polar.

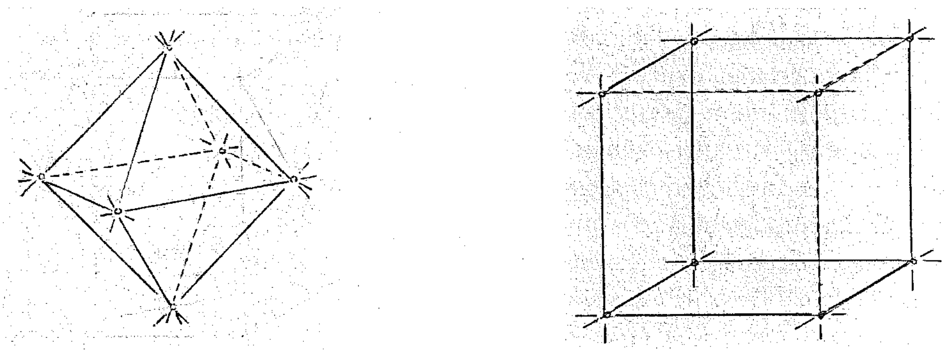


Abb. 10: Hexaeder und Oktaeder sind als voll regelmässige Körper zueinander polar.

Die nachfolgend hier abgebildeten Körper, der Kuboktaeder und der Rhomben-Dodekaeder gehören nicht zu den platonischen Körpern, sie sind jedoch zueinander polar.

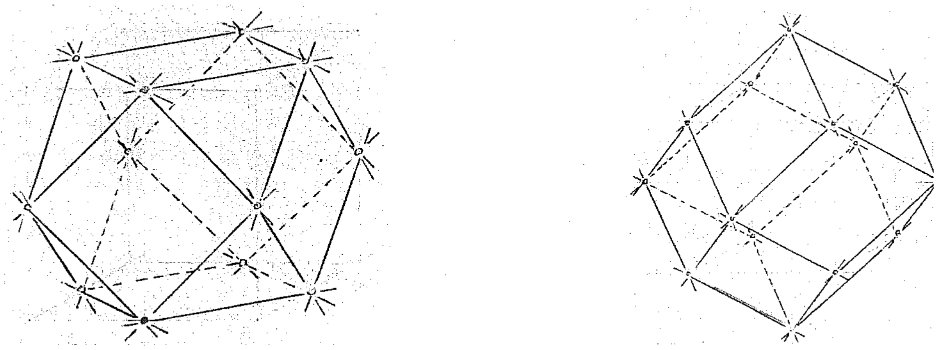


Abb. 11: Kuboktaeder und Rhomben-Dodekaeder sind als halbregelmässige (also nicht platonische) Körper zueinander polar.

11 Vgl. Louis Locher-Ernst: Raum und Gegenraum. Einführung in die neuere Geometrie. Verlag am Goetheanum, Dornach ^{3}1988.

Vom Umgang mit den Fernelementen

Die untenstehenden Abbildungsreihen zeigen zwei geometrische Verwandlungsprozesse in der Ebene, die einen regulären Punkt über das Unendliche hinüberführen. Die erste Reihe nimmt ihren Anfang bei einer Ellipse, deren Punkt B nach oben über das Unendliche hinüberwandert und in der dritten Abbildung von unten zurückgekehrt ist. Aus der Ellipse ist eine Hyperbel geworden. (Abb. 12b zeigt eine Parabel mit dem Fernpunkt B∞) Interessant ist dabei, dass im Bereich der euklidischen Geometrie das Unendliche bei der Hyperbel zwar zeichnerisch schon hereinspielt, dass diese Anschauung aber zunächst nicht zu einer abstrakten Erfassung der Fernelemente führte. (vgl. Abb. 12a, 12b und 12c)

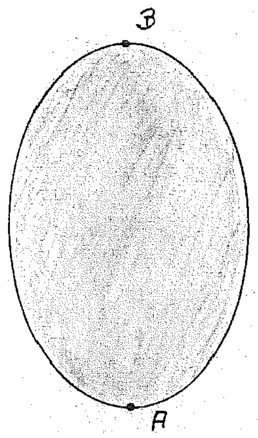


Abb. 12a: Ellipse

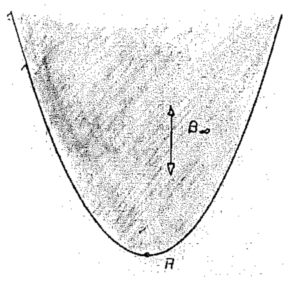


Abb. 12b:
Parabel mit Fernpunkt B∞

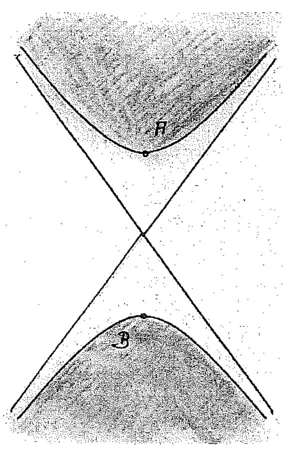


Abb 12c: Hyperbel

Bei der zweiten Reihe steht ein Dreieck am Anfang, dessen Spitze C nach oben über das Unendliche hinübergeführt wird und in der letzten Abbildung von unten wieder herankommt. Nach dem Mathematiker Möbius wird das 4. Dreieck Möbius-Dreieck genannt. (vgl. Zeichnungen 13a, 13b, 13c, 13d)

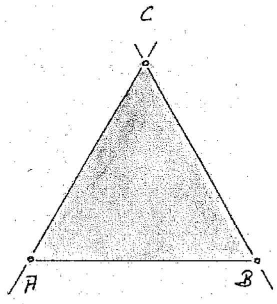


Abb. 13a:
Gewöhnliches Dreieck

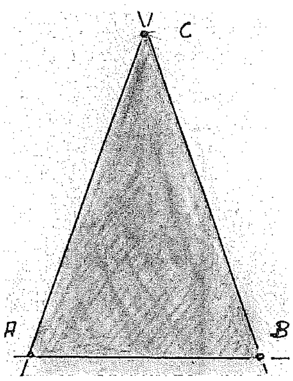
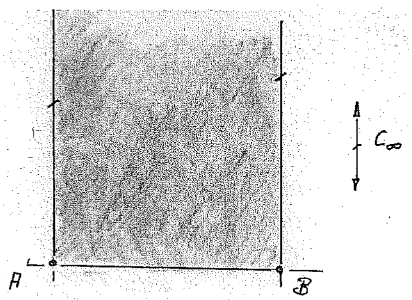


Abb. 13b



Dreieck mit einem Fernpunkt C∞ als „Eckpunkt“

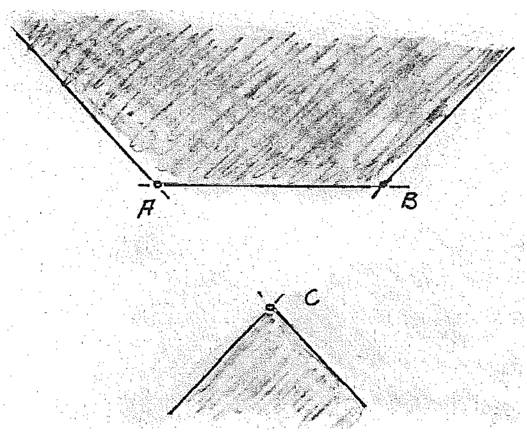


Abb. 13d: Möbius Dreieck

Erweiterung der Begriffe Innen und Aussen

Zeichnet man einen Kreis, so erscheint zunächst eindeutig, dass alles, was sich innerhalb des Kreisumfanges befindet, innen ist und was sich ausserhalb des Kreisumfanges befindet, als aussen gelegen gesehen wird. Mit Hilfe der projektiv geometrischen Anschauung ergibt sich jedoch, dass im Kreisinnern nur Punkte zu liegen kommen können[12]. Ausserhalb des Kreises hingegen können Gerade als Ganze liegen (vgl. die Zeichnungen 14a und 14b).

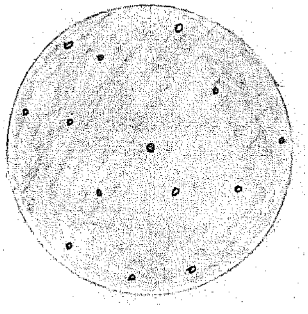


Abb 14a:
Schraffiertes Gebiet innen:
(Punktbewußtsein)

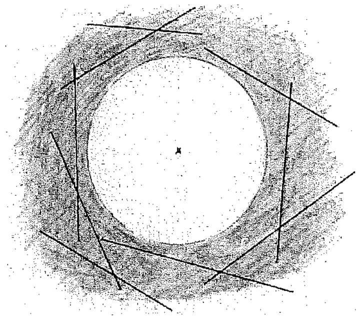


Abb. 14b:
Schraffierter Bereich innen
(Geradenbewusstsein)

Abbildung 15a macht deutlich, dass durch jeden beliebigen Punkt S *innerhalb* des in der Ebene gezeichneten Kreises zwei Gerade p und q gezeichnet werden können, die den Kreis jeweils in zwei Punkten schneiden. In der nebenstehenden polaren Darstellung Abbildung 15b erscheint polar zum Punkt S die Gerade s. Den beiden sich schneidenden Geraden p und q in Abbildung 15b entsprechen in der polaren Darstellung die Punkte P und Q. Der *im* Kreis befindliche Schnittpunkt S hingegen wird zur Geraden s, die deshalb ebenfalls *innen* liegt, da jeder ihrer Punkte zwei Tangenten an den Kreis sendet. Damit ist das Innenliegen eines Punktes S und einer Geraden s relativ unabhängig von der gewohnten Anschauung geometrisch charakterisiert.

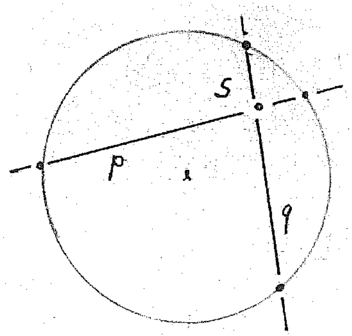


Abb. 15a

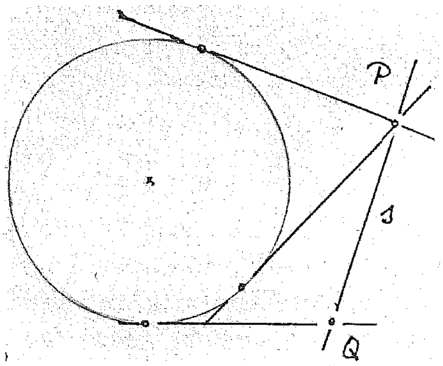


Abb. 15b

Die nächste Abbildung 16a zeigt einen Punkt S_1 *ausserhalb* des Kreises, der deshalb ausserhalb des Kreises liegt, weil durch ihn sowohl Geraden gehen können, die den Kreis in zwei Punkten schneiden, als auch solche, die den Kreis überhaupt nicht schneiden.

12 Bei dieser Charakterisierung des Kreises kommen als charakterisierende Elemente nur Punkte und Geraden in Frage.

Die polare Abbildung 16b hingegen zeigt, dass die durch den Kreis gezeichnete Gerade s_1 nicht innen sondern aussen liegt, weil es auf ihr Punkte gibt, die wie beispielsweise P_1 zwei Tangenten an den Kreis senden können und solche wie Q_1, die keine Tangenten an den Kreis senden. Damit ist auch das „Aussenliegen" von Punkten und Geraden bezüglich eines Kreises geometrisch begrifflich charakterisiert.

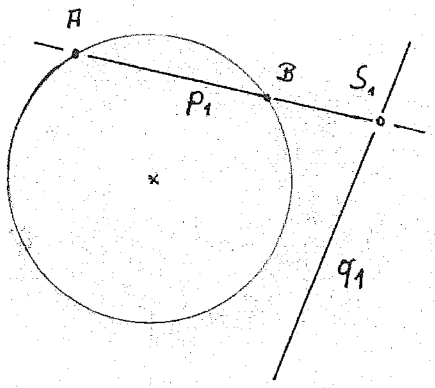


Abb. 16a

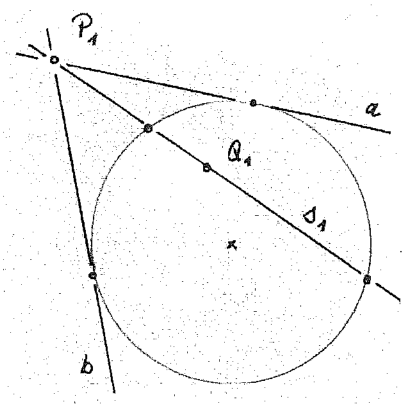


Abb. 16b

Die beiden zueinander polaren Abbildungsreihen in der Ebene machen deutlich, dass im Bereich der Projektiven Geometrie die Frage nach innen und aussen anders gestellt werden muss als im Bereich der Euklidischen Geometrie. Projektive Geometrie zeigt, dass die aus der Euklidischen Geometrie bekannten zwei Charakterisierungen , was ein Kreis sei (der Kreis als geometrischer Ort aller Punkte, die von einem Mittelpunkt gleichweit entfernt sind und der Kreis als Hüllgebilde aller Tangenten) in der Projektiven Geometrie Anlass für die Bildung neuer Begriffe bezüglich innen und aussen werden (vgl. Zeichnungen 17a und 17b).

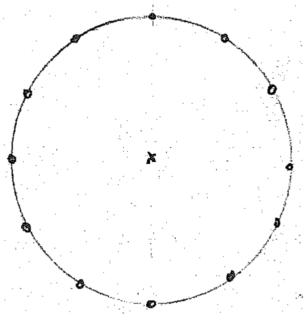


Abb. 17a

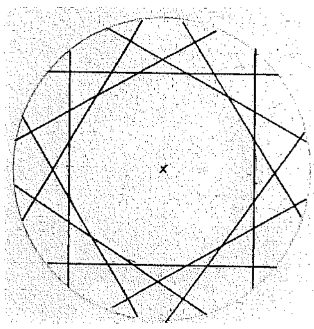


Abb. 17b

In der projektiven Ebene zeigt sich also das anschaulich Innere anhand der Punkte, die sich im „Inneren" eines Kreises befinden. Wo hingegen die Geraden im anschaulich Äusseren des Kreises in der polaren Darstellung das Innere markieren. Dabei entspricht dem Kreismittelpunkt als innerstem *Punkt* polar dazu die innerste *Gerade* in der Funktion der Ferngeraden (vgl. dazu nochmals die Abbildungen 14a und 14b). Daraus ergibt sich eindeutig, dass gemäss mathematisch geometrischer Gesetze es jeweils vom Bezugspunkt abhängt, ob etwas innen oder aussen gelegen ist. Der Krebsforscher und Arzt Dietrich Boie hat in seinem immer noch lesenswerten Buch „Mistel und Krebs" auf dieser Erkenntnis sein wissenschaftliches Verständnis der Krebserkrankung aufgebaut.[13] Er schreibt dort – unter Einbezug des Vortrages von Steiner auf dem philosophischen Kongress in Bologna:

13 Dietrich Boie: Mistel und Krebs. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1970.

Im normalen Leben fühlt sich der Mensch so, dass sein bewusstes Leben sich wie von einer Einheit ausgehend spezifiziert nach den Vorstellungen, die von den Wahrnehmungen der einzelnen Sinne herrühren. Die gewöhnliche Selbstanschauung besteht in einer Reflexion auf sich selbst als den Träger der Sinneseindrücke und des gedanklichen Verarbeitens dieser Sinneseindrücke. In der gewöhnlichen Selbstbeobachtung wird die Aufmerksamkeit von dem in der Umwelt Erkannten abgezogen und auf das erkennende Selbst reflektiert. Dabei schrumpft der Inhalt des Bewusstseins zu dem Punkte des 'Ich' immer mehr zusammen. Das Ich wird – nach den erkenntnistheoretischen Anschauungen des 19. Jahrhunderts – innerhalb der Leibesorganisation vorgestellt, die Eindrücke werden ihm 'von aussen' gegeben. Für das gewöhnliche empirische Bewusstsein ist das Ich in der Leibesorganisation eingeschlossen.

Die erkenntnistheoretischen Untersuchungen Rudolf Steiners zeigen, dass die Anschauung, das Ich sei innerhalb der Leibesorganisation eingeschlossen, für das erkennende Ich nicht zutreffend ist. Während der erkennenden Tätigkeit befindet sich das Ich ausserhalb des Leibes in der wahrhaft innerlich durchlebten Gesetzmässigkeit der Dinge. Die Leibesorganisation verhält sich zu diesem Ich wie ein Spiegel, der das ausserhalb des Spiegels liegende geistige Leben des Ich durch die organische Leibestätigkeit zurückwirft. Das Ich lebt im Erkenntnisinhalt; d.h. es erlebt seine Beziehungen zur objektiven Welt innerhalb dieser objektiven Welt selbst, mit der es in der Erkenntnis identisch ist. Es empfängt seine Erlebnisse dadurch, dass es sie aus der Leibesorganisation als Spiegelbilder des Vorstellungslebens empfängt. Zu den Erlebnissen des Ich innerhalb der objektiven Welt gehören die Gedankeninhalte ebenso wie die Inhalte der Sinneswahrnehmung: Beide werden aus der Leibesorganisation zurückgespiegelt und dadurch dem im Erkenntnisvorgang ausserhalb des Leibes lebenden Ich zum Bewusstsein gebracht.

Dieses Verhältnis des wahrnehmenden und denkenden Ich zur Leibesorganisation hat Rudolf Steiner in einem späteren Vortrag über die Krebsentstehung (16.7.21) genauer erläutert, (wobei er auf die grundlegende Bedeutung des in Bologna gehaltenen Vortrages für das Verständnis der Krebsentstehung hinweist): Das Ich wird nicht unmittelbar wahrgenommen. Es ist verbunden mit jeder Sinneswahrnehmung, mit allem, was ausserhalb des Leibes ist; es betätigt sich nur insofern im Innern, als es aus dem Wahrnehmen von aussen die Kräfte in die Leibesorganisation des Kopfes hinein sendet. Im Kopfe sind der ätherische Leib, der astralische Leib und das Ich ausserhalb des physischen Leibes tätig, sie sind hier leibfrei.

Ganz anders ist das Verhältnis der übersinnlichen Wesensglieder innerhalb des Stoffwechsels und der Gliedmassen: hier sind ätherischer und astralischer Leib innerhalb des Leibes gebunden, nur das Ich ist leibfrei wirksam. An den Bewegungen der Arme und Beine ist das Ich unmittelbar tätig, es 'nimmt die Beine mit', wenn sie sich bewegen.

Der Kern des Problems besteht darin, dass die Realität des in Wahrnehmung und Denken ausserhalb des Leibes tätigen Ich nur vollbewusst erlebt werden kann, wenn der Mensch eine geistige Schulung durchmacht, wie sie von Rudolf Steiner in dem in Bologna gehaltenen Vortrag beschrieben wird. Das Ergebnis dieses Schulungsweges ist die Einsicht, dass die Erkenntnistheorie, die das erkennende Ich innerhalb der Leibesorganisation vorstellt, auf einer Illusion beruht. Ja, mehr noch: Eine solche Erkenntnistheorie verlegt den Erkenntnisvorgang, der sich ausserhalb des Leibes vollzieht, in die Leibesorganisation, innerhalb derer normalerweise nicht Sinneswahrnehmung und Denken, sondern Stoffwechselprozesse ablaufen. Mit anderen Worten: Der Erkenntnisvorgang wird von ausserhalb des Leibes in die Stoffwechselprozesse hineinverlegt gedacht.

Gerade darauf aber beruht die Entstehung des Krebses, dass der Astralleib des Stoffwechsel-Gliedmassensystems sich so verhält, wie es nur für den Astralleib des Kopfes normal ist. Der Astralleib des Stoffwechsel-Gleidmassensystems nimmt die Konfiguration des Kopfes an, d.h. er zieht sich aus seiner Tätigkeit innerhalb des Leibes heraus und wird leibfrei. Die Folge ist, dass der physische Leib die Neigung bekommt, im Stoffwechselsystem die Konstitution von Sinnesorganen anzunehmen. Die Karzinombildung beruht auf einer solchen Tendenz, Sinnesorgane 'an unrechter Stelle' ausbilden zu wollen.

Damit ist gesagt, dass die Erkenntnistheorie des 19. Jahrhunderts auf philosophischem Gebiet darstellt, was Rudolf Steiner als die zum Krebs führende Konstitution beschreibt. Aus dieser Sicht disponiert das aus der Erkenntnistheorie des 19. Jahrhunderts hervorgegangene Geistesleben, wenn man seinen philosophischen Ansatz in das Leben umgesetzt denkt, zur Krebserkrankung.

Das gewöhnliche empirische Bewusstsein, das nur die sinnlich wahrnehmbare Welt für wirklich hält und für die geistige Welt blind geworden ist, war für die germanischen Eingeweihten in dem blinden Hödur mythologisch personifiziert. Es erscheint – nach den hier dargestellten Zusammenhängen – einleuchtend, warum Rudolf Steiner dieses Hödur-Bewusstsein ein Parasitäres nennt: das leibfreie Prinzip des erkennenden Ich, das im Kopfgebiet, im Bereich der Sinne und Nerven, berechtigt und notwendig ist, wird durch die Verlagerung in das Stoffwechsel- und Gliedmassensystem innerhalb des physischen Leibes zu einem parasitären Prinzip.

Wenn Rudolf Steiner in einem seiner letzten Vorträge über das Karzinomproblem (24.7.24) als Ursache für die Neigung, Sinnesorgane an falscher Stelle zu bilden, eine zu starke Ich-Entwicklung nennt, so ist damit charakterisiert, was für das Verständnis der Krebserkrankung als Problem der Ich-Erkrankung wesentlich ist: das bewusste Ich erlebt sich zu stark innerhalb des physischen Leibes und zuwenig in seiner wahren Wesensart, die nur in einem leibfreien Bewusstsein rein geistig erfassbar ist. Die Blindheit für die objektive geistige Aussenwelt lässt ein Ichbewusstsein nur noch als den Schrumpfungsvorgang zu, den die gewöhnliche Selbstbeobachtung darstellt. Das Ich identifiziert sich innen wie aussen nur noch mit der materiellen Erscheinungsform des Daseins: 'Der Mensch wird zu stark Erde' (24.7.24). Im Grunde ist also die zu starke Ich-Entwicklung innerhalb der materiellen Welt eine Schwäche des Ich in bezug auf die geistige Bewältigung der sinnlichen Wahrnehmungsinhalte. So ist der Krebskranke in der Tat in einer 'Baldur-Situation': Das geistige Erbe der Vergangenheit reicht nicht mehr aus zur Bewältigung des 'Hödur-Prinzips'. Das Problem der Ich-Entwicklung zeigt deutlich, warum die Krebserkrankung eine Krankheit unserer Zeit ist.

Aus diesem geisteswissenschaftlich präzisierten Krebsverständnis heraus hat Dietrich Boie neben seiner onkologischen Praxis auch die Marburger Waldorfschule in den 60iger und 70iger Jahren des 20. Jahrhunderts schulärztlich betreut. Er war zutiefst davon überzeugt, dass Erziehung – speziell auf mathematisch-philosophischem Gebiet – Präventivmedizin ist.

Ein anderer Ansatz, den Wirklichkeitsbezug neuer Vorstellungen über innen und aussen zu entwickeln, ist eine Frage aus dem Bereich der Physik, ob wir innerhalb oder ausserhalb der Sonne sind. Rein empirisch gilt, was der bekannte sowjetische Wissenschaftspublizist Felix Sigel schon 1972 in Moskau veröffentlichte:

Die mit sehr hoher Geschwindigkeit von der Sonne ausgesandten Korpuskular- und Elektronenströme bilden die Sonnenkorona. Die Lichtstrahlen der Sonne werden an diesen Elektronen reflektiert, und so entsteht das silbrig-perlmuttfarbige Leuchten um die Sonne, welches von der Erde aus zu beobachten ist. Die Fächerstrahlen der Sonnenkorona werden gemeinsam durch Korpuskularströme und eine grosse Anzahl freier Elektronen gebildet.

Ausser diesen Korpuskularströmen werden von der Sonne ständig gleichmäßig in alle Richtungen des interplanetaren Raumes verhältnismässig langsame Teilchen geschleudert. Sie haben eine Geschwindigkeit von 300 bis 500 km/s und bilden, wie ihn die heutigen Astrophysiker nennen, den sogenannten Sonnenwind. Dieser Sonnenwind ist eine eigentümliche Erscheinung, die man am ehesten mit einem Regen von unten nach oben vergleichen könnte. Doch Realität bleibt Realität: Die Sonne sendet ständig und gleichmässig nach allen Richtungen Teilchen aus. Die Sonneneruption verkörpert unseres Wissens nur eine aussergewöhnliche und extreme Intensivierung dieses ständigen Ausschleuderns.

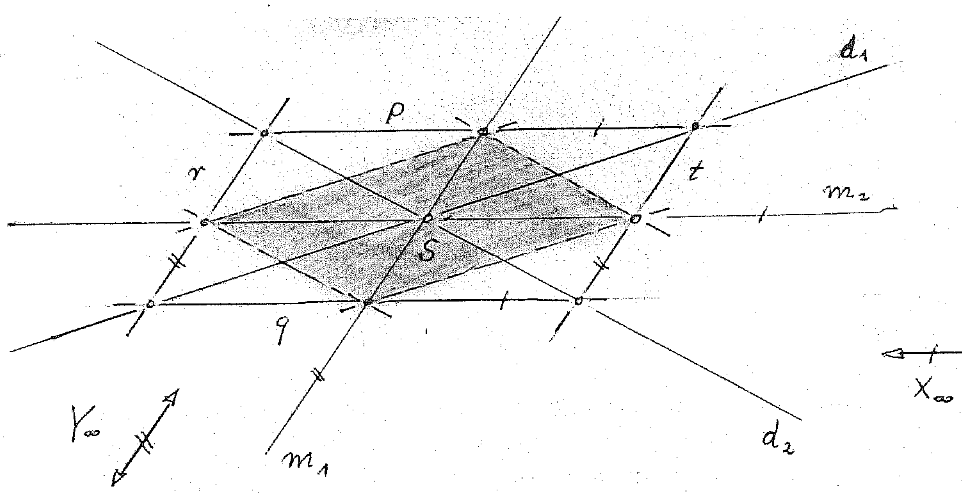
Nach diesen Betrachtungen wollen wir versuchen, auf die Frage nach dem Ende der Sonne oder, genauer gesagt, dem Ende der Sonnenatmosphäre Antwort zu geben. Auf keinen Fall ist *das Sonnenende dort, wo das menschliche Auge bei totaler Sonnenfinsternis den Rand der Korona erblickt. (...)*

Ausgehend von Dichteuntersuchungen in den Koronastrahlen kann man berechnen, wie die Dichte als Funktion des Sonnenabstandes abnimmt. Legt man diese Gesetzmässigkeit zugrunde und nimmt man weiter an, daß die Sonnenkorona bis zur Erdumlaufbahn reicht, so kann man errechnen, welche Dichte die Korona in Erdnähe haben müßte. Weiterhin kann man mit Hilfe von kosmischen Messinstrumenten die Elektronendichte in Erdnähe bestimmen.

Hier ergab sich nun eine zunächst völlig unerwartete Übereinstimmung. Es wurde genau die Elektronendichte gemessen, die auftreten müßte, wenn die Strahlen der Korona bis zu unserem Planeten reichen würden. Sollte das etwa eine zufällige Übereinstimmung sein? Nein, natürlich nicht! Die oft wiederholten Berechnungen führen zu der paradoxen Schlussfolgerung, daß wir innerhalb der Sonne leben. Wenn auch extrem verdünnt, so dehnt sich doch die Sonnenkorona bis zur Erdoberfläche und sogar noch weiter aus. Führt man diesen Gedanken weiter, so ergibt sich, dass wir in gewissem Sinne nicht nur auf der Erde leben, ***sondern auch noch Bewohner des Sonnenraums sind.*** *Dies weist darauf hin, daß sich der Verlauf der Sonnentätigkeit deutlich in den auf der Erde ablaufenden Prozessen und sogar in uns selbst widerspiegeln muß.*[14]

Zu den Begriffen gross und klein

Folgende Zeichnungen zeigen wieder zueinander polare Darstellungen in der Ebene. Abbildung 18a zeigt ein Parallelogramm mit den paarweise zueinander Parallelen Geraden p und q einerseits und andererseits r und t. Das eingeschriebene schraffierte Parallelogramm mit dem Mittelpunkt S erscheint mit Bezug auf seine Fläche anschaulich *kleiner*.



ω ≡ W∞

Abb. 18a

Die dazu polare Darstellung zeigt anstelle der vier paarweise parallelen Geraden die vier paarweise so genannten „zentrierten" Punkte einerseits P und Q und andererseits R und T. Zentriert bedeutet in diesem Fall, dass die Verbindungsgeraden von Q und P bzw. von R und T sich in einem Punkt Ω treffen, welcher der Ferngeraden W∞ in Abbildung 18a entsprechen. Ein wesentlicher Unterschied der zueinander polaren Abbildungen besteht allerdings in der bemerkenswerten Tatsache, dass die Ferngerade der Ebene von vornherein anschaulich ausgezeichnet liegt, während dies für die Wahl des entsprechenden Punktes Ω willkürlich möglich ist.[15] Die oben ange-

14 Felix Sigel: Schuld ist die Sonne. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1975, S. 54f.

15 Der Kenner wird hier den Aspekt einer polar-affinen Betrachtung in der Ebene erkennen.

führten vier Punkte markieren ein sogenanntes Zentrigramm, das dem Parallelogramm der Ausgangszeichnung in der Ebene polar entspricht. Entsprechend dem in der Ausgangszeichnung 18a eingeschriebenen schraffierten *kleineren* Parallelogramm korrespondiert jetzt in der zweiten Zeichnung das dem ersten Zentrigramm (R T Q R) *umschriebene* zweite Zentrigramm, dessen Hüllbereich (schraffiert) dem in der ersten Zeichnung eingeschriebenen Parallelogramm entspricht. Dieser Hüllenbereich, obwohl anschaulich vom Zentrum her gesehen ausgedehnter, ist gegenüber dem ersten Hüllenbereich dann kleiner.

Im Bereich des Lebendigen begegnet uns diese Relativität von gross und klein – je nach Bezugspunkt – anschaulich: Ein Pflanzensame ist von seiner Wachtumspotenz gross wie z.B. eine Eiche. Eine 100 Jahre alte Eiche hingegen hat an physischer Grösse gewonnen – jedoch an Wachstumspotenz verloren.

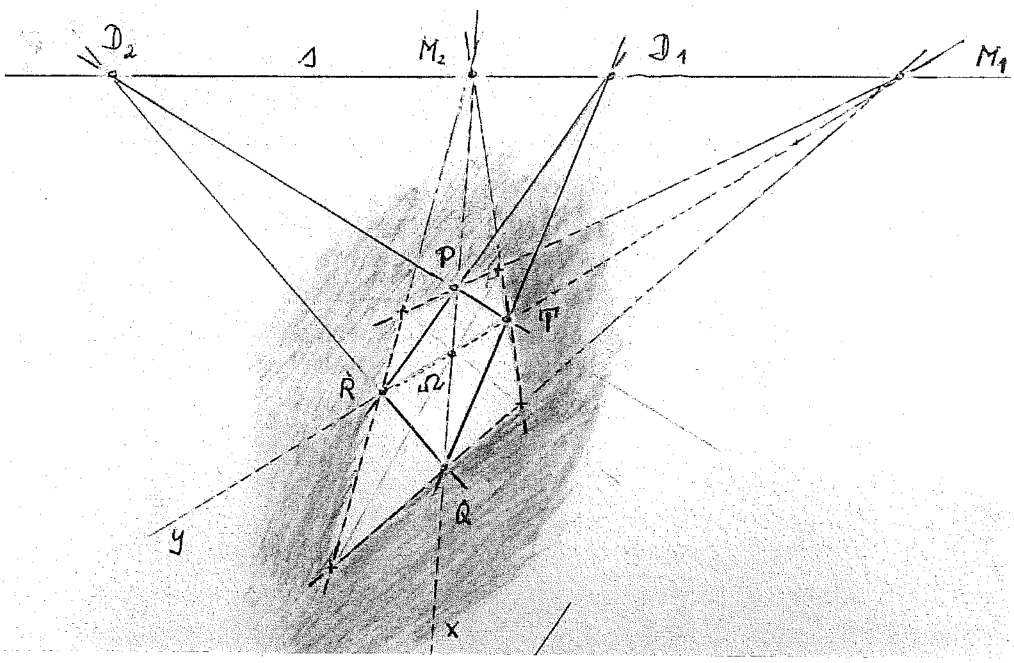


Abb. 18b

Das Gleiche anders denken

Die sogenannte Desargue'sche[16] Konfiguration in der Ebene:

Gehen durch einen Punkt S drei Geraden, auf denen jeweils zwei zugeordnete Punkte liegen [A und A', B und B', C und C'], dann schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte (etwa A B und A' B' etc.) auf einer Geraden s. Nun ist die Desargue'sche Konfiguration dadurch gekennzeichnet, dass sie in der Ebene zu sich selbst polar ist. Dies folgt aus ihrer Eigenschaft, dass sie 10 Punkte und 10 Geraden hat mit der Besonderheit, dass durch jeden ihrer Punkte drei Geraden gehen und das komplementär dazu auf jeder Geraden drei Punkte der Konfiguration liegen. Alle Punkte und alle Geraden erfüllen also jeweils die gleiche Funktion, weshalb z.B. an Stelle von S irgendein anderer Punkt der Konfiguration (z.B. S_1) gewählt werden kann, für den dann die entsprechende Gerade s_1 gesucht werden muss. Auf diese Weise kann also die Desargue'sche Konfiguration auf zehnfach verschiedene Weise angeschaut werden. Damit gibt sie einen besonders signifikanten Anhaltspunkt, das Gleiche jeweils anders zu denken bzw. zu beschreiben.

Im Bereich der Medizin ist es evident, wie notwendig komplementäre, ergänzende Anschauungsweisen sind. Selbstverständlich kann man den Menschen zum Objekt machen und seinen Körper in stofflich-molekularer Hinsicht analysieren. Man erhält zu jeder Frage, zu

16 Desargues, Gérard: französischer Mathematiker (1591 – 1661).

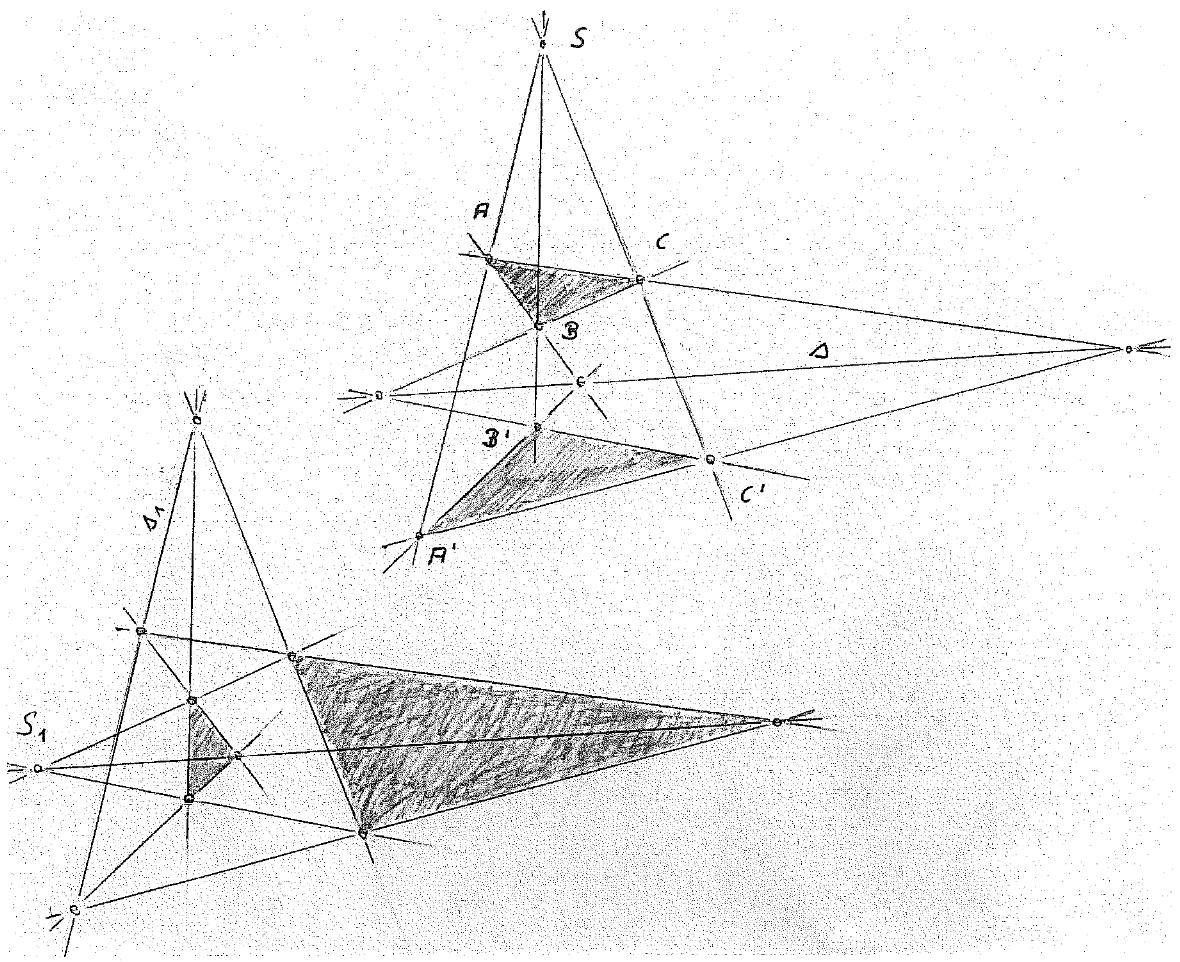


Abb. 19: Desargues Konfiguration in zwei der 10 verschiedenen Deutungsmöglichkeiten

jedem Interesse die Antwort, die dem entspricht. So kann man – frei nach Paracelsus[17] z.B. die fünf Ursachen von Krankheit beschreiben: Wenn man vor einem Patienten steht, der an Cholera verstarb, kann man sagen,

- dass er aufgrund der Infektion verstorben ist,
- dass seine Selbstheilungskräfte schwach waren, dekompensierten,
- dass er durch eine ängstlich-depressive Gemütsverstimmung seine Selbstheilungskräfte beeinträchtigt hat,
- dass er in seinem Ich zu schwach war, um mit Positivität, Mut und Zuversicht seine Lebensumstände zu meistern, oder
- dass es „Gottes Wille" war, sein Todeszeitpunkt, der in seinem Schicksalsverlauf vorgezeichnet war.

Daraus ist ersichtlich, wie fruchtbar es ist, das Leben differenzierter zu betrachten. Was ist richtig? Was ist wirklich? „Recht haben" ist eine relative Sache. Lebensgemäss ist, wenn man weiss, von welchem Gesichtspunkt aus man selbst oder ein anderer „Recht hat". Dies zu wissen bringt uns der Wirklichkeit näher – und das ist Verständnis fördernd und friedenstiftend.

17 Elise Wolfram: Die okkulten Ursachen der Krankheiten (nach Paracelsus). Verlag am Goetheanum, Dornach 1991, Seite 16 ff.

Gliederung der Ebene in diskrete nebeneinander liegende Gebiete und in solche Bereiche, die sich überlappend durchdringen

Durch drei Geraden in allgemeiner Lage kann eine Ebene in vier Kerngebiete gegliedert werden, welche diskret nebeneinander liegen. (Abbildung 20 a) Drei Punkte hingegen gliedern die Ebene in vier Hüllenbereiche, die sich anschaulich überlappen (Abbildung 20b).[18] Im Innern der Kerngebiete liegen Punkte, polar dazu liegen im Innern der Hüllenbereiche Geraden.

Wo tritt uns im täglichen Leben diese Polarität entgegen? Jedes Mal, wenn wir in Ruhe Landschaftsverhältnisse um uns herum betrachten, Felder, Wiesen, Auen und Wald: eine gegliederte Fläche, Ebene, oft auch modifiziert durch Berge und Täler. Wer also vom „Himmel" aus die Erde betrachtet, sieht sie als ein durch Linien gegliedertes Ebenenfeld. Schauen wir demgegenüber nachts in den Sternenhimmel hinauf, so sehen wir die gewölbte Fläche, die ferne Ebene gegliedert durch die Lichtpunkte der aufleuchtenden Sterne. „Himmel" und „Erde" stehen einander polar gegenüber wie ein Punkt- und Geradenfeld.

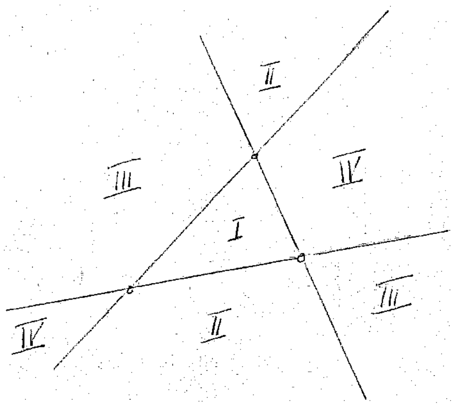


Abb. 20 a

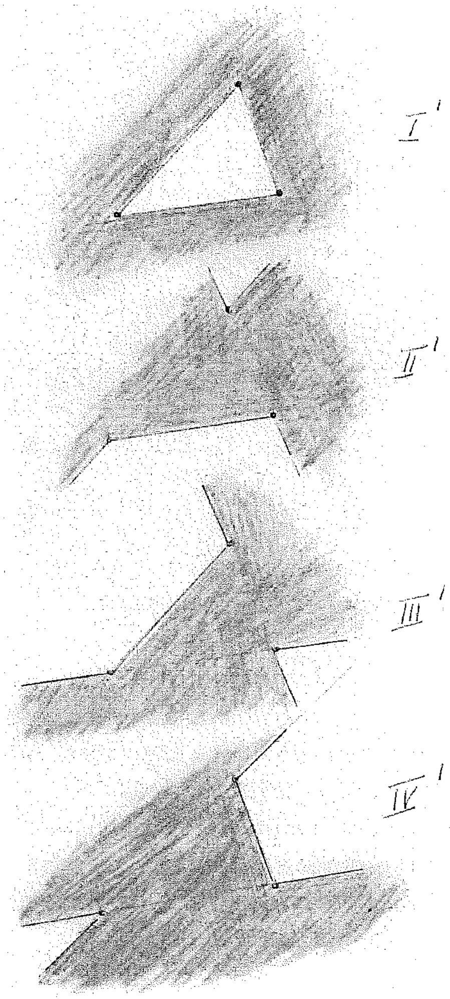
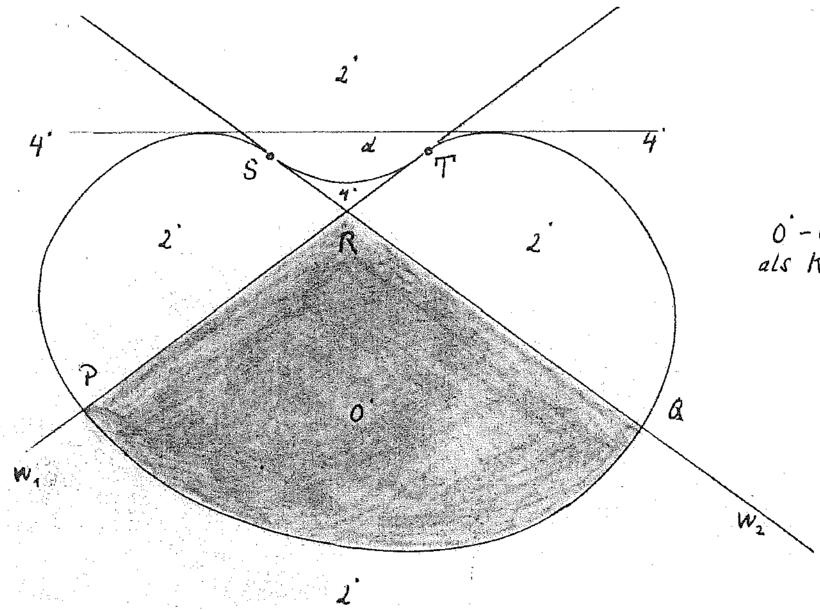


Abb. 20b

Betrachtung von Ganzheiten

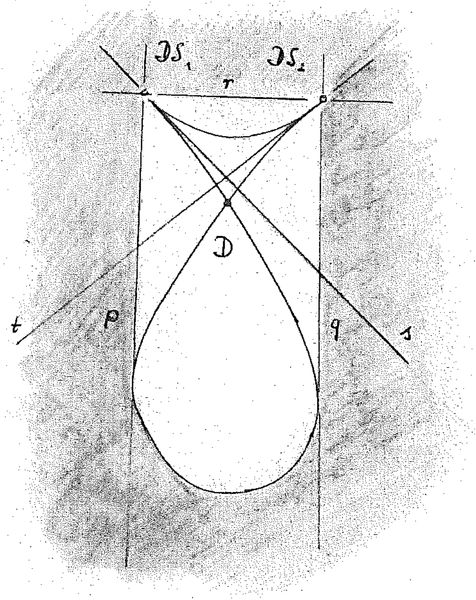
Die vorangehende Betrachtung zeigte eine Gliederungsmöglichkeit der Ebene durch Punkte und Geraden. In diesem Kapitel hingegen geht es um die Gliederung der Ebene in Kerngebiete und Hüllenbereiche durch geschlossene Kurven. Dadurch wird eine ganzheitliche Betrachtung von Formen möglich. Denn zu einer ganzheitlichen Betrachtung einer Form gehört nicht nur diese selbst, sondern auch die Gliederung ihres Umkreises *durch sie selbst*. So zeigt die nachstehende Abbildung 21a wie z.B. ein eingebuchtetes Oval mit seinen beiden Wendetangenten w_1 und w_2 die Ebene insgesamt gliedert. Diese Gliederung erfolgt in diskret voneinander getrennte Gebiete. Dabei bedeutet z.B. ein sogenanntes Zweipunktgebiet, dass von jedem Punkt dieses Gebietes zwei Tangenten an das Oval gezeichnet werden können. Abbildung 21b zeigt den dazu polaren Aspekt. Dabei entspricht dem O`Punkt-Kerngebiet der O`-Hüllenbereich mit seinen Geraden.

18 Deshalb wurden die 4 Hüllen seperat gezeichnet.



0'-Gebiet
als Kerngebiet

Abb. 21a



0'-Bereich
als Hüllenbereich

Abb. 21b

Es ist evident, dass eine solche Betrachtungsart auch neue Ausblicke eröffnet auf embryonale Bildevorgänge. Man sieht förmlich, was im Umkreis sich ereignen und differenzieren muss, bevor eine Invagination, wie z.B. in Abbildung 21a, als embryonale Bildegeste stattfinden kann.

Komplementäre Kurven mit speziellen Besonderheiten

Die folgenden Beispiele komplementär sich ergänzender Formen zeigen, in wie mannigfaltiger Weise diese komplementären Formen mit Hilfe der Polaritätsgesetze der Projektiven Geometrie erfasst und beschrieben werden können. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass alle diese hier gezeigten Formen in der Ebene zu denken sind. Dreidimensionale Raumformen sind im allgemeinen komplizierter. Die hier abgebildeten Formen besitzen Besonderheiten (Singularitäten), die sich ebenfalls in die Polaritätsgesetze einordnen lassen. Diese zueinander polaren

Singularitäten werden zunächst in den Abbildungen 22-24 einander gegenübergestellt. Es sind im wesentlichen fünf spezifische Formelemente, deren Kenntnis nötig ist, wenn man Formen bzw. Kurven in der Ebene charakterisieren will. Die in den Abbildungen 25-28 dargestellten zueinander polaren Kurvenformen sind Beispiele für das Vorkommen dieser immer wieder in charakteristischer Weise auftretenden Singularitäten.

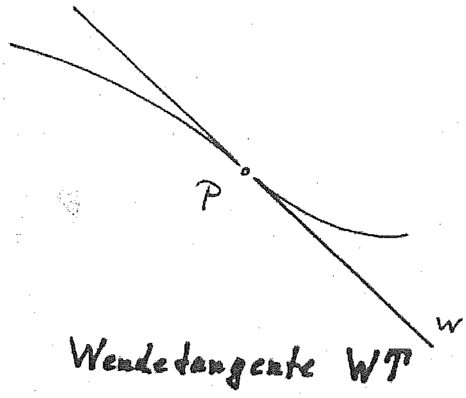


Abb. 22a

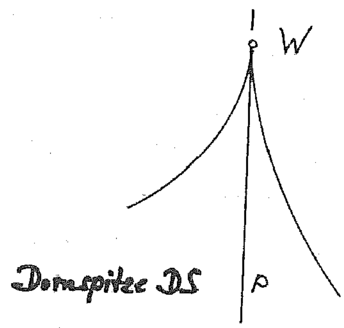


Abb. 22b

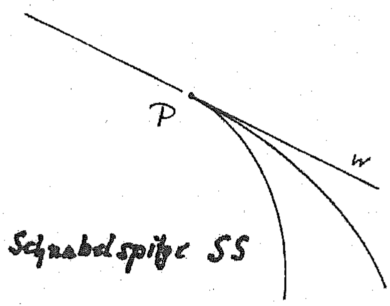


Abb. 23a

(zu sich selbst polar)

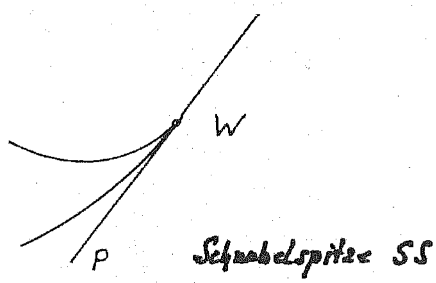


Abb. 23b

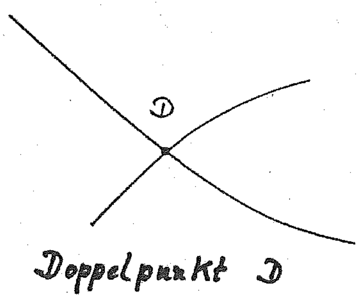


Abb. 24a

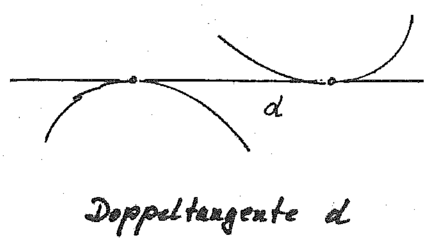


Abb. 24b

Zueinander polare Kurvenformen

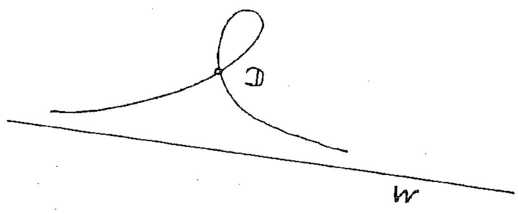


Abb. 25a

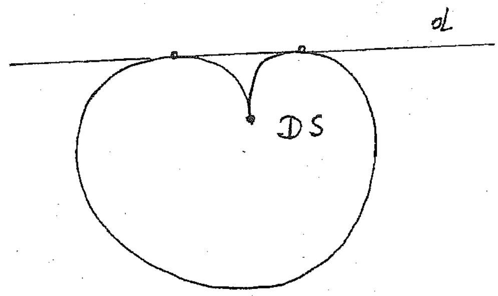


Abb. 25b

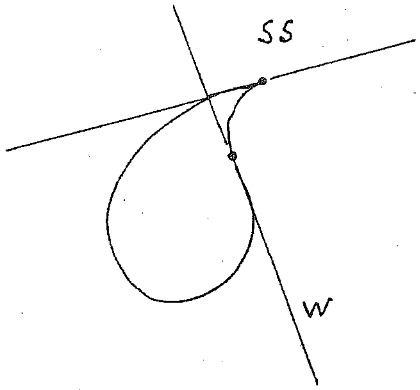


Abb. 26a

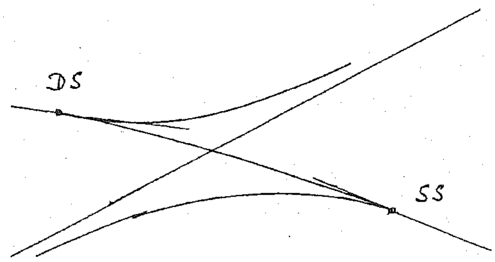


Abb. 26b

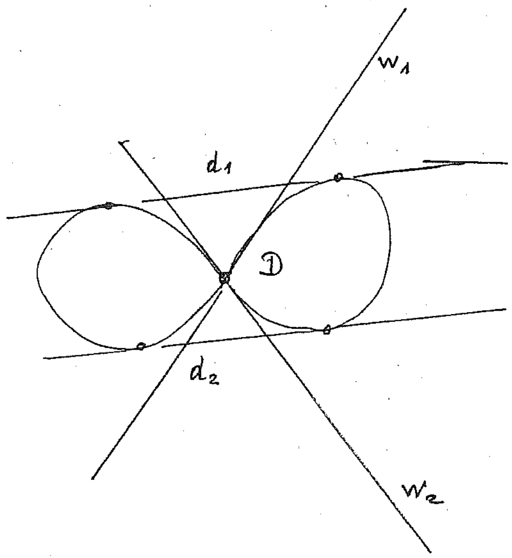


Abb. 27a

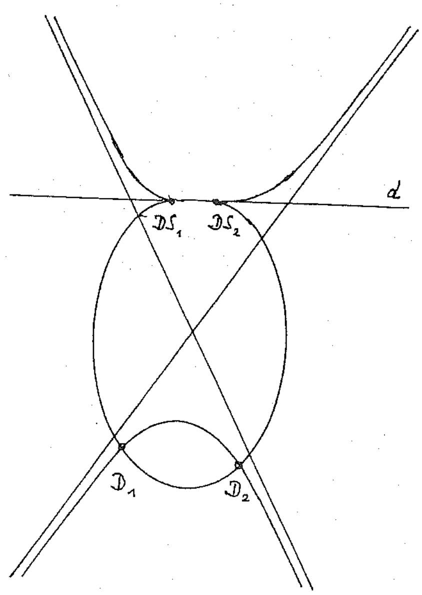


Abb. 27b

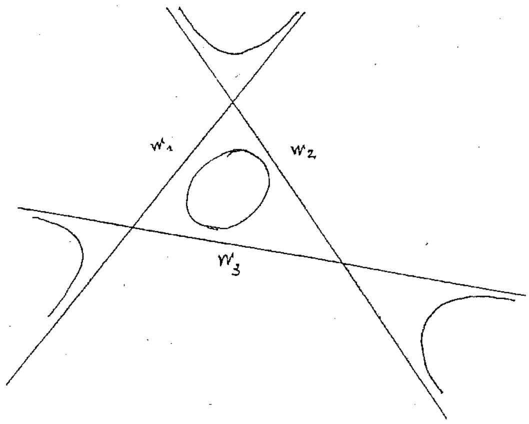


Abb. 28a

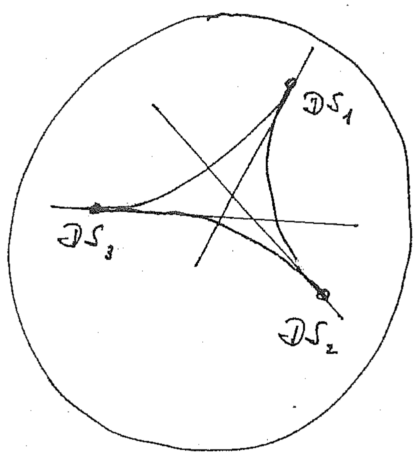


Abb. 28b

Die zueinander polaren Kurven (Abbildung 28a und Abbildung 28b) haben gegenüber den Kurven in den Abbildungen 25 – 27 eine Besonderheit. Sie sind anschaulich nicht unikursal, d.h. einfach durchlaufend. Vielmehr fallen sie anschaulich auseinander, obwohl *sie eine* zusammengehörige Kurve darstellen. Dem dreispitzigen Formelement in einem Oval der Abbildung 28b entspricht die komplementäre Form, welche die Ferngerade dreifach überschreitet, drei Wendetangenten und ein „inneres“ Oval besitzt.

Eine solche Betrachtungsart zeigt, dass etwas, was räumlich anschaulich getrennt auftritt, dennoch zusammen gehören kann. Damit sind durch die Projektive Geometrie Gedankenformen gegeben, die sich in Embryologie und Physiologie unmittelbar auf funktionelle Gliederungsprinzipien und Gesetzmässigkeiten anwenden lassen. Denn hier gehört es zum Bestand der Tatsachen, dass z.B. Drüsen als Organe und ihre Sekrete als Wirkstoffe funktionell zusammengehören. Aber mehr noch. Hermann Poppelbaum knüpfte schon 1952 an diesen Tatbestand Überlegungen an, die bis heute inspirierend auf Biologie und Medizin wirken:[19] *Im Unterschied von dem gewöhnlichen, gewissermassen inerten, gleichgültig ausgebreiteten Raume ist der Raum der ätherischen (bildenden) Kräfte differenziert und konfiguriert. Dadurch haben die Stoffe, die „in ihn zu liegen kommen“, eine ganz verschiedene Bedeutung, je nach dem, wo sie sich gerade befinden. Die Identität der Partikel, eine Selbstverständlichkeit bei der vulgären Materievorstellung, wird damit aufgehoben. Ein Stoff ist, was er ist, nur im Zusammenhang mit der Stelle, die er gerade einnimmt. (...) Betrachten wir etwa eine Leberzelle: sie bildet Glykogen aus Zucker und umgekehrt, erzeugt aus Aminosäuren und Ammoniak Harnstoff und Harnsäure, zerlegt Hämoglobin, produziert die Gallensäuren, vermag ihr zugeführte Gifte festzuhalten oder unschädlich zu machen u.s.f. In einer Zelle, deren Grösse sich auf den hundertsten Teil eines Stecknadelkopfes schätzen lässt, spielen sich mindestens zehn, vermutlich aber noch viel mehr chemische Vorgänge nebeneinander ab. Dass bei diesem Getriebe der Bestand der Zelle möglich ist, liegt daran, dass er gar nicht vom Zellinnern her, sondern vom Umkreis aus aufrechterhalten wird. R. Steiner sprach es aus, dass der ganze Kosmos in einer einzigen Zelle wirksam sei.*

Die Zusammendrängung vieler, widersprechender Vorgänge auf winzigem Raum ist nur dann verständlich, wenn man berücksichtigt, dass der Zellinhalt sich „in dem Gegenraum“ befindet, der auf seine Weise ebenso unendlich ist wie der umgehende Trivialraum.

Die oben erwähnten Untersuchungen von Adams[20] *und Locher über den Bildekräfte-Raum erlauben denn auch, sich den Zusammenhang der Organe untereinander in einem und demsel-*

19 Poppelbaum, Hermann: Begriff und Wirkungsweise des Ätherleibs. In: Bockemühl, Jochen (Hrsg.): Erscheinungsformen des Ätherischen. Stuttgart 1977.

20 Adams, George: Strahlende Weltgestaltung. Synthetische Geometrie in geisteswissenschaftlicher Beleuchtung. Verlag am Goetheanum, Dornach ^{2}1965.

ben Organismus vielfältig und differenziert zu denken, wobei die enger zusammengehörenden Organe gar nicht benachbart zu sein brauchen. Sie sind eben im 'Gegenraum' gewissermassen nebeneinander, wie etwa Nieren und Sehorgane, Dickdarm und Vorderhirn, in 'ätherischer Nachbarschaft'. Aus der Pathologie sind ja vielfach Tatsachen bekannt, die auf eine gemeinsame Erfassung entfernter Organe durch denselben Krankheits-Impuls hindeuten, während das anatomische Zwischenfeld unberührt bleibt.

Nochmals das Gleiche anders

Zunächst stellen wir die Frage: Was ist ein Kurventyp? Man spricht von Kurven gleichen Typs, wenn sie die gleichen Singularitäten haben und zwar in der jeweilig gleichen Anzahl. Die hier abgebildeten Kurven (Abbildung 29a-f) besitzen jeweils Besonderheiten: Eine Wendetangente w und einen Doppelpunkt D. In der Zeichnung 29a ist dies unmittelbar zu erkennen. Die Kurven der Abbildungen 29b-f können jedoch auch in ihrer Gänze einfach durchlaufen werden. Es bedarf aber einiger Übung sie auch als zum gleichen Typus gehörig zu erkennen. Das liegt daran, dass gewisse Elemente der Kurven – zumeist bestimmte Singularitäten – in der Funktion von Fernelementen auftreten. Die in den Kurven eingezeichneten Pfeilrichtungen geben jeweils eine von zwei Möglichkeiten an, die Kurve zu durchlaufen. Sie geben also den sogenannten Durchlaufungssinn an und verlangen vom Betrachter die Fähigkeit, eine Kurve – über das Unendliche gehend – als zusammenhängend zu erkennen. Eine solche Betrachtungsart führt an die Grenze einer anfänglichen imaginativen Fähigkeit. Vergleicht man diese Betrachtungen mit derjenigen an der Desargue`schen Konfiguration (vergl. S. 106) dann fällt auf, dass *ein* und *dieselbe* Konfiguration verschieden angesehen werden kann und dass es bei den 6 *verschiedenen* Kurven darauf ankommt *das Gleiche in den veränderten Formen zu erkennen.* Dies gelingt mit der genannten imaginativen Fähigkeit, die auf dem hier angezeigten geometrischen Weg systematisch ausgebildet werden kann. Dass dadurch auch der Blick geschult wird, im Pflanzen- und Tierreich Typen zu erkennen und systematisch zu erarbeiten, ist evident. Sind es doch die Gesetze der Mathematik und Geometrie, die der ganzen Evolution zugrunde liegen. Dass die „Götter geometrisieren" ist altes Mysterienwissen. Der Mensch kann diese Götterweisheit in sich erkennen und handhaben lernen. Daher schrieb Rudolf Steiner einmal für den Grafen Polzer-Hoditz den bemerkenswerten Satz auf: *„Wenn ein junger Mensch Mathematik studiert, wird in ihm ein Götterkind geboren."* Dieses Götterkind, diese reine imaginative Fähigkeit, gilt es auszubilden. Die in reinem mathematischen Denken veranlagte imaginative Fähigkeit darf nicht dadurch getrübt werden oder verloren gehen, dass man Mathematik und Geometrie nur anwendet, ohne deren reine Quelle zu erkennen. Sich selbst in der schöpferischen Nachbildung und Aneignung dieser reinen Gedankenformen zu erkennen, macht eine zentrale Dimension spiritueller Selbsterfahrung aus.

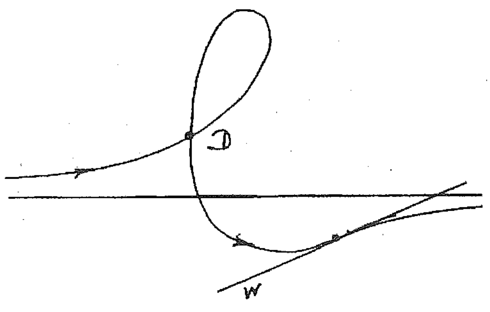


Abb. 29a

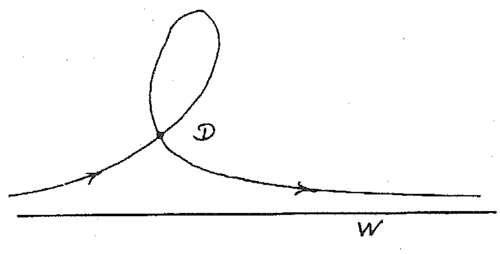


Abb. 29b

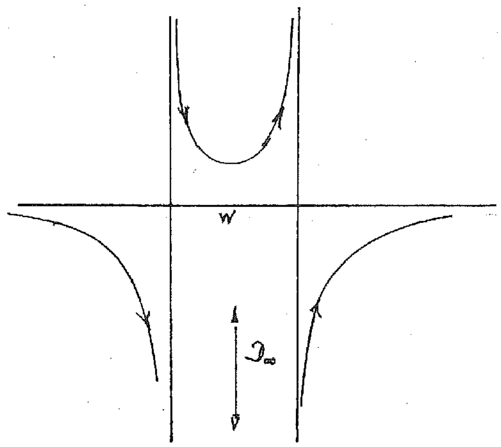


Abb. 29c

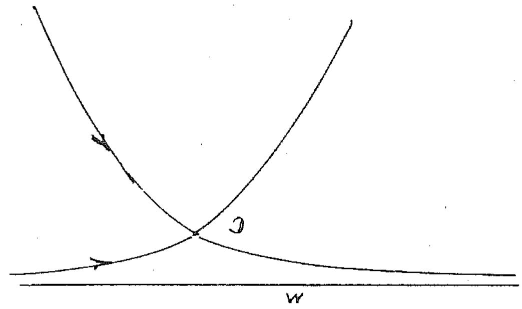


Abb. 29d

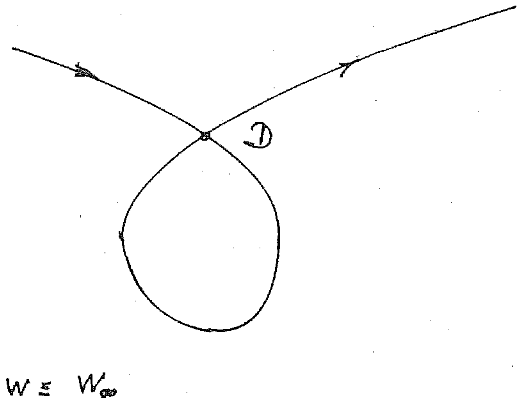


Abb. 29e

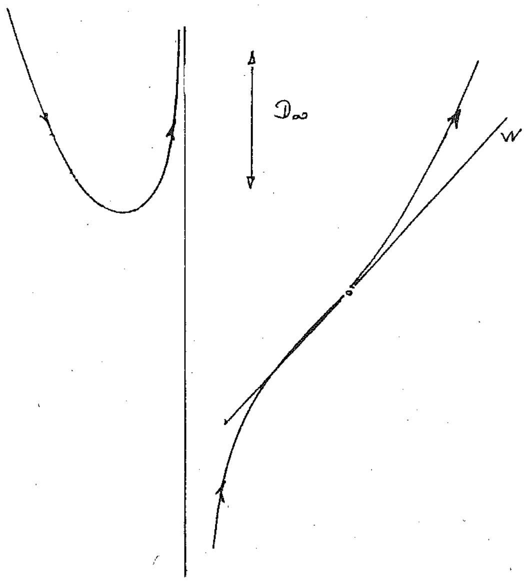
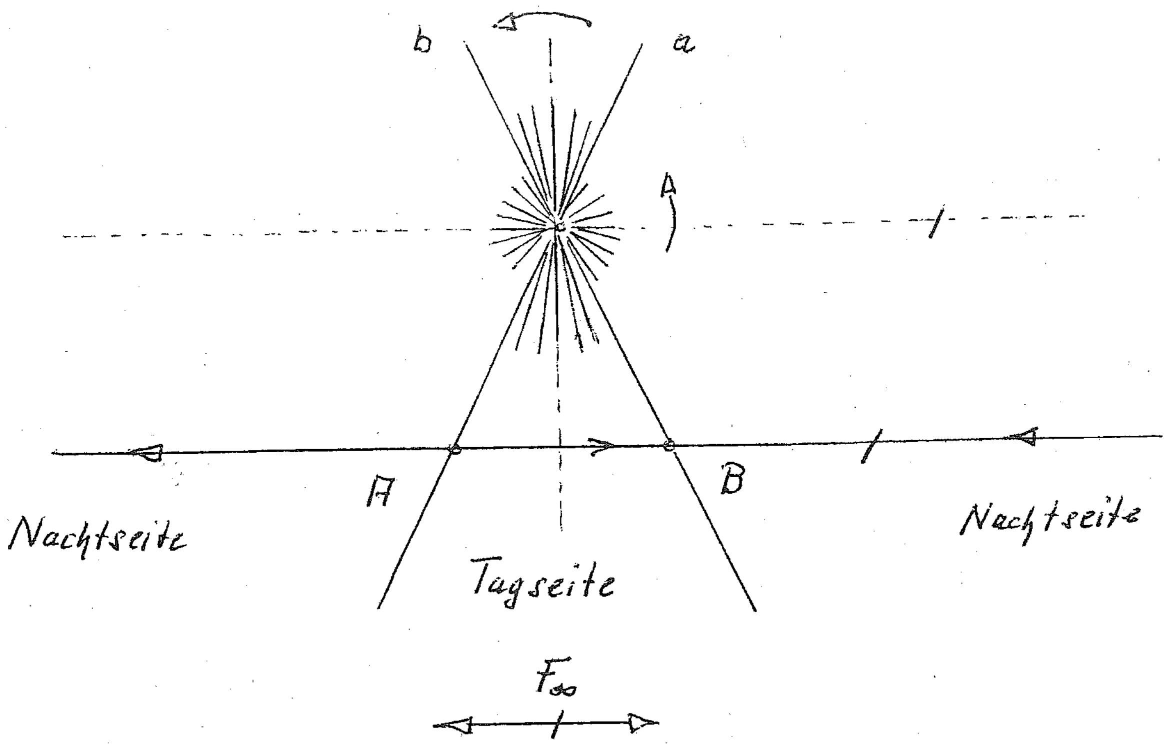


Abb. 29f

Schlussbetrachtung

Abstrakte Betrachtungen sind dann sinnvoll, wenn Besonderheiten bzw. Einzelheiten aus einem grösseren Zusammenhang detailliert erfasst werden müssen: eine spezielle Singularität einer Kurve, ein einzelnes Blatt einer Eiche, die Leber als Organ des Menschen etc. Immer ist aber dabei im Auge zu behalten, dass solche Details dann isolierte Einzelheiten eines übergeordneten Ganzen sind. Der Raum als Idee ist ein solches übergeordnetes Ganzes. Dieser Tatsache kann man sich nur schrittweise übend nähern. Ein ganz elementares Beispiel ist das folgende:

Eine endliche horizontale Strecke sei durch die beiden Punkte A und B begrenzt. Eine Gerade g durch die beiden Punkte geht aber nach links und rechts über diese beiden Punkte hinaus, und zwar unbegrenzt weit. Dabei entfernt sich ein Punkt, der sich nach links bewegt immer mehr von einem solchen, der sich nach rechts bewegt.



Der rechts liegende, unendlich ferne Punkt F∞ ist der gleiche wie der links liegende. Der Doppelpfeil bringt diese Tatsache symbolisch zum Ausdruck.

Durch die Projektive Geometrie lassen sich diese beiden zunächst entgegengesetzten Bewegungen als sich aufeinander zu bewegend erfassen, indem sich beide im Fernpunkt F∞ der Geraden g treffen. Qualitativ erfasst können wir sagen: Die endliche Strecke von A nach B lässt sich auf der Tagseite durchlaufen, die „unendliche Strecke" von A nach B dagegen auf der Nachtseite. Jetzt ist die Gerade als Ganzes erfasst.

Welche Bedeutung eine solche elementare Erweiterung des Bewusstseins für einen Menschen haben kann, lässt sich am Beispiel einer Schilderung des jungen Rudolf Steiner aus seinem Lebensgang erahnen:[21]

Ein ausschlaggebendes Erlebnis kam mir damals geradezu von der mathematischen Seite. Die Vorstellung des Raumes bot mir die grössten inneren Schwierigkeiten. Er liess sich als das allseitig ins Unendliche laufende Leere, als das er den damals herrschenden naturwissenschaftlichen Theorien zugrunde lag, nicht in überschaubarer Art denken. Durch die neuere (synthetische) Geometrie, die ich durch Vorlesungen und im Privatstudium kennenlernte, trat vor meine Seele die Anschauung, dass eine Linie, die nach rechts in das Unendliche verlängert wird, von links wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückkommt. Der nach rechts liegende unendlich ferne Punkt ist derselbe wie der nach links liegende unendlich ferne.

Mir kam vor, dass man mit solchen Vorstellungen der neueren Geometrie den sonst in Leere starrenden Raum begrifflich erfassen könne. Die wie eine Kreislinie in sich selbst zurückgehende gerade Linie empfand ich wie eine Offenbarung. Ich ging aus der Vorlesung, in der mir das zuerst vor die Seele getreten ist, hinweg, wie wenn eine Zentnerlast von mir gefallen wäre. Ein befreiendes Gefühl kam über mich. Wieder kam mir, wie in meinen ganz jungen Knabenjahren, von der Geometrie etwas Beglückendes.

---

21 Rudolf Steiner: Mein Lebensgang. Dornach [9]2000, S. 64.