Mathematisch - Physikalisches Institut
Dr.G. Unger
Postscheck
Math.-Ph.Inst.Dornach: BASEL 4o-21 147
Dr.G.U.Math.-Ph.Korr.: STUTTGART 428 17

CH-4143 Dornach, Ob. Zoelweg 34
Erscheint: vierteljährlich
Abonnement: Fr./DM 15,-/Jahr
Offsetdruck: H. Welter, Basel
Nr. 67 29. September 1968

Mathematisch - Physikalische Korrespondenz

unter Berücksichtigung angrenzender Gebiete wie

B i o p h y s i k , K y b e r n e t i k , P ä d a g o g i k

herausgegeben von G. Unger

Michaeli 1968

Liebe Freunde der M.-Ph. Korrespondenz!

Sie finden zunächst die Einladung zur Mathematisch-Astronomischen Schulungswoche, die in Dornach vom 27. Oktober bis 3.November stattfinden wird. Der Bericht der vorjährigen Herbstschulungswoche erschien in der Weihnachtsnummer unserer Korrespondenz. (Der Bericht von der Hochschulwoche nach Ostern ging Ihnen von der Sektion zu. Für die bereits eintreffenden Unkostenbeiträge sei auch an dieser Stelle gedankt.)

Wir bringen in dieser Nummer den Beginn einer Arbeit von Franz Kaiser, welche versucht, in die unabsehbare Fülle der Formen freier Kurven - ich möchte sagen - eine metamorphosische Ordnung zu bringen. (Der Herausgeber bittet, einige Uneinheitlichkeiten in der Bezeichnung zu entschuldigen. Durch die immer langsamer werdende Post waren Rückfragen während der Drucklegung nicht mehr möglich.) Wir fügen am Ende der Arbeit ein Blatt mit der verkleinerten Wiedergabe einer Gesamtübersicht der Formen von Kurven fünfter Ordnung bei, wie sie mir Herr Kaiser noch vor dem Aufsatz in einem Brief mitgeteilt hat. Herr Kaiser schrieb, daß er durch das Programm unserer Ostertagung angeregt war, sich gleichzeitig mit seinen eigenen früheren Ansätzen auf diesem Feld zu beschäftigen. Man möchte wünschen, daß ähnliche Initiativen öfter ergriffen werden - und ebenso fruchtbar seien!.

Professor Gershom Scholem ist der Altmeister für Wesen und Geschichte der jüdischen Mystik und spielt eine bedeutende Rolle im Geistesleben des heutigen Israel. Ich durfte ihn Anfang Dezember vergangenen Jahres kurz aufsuchen, wobei er auch auf seine Münchener Zeit, ca. 1917, als Student (ursprünglich der Mathematik) zu sprechen kam. Er ist dort dem Wirken Rudolf Steiners begegnet und hatte auch Aufsätze von Carl Unger von jener Zeit in Erinnerung - was durch die Namensgleichheit dem Gespräch die Wendung gab. Einen Sonderdruck der Zeitschrift "Commentary", den ich erhielt, erlaube ich mir im Faksimile beizufügen. Ich bin überzeugt, daß die geistvollen Ausführungen über die Analogie Computer - Golem Ihr allergrößtes Interesse finden wird.

G.U.

MATHEMATISCH-ASTRONOMISCHE SEKTION

Interne Schulungswoche für Mathematiker und Studenten
von Sonntag, 27. Okt. 1968 bis Sonntag, 3. Nov. 1968

Antworten auf die Neue Mathematik

Erüben eines lebendigen Denkens und Vorstellens in geometrischen Verwandlungen

Zeit	Sonntag 27.lo.	Montag 28.lo.	Dienstag 29.lo.	Mittwoch 3o.lo.	Donnerst 31.lo.	Freitag 1.11.	Samstag 2.11.	Sonntag 3.11.
8.15 - 9.15 Uhr		E u r y t h m i e						
9.3o - lo.3o Uhr	Eröffnung und Beginn des Kurses Dr.G.Unger	Dr. F. Zauner: Liniengeometrie						
11.oo - 12.oo Uhr		G. Glöckler: Berührungstransformationen nach Sophus Lie						Abschluß
15.3o - 16.3o Uhr		A. Bernhard: Polareuklidische Geometrie						Pestalozzi von Albert Steffen
17.oo - 18.oo Uhr	16.3o Uhr Eurythmie	A. Bernhard: Ubungen zum Kurs					Fortsetzung Weg-Kurven Dr.G.Unger	
		Gemeinsame Lektüre und Aussprachen					Eurythmie	

Die Arbeitsweise der früheren Schulungswochen soll intensiviert werden: Bekanntes erlebnismäßig zu vertiefen und weniger Bekanntes gemeinsam zu erüben. Im besonderen soll die Beschäftigung mit den Lie'schen Gruppen das Denken beweglich machen, um das Lebendige besser zu erfassen. Es folgen kurzgefaßte Angaben über die Kurse.

Dr. F. Zauner:

Die Liniengeometrie im Raum zeigt zwar gewisse Entsprechungen zur Punktgeometrie im vierdimensionalen Raum, sie nimmt aber aus zwei Gründen einen anderen Charakter an. Die Plückersche Bedingung, der ihre Elemente unterliegen, ist vom zweiten Grade; außerdem erfüllt eine lineare Mannigfaltigkeit bereits bei zwei Parametern den gesamten Punktraum. Diese besondere Eigenart des Strahlenraumes im Gegensatz zum Punkt- oder Ebenenraum findet bis in die analytische Behandlung hinein ihren Ausdruck. So kann man an Bekanntes anknüpfend in neue und fruchtbare Gebiete der geometrischen Anschauung vordringen.

G. Glöckler:

Sophus Lie hat kontinuierliche geometrische Transformationen untersucht (zu ihnen gehören Dilatation, Fußpunkttransformation, Polarreziprozität u.a.). Ihr Studium bietet eine gute Grundlage, um später die "stetige Vermittlung von Korrelationen" von Locher-Ernst zu erarbeiten. Im besonderen soll der Begriff der Berührungstransformation eingeführt und an Beispielen geometrisch und differential-geometrisch behandelt werden.

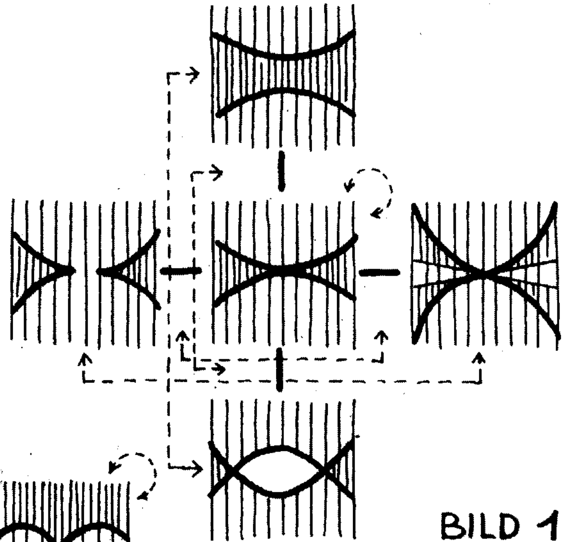


BILD 1

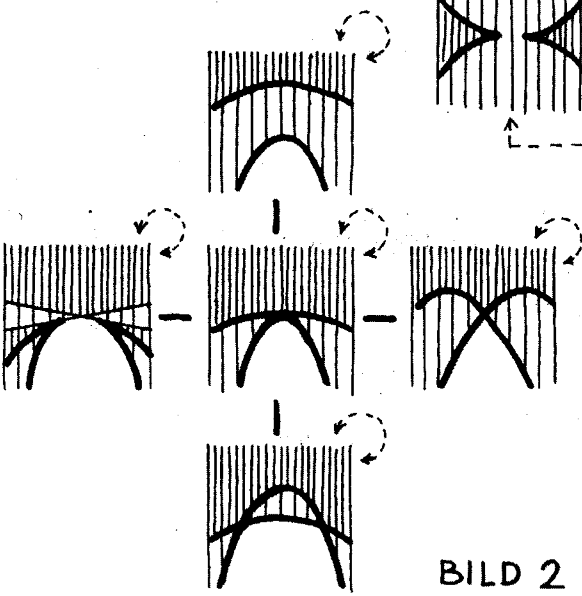


BILD 2

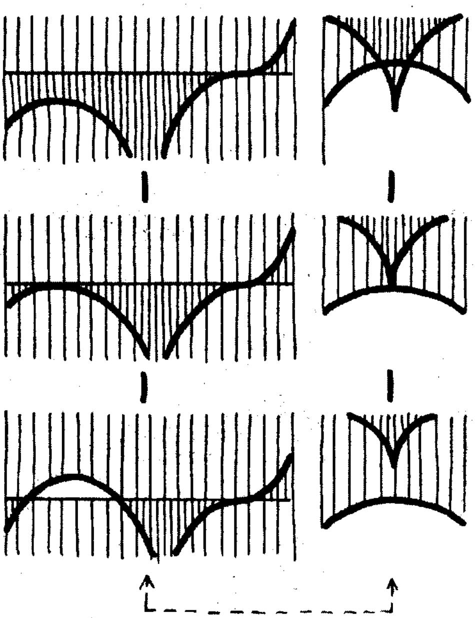


BILD 3

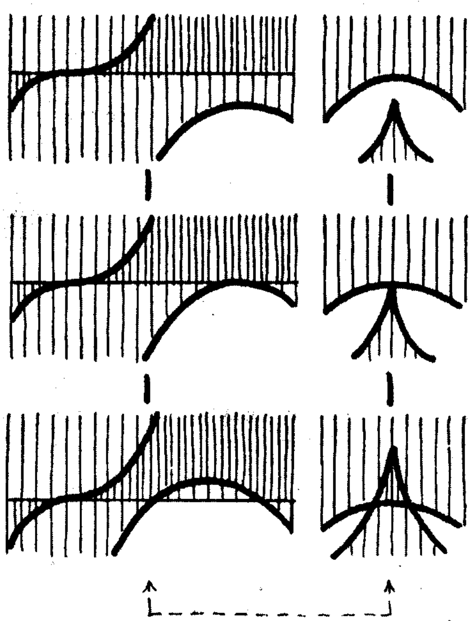


BILD 4

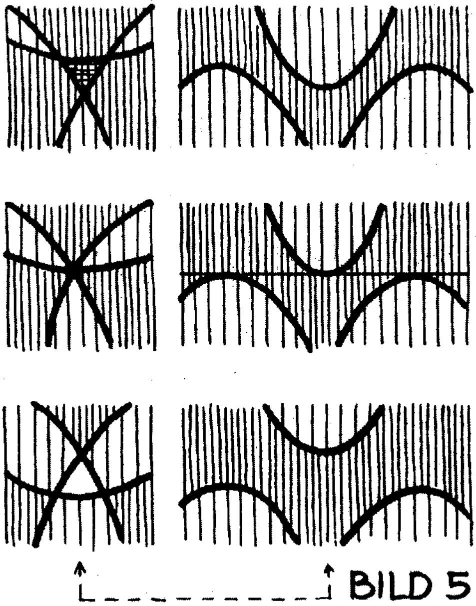


BILD 5

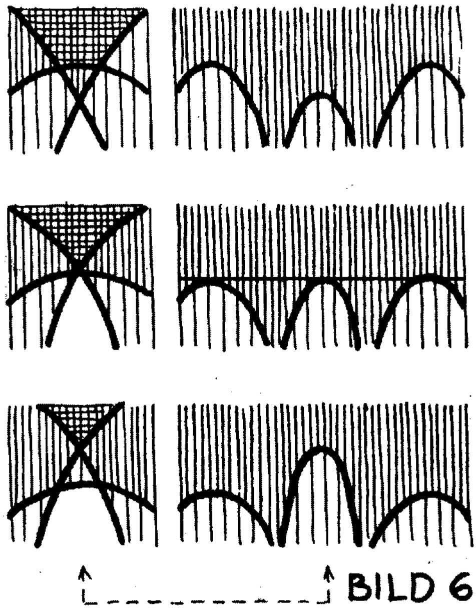


BILD 6

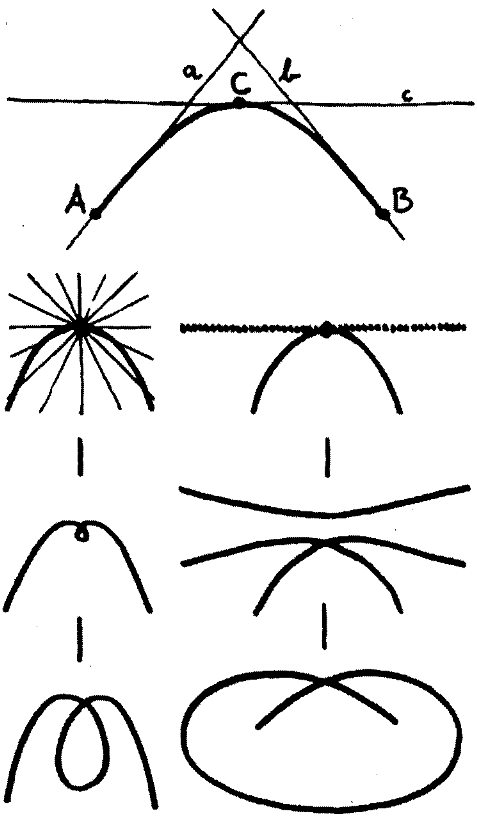


BILD 7

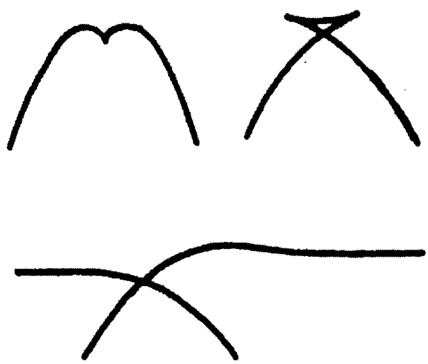


BILD 8

BILD 9

A. Bernhard:

Vor einem Jahr wurden die Grundbegriffe der polar-affinen Geometrie durchgenommen. Dieses Jahr sollen neu hinzutreten die Grundbegriffe der polar-euklidischen Geometrie, rechte Strecke, Winkelkreis, Schabung usw. Übungen sollen dazu verhelfen, diese Begriffe selbständig handhaben zu lernen, so daß man mit der Geometrie im Gegenraum wirklich vertraut werden kann.

Dr. G. Unger:

In der Hochschulwoche vom 2o.- 25. April 1965 wurden Metamorphosen aus Transformationsgruppen behandelt (Sektionsbericht 1965 s.u.). Jetzt soll in den Kursstunden besonders geübt werden, die "Weg-Kurven" und bestimmte "Schmiegflächen" konstruktiv und rechnerisch von den Elementen aufbauend zu beherrschen.

Es wird den Teilnehmern nahegelegt, den Bericht von der letzten Hochschulwoche zu lesen; so können wir an das Erreichte ohne großen Zeitverlust fruchtbar anknüpfen (Mathematisch-Physikalische Korrespondenz, Nr. 64, Januar 1968, erhältlich bei Mathematisch-Physikalisches Institut, Oberer Zielweg 34, ebenso Sektionsbericht 1965.)

Anmeldungen: an Mathematisch-Astronomische Sektion erbeten.

Kursbeitrag: Fr. 3o,-- (Studierende die Hälfte. Eurythmieaufführung und "Pestalozzi" zu halben Preisen.)

Quartierbestellung: bitte an das Wohnungsbüro richten.

BEITRAG ZUR SYSTEMATIK DER FREIEN KURVEN

Franz Kaiser, Wien

1. Es gibt eine Lehre von den elementaren Umformungen ebener Kurven auf der projektiven Ebene, die in sich ebenso polar aufgebaut ist, wie die projektive Geometrie. Die Auflösung von Doppelpunkten und Doppeltangenten, wie sie Wieleitner und Locher vortragen, sind aus solcher Sicht schon Operationen höherer Ordnung.

2. Das Studium der "Schleifenkurven", die außer Doppelpunkten und Doppeltangenten keine Singularitäten aufweisen und die immer gerader Ordnung und Klasse sind, bildet die Grundlage einer Systematik der freien Kurven.

3. Für die Gliederung des Punktfeldes durch eine Kurve haben die Wendetangenten, für die Gliederung des Strahlenfeldes die Spitzpunkte, die gleiche Bedeutung wie die Kurventeile.

4. Es gibt, sowohl im Hinblick auf die Gliederung des Punktfeldes wie im Hinblick auf die des Strahlenfeldes zwei Typen von Kurven, je nachdem, ob $P-g+F = 1$ oder 2 ist. (Siehe Seite 1o oben des folgenden Aufsatzes)

5. Die Eilinie stellt in bezug auf ihren Typ eine Ausnahme dieser Regel dar. Sie ist vom Typ 2 trotzdem $P-g+F = 1$.

6. Eine Kurve ungerader Ordnung kann nur dem Typ 1 bezüglich des Punktfeldes, eine Kurve ungerader Klasse nur dem Typ 1 bezüglich des Strahlenfeldes angehören.

7. Eine Kurve mit mindestens 1 Wendetangente kann nur dem Typ 1 bezüglich des Punktfeldes, eine Kurve mit mindestens 1 Spitzpunkt nur dem Typ 1 bezüglich des Strahlenfeldes angehören.

8. Die Auflösung eines mehrfachen Punktes oder einer mehrfachen Tangente durch Auseinanderdrücken der Bögen ändert den Kurventyp nicht.

E I N L E I T U N G

Die angestrebte und in ihren vier Aufgabenstellungen am Ende dieser Einleitung näher gekennzeichnete Untersuchung führt die Betrachtung weiter, welche von Prof. Locher in seinem Buch "Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven"begonnen wurde (Birkhäuser Verlag, Basel, 1952). Entwicklungen, Beweise, Formulierungen und Benennungen, die dort ausgeführt sind, werden vorausgesetzt.

Inhalt der Untersuchung sind die elementaren ebenen Kurven, die Wendestellen, Dornspitzen und Schnabelspitzen als Singularitäten erster Art und Doppel- und mehrfache Punkte und Tangenten als Singularitäten zweiter Art aufweisen können und die im Endlichen oder über die unendlich ferne Gerade der Darstellungsebene in sich geschlossen sind.

Darstellungsebene ist die projektive Ebene als Punktfeld und als Strahlenfeld. Kein Punkt und kein Strahl, auch nicht die unendlich ferne Gerade, sind von vornherein ausgezeichnet. Jede Kurve wird gleichzeitig als Punktreihe und als Strahlenbüschel höherer Ordnung aufgefaßt und stets wird ihr Verhältnis sowohl zum Punktfeld als auch zum Strahlenfeld betrachtet.

Daher wird nie das Bewußtsein von der Doppelnatur der gesamten so betriebenen Geometrie verloren. Zu jeder Kurve gibt es eine polare Form, die zum Strahlenfeld ebenso orientiert ist wie die erste Kurve zum Punktfeld. Wendestellen werden dabei durch Dornspitzen ersetzt, mehrfache Punkte durch mehrfache Tangenten usw. Selbst dann, wenn die polare Form identisch ist mit der Ausgangskurve, können Form und polare "Gegenform" voneinander unterschieden werden.

Metrische und projektive Maßbestimmungen werden nicht beachtet. Daher können auch keine imaginären Elemente erfaßt werden. Dies ist die Wurzel für viele Unterschiede der freien Geometrie der Kurven zur Geometrie algebraischer Kurven. In jener sind z.B. Kurven mit abzählbar unendlich vielen Wendestellen möglich, die dennoch nur höchstens vier Schnittpunkte mit einer Geraden haben, also vierter Ordnung sind. Die Zusammenfassung der Kurven nach Ordnung und Klasse hat deshalb in der freien Geometrie nicht die gleiche tiefgreifende Berechtigung wie in der Geometrie algebraischer Kurven. Dennoch soll sie im folgenden angewandt werden. (Ordnung der Kurve: gegeben durch die höchste Zahl von Schnittpunkten der Kurve mit mindestens einer Geraden des Strahlenfeldes; Klasse der Kurve: gegeben durch die höchste Zahl von Tangenten an die Kurve aus mindestens einem Punkt des Punktfeldes.)

Die Methode der Untersuchung soll darin bestehen, daß vornehmlich nicht einzelne Kurven oder engbegrenzte Kurventypen - etwa die Kurven einer bestimmten Ordnung oder Klasse - ins Auge gefaßt werden, sondern die unter festgelegten Voraussetzungen möglichen Kurventransformationen. Jede Kurve ist nur Ausschnitt aus einer Folge von Kurven, die ineinander durch Formwandlung übergeführt werden können. Wie jeder Kurvenform eine Gegenform polar entspricht, so auch jeder Transformation eine dazu polare. So stehen z.B. polar zueinander das Eindrehen einer Wendestelle und das Ausziehen einer Dornspitze, das Einebnen ("Eingeraden" wäre wohl sachgemäßer) zweier benachbarter Wendestellen und das Zusammenziehen in einen Punkt zweier benachbarter Dornspitzen usw.

Wenn alles in steter Bewegung gedacht wird, woran sollen dann"gleiche" Kurven als solche erkannt werden? Sie müssen sicher nicht auf den ersten Blick "gleich aussehen", weil ihrer Lage zur unendlich fernen Gerade keine Bedeutung beigemessen wird. Im hier gemeinten Sinn müßten z.B. Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel, aber auch Eilinie in jeder möglichen Proportion als "gleiche Kurve" gelten.

Jede Kurve gliedert das Punktfeld und das Strahlenfeld in verschiedene, voneinander durch Kurvenstücke oder Wendetangenten bzw. Spitzpunkte getrennte Punktgebiete und Strahlenbereiche. Alle Punkte eines bestimmten Gebietes entsenden keine oder die gleiche Anzahl Tangenten an die Kurve, alle Punkte eines benachbarten Gebietes eine andere Anzahl. Alle Geraden eines bestimmten Bereiches haben keine oder die gleiche Anzahl Schnittpunkte mit der Kurve, alle Geraden eines benachbarten Bereiches eine andere Anzahl. Diese jeweilige Anzahl an Tangenten bzw. Schnittpunkten möge "Wert" des betreffenden Gebietes oder Bereiches genannt sein. Der höchste auftretende Wert bestimmt die Ordnung bzw. Klasse der Kurve. Jedes Gebiet und jeder Bereich ist charakterisiert durch seinen Wert, die Art seiner Umrandung (Kurvenbögen, Wendetangenten bzw. Spitzpunkte) und durch seine Nachbarschaften. Zwei Kurven gelten als gleich, wenn die von ihnen hervorgerufenen Gliederungen des Punkt- bzw. Strahlenfeldes gleich sind. Dann stimmen sie auch nach Klasse, Ordnung, Anzahl und Anordnung ihrer Singularitäten erster und zweiter Art überein. (Diese Aussagenfolge ist nicht umkehrbar.)

Es ergibt sich nicht nur die Gliederung der Fläche in Punktgebiete und Strahlenbereiche aus der Kurve, sondern es ist auch die Kurve als Grenzgebilde, das sich aus einer bestimmten Flächengliederung ergibt, zu betrachten. Es wird daher die Auswirkung jeder Transformation auf die Flächengliederung aber auch die Auswirkung jeder Änderung der Flächengliederung auf die Kurve zu beachten sein.

Jede Änderung der Flächengliederung ist gleichzeitig der Übergang zu einer anderen Kurve. Zwei Kurven sind "benachbart", wenn eine Änderung der Flächengliederung genügt, um von einer zur anderen zu kommen. Es ist möglich, daß mehrere nacheinander ausgeführte Änderungen der Flächengliederung zu einer Kurve führen, die bei Durchführung einer Änderung ebenfalls erreicht würde. Ist ein solcher Übergang aber nicht möglich, dann sind Ausgangs- und Endkurve "getrennt" von einander durch die "dazwischenliegenden" Kurven. Eine Übersicht über die Vielfalt der Kurven zu gewinnen, ist gleichbedeutend damit, einen Einblick in die Struktur dieser Nachbarschaften und Nicht-Nachbarschaften innerhalb des topologischen "Raumes" der Kurven zu bekommen.

Innerhalb dieses Raumes gibt es zu jeder Kurve bestimmter Ordnung und Klasse ihre Gegenform, bei welcher Ordnung und Klasse vertauscht sind. Eine Mittelzone bilden diejenigen Kurven, für die Ordnung und Klasse gleich ist. Innerhalb dieser liegt als Kerngebiet dasjenige der Kurven, die zu sich selbst polar sind. Durch zwei zueinander polare Transformationen kann jede Wendestelle und jede Dornspitze in je eine Schleife übergeführt werden. Jede beliebige Kurve mit derartigen Singularitäten kann in ebensovielen Schritten, wie diese Singularitäten vorhanden sind, in eine Kurve verwandelt werden, die nur Doppelpunkte und Doppeltangenten aufweist. Es handelt sich dabei stets um Kurven gerader Ordnung und Klasse. Die Lehre von diesen "Schleifenkurven" bildet das Rückgrat einer Strukturlehre des Kurvenraumes. Sind ihre Gesetze bekannt, dann lassen sich die der Kurven mit Wendestellen und mit Dornspitzen unschwer daraus ableiten.

Damit zeichnen sich einige konkrete Aufgaben ab:

Studium der Kurventransformationen. Aufzeigen von Elementartransformationen, aus denen andere, kompliziertere aufgebaut werden können. Aufstellen einer Systematik der Elementartransformationen.

Studium der Flächengliederungen. Allgemeine Eigenschaften derselben. Auswirkung der Elementartransformationen.

Studium der Schleifenkurven, ihrer Transformationen und ihrer Flächengliederungen. Bedingungen der Transformationen, die zu Kurven mit Wendestellen, Dornspitzen und Schnabelspitzen führen.

Studium der Struktur des Raumes aller Kurven.

ELEMENTE DER UMFORMUNG

Jede Kurve kann in einzelnen Abschnitten oder über ihre gesamte Ausdehnung in kleineren und größeren Schritten verformt werden. Wird eine konkrete Reihe von ineinander übergeführten Formen betrachtet, so können die Ausgangsform, die Endform und alle Zwischenformen angeschaut werden. Haben alle die gleichen Eigenschaften in bezug auf Singularitäten, deren Anzahl, Anordnung usw. auch in bezug auf die Gliederung von Punkt- und Strahlenfeld, dann sei der Vorgang dieser Formwandlung "Formänderung" genannt. Sind Ausgangsform und Endform verschieden und gibt es nur eine Zwischenform, die weder mit der Ausgangsform noch mit der Endform völlig gleiche Eigenschaften aufweist, dann sei der Vorgang dieser Formwandlung "Umformung" oder "einfache Umformung" genannt. "Mehrfache Umformung" liegt dann vor, wenn der gesamte Vorgang der Formwandlung von der Ausgangsform zur Endform so unterteilt werden kann, daß jeder Teilvorgang eine "einfache Umformung" darstellt. Die Endform eines Teilvorganges ist dabei identisch mit der Ausgangsform des darauffolgenden Teilvorganges. Es gibt dann mehr als eine Zwischenform, die weder mit der Ausgangsform noch mit der Endform gleiche Eigenschaften hat.

Bei jeder einfachen Umformung gibt es unter den Zwischenformen eine "Übergangsform", die nicht mehr in allen Eigenschaften gleich ist der Ausgangsform und noch nicht gleich ist der Endform. Genau genommen ist die Formwandlung bis zur Übergangsform "Formänderung", nur das Hinwegführen über die Übergangsform "Umformung" und die weitere Formwandlung wieder "Formänderung". Da es aber keine letzte Form gibt, die mit der Ausgangsform, und keine erste Form, die mit der Endform gleiche Eigenschaften hat, sei die Grenze nicht so scharf gezogen.

Bei "mehrfacher Umformung" werden mehrere Übergangsformen durchlaufen. Bei jeder Überschreitung einer Übergangsform wird nur eine bestimmte Gruppe von Eigenschaften der Kurve geändert. Werden bei Überschreitung einer Übergangsform mehrere Gruppen von Eigenschaften geändert, dann liegt nur scheinbar eine einfache Umformung vor, tatsächlich aber eine mehrfache Umformung. Dabei ist das Wort Gruppe nicht im Sinne der Gruppentheorie angewandt, sondern soll wenige aber immer zusammengehörige Eigenschaften kennzeichnen, z.B.: Verlust zweier Doppeltangenten bei Gewinn zweier Doppelpunkte oder gleichzeitiger Gewinn eines Doppelpunktes und einer Wendetangente.

Eine Übergangsform unterscheidet sich von einer sonstigen Form dadurch wesentlich, daß es mindestens ein Paar an der gleichen Gruppe von Eigenschaften ansetzende Formwandlungen gibt, die unmittelbar zu einer Form mit neuen Eigenschaften führt. Bei allen anderen Formen wird in jedem Fall vor dem eigentlichen Akt der Umformung eine Reihe von Formen durchlaufen, die die mit der Ausgangsform gleiche Eigenschaften haben. Dessen ungeachtet kann auch jede Übergangsform beliebigen Formänderungen unterworfen werden und können auch Umformungen durchgeführt werden, die, wie im allgemeinen Fall, mit vorheriger und nachheriger Formänderung verbunden sind.

Jede Formwandlung kann nach beiden Richtungen hin durchgeführt werden: von der Ausgangsform zur Endform, aber auch von der Endform, die dann Ausgangsform wird, zur Ausgangsform, die dann Endform wird. Daher kann der Übergang über die Übergangsform nach zwei Richtungen erfolgen. Setzt die Formwandlung an der Übergangsform als Ausgangsform ein, dann ergeben sich die zwei voneinander verschiedenen Umwandlungen, die oben als das "eine Paar" der Formwandlungen mit unmittelbarer Umwandlung bezeichnet wurden.

Jede Umformung ändert das Gefüge der Flächenteilung des Punkt- und Strahlenfeldes. Es müssen in irgendeiner Weise Punktgebiete und Strahlenbereiche entstehen oder vergehen. Die Übergangsform enthält diese keimenden oder schwindenden Gebiete und Bereiche als Punkte oder Gerade. Im einfachsten Fall handelt es sich um Berührungspunkte (Berührungstangenten), zweier einfacher Bogenstücke der Kurve. Eines der Bogenstücke kann durch eine Wendetangente oder einen Spitzpunkt ersetzt werden. Eine andere Möglichkeit ist ein dreifacher Punkt oder eine dreifache Tangente. Eine wichtige Grenzsituation ist das Auszeichnen eines Punktes der Kurve derart, daß alle seine Strahlen zur Kurve gehören werden oder einer Tangente so, daß alle ihre Punkte Kurvenpunkte werden. Hingegen erweist sich die Auflösung von Doppelpunkten und Doppeltangenten in der Art, wie dies von Locher in seinem Buch "Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven" (für algebraische Kurven von Wieleitner in "Algebraische Kurven") entwickelt wird, als bereits recht komplizierte, nicht mehr als elementare Umformung.

Zwei Bögen können einander von außen berühren, dann ist jeder Bogen für den anderen ein äußerer, oder einander von innen berühren, dann liegt einer innerhalb des anderen. In jedem Fall sind je vier voneinander wesentlich verschiedene Umformungen möglich; Trennen, Durchstoßen, Teilen und Überkreuzen.

Anstelle ausführlicher Beschreibung mögen die Bilder 1 und 2 treten, die mit nachfolgendem Schema zu verbinden sind.

Zu Bild 1:

2 Doppeltangenten

↑

Trennen

Berührung von außen

2 Dornspitzen + 1 Doppeltangente	← Teilen	Berührungspunkt + Berührungstangente	Überkreuzen →	2 Wendestellen + 1 Doppelpunkt

Durchstoßen

↓

2 Doppelpunkte

-.-

Zu Bild 2:

Keine Singularitäten

↑

Trennen

Berührung von innen

2 Schnabelspitzen	← Teilen	Berührungspunkt + Berührungstangente	Überkreuzen →	1 Doppelpunkt + 1 Doppeltangente

Durchstoßen

↓

2 Doppelpunkte

\+

2 Doppeltangenten

Beide Berührungsfälle sind zu sich selbst polar. Ausgehend von der äußeren Berührung sind die Umformungen Trennen-Durchstoßen und Teilen-Überkreuzen zueinander polar ebenso wie die dadurch entstehenden Formen. Ausgehend von der inneren Berührung sind alle Umformungen und die dadurch entstehenden Formen jeweils zu sich selbst polar.

Ein äußerer Bogen kann zu einer Geraden, ein innerer zu einem Punkt entarten. Die Umformungen Teilen und Überkreuzen sind dann nicht möglich, sondern nur: Teilen und Durchstoßen.

Ist die Gerade eine Wendetangente oder ist ein Punkt ein Spitzenpunkt, dann haben diese Elemente eine Orientierung, so daß zwei verschiedenen Lagen des Bogens zu Tangente bzw. Punkt unterschieden werden können. Wieder mögen die Zeichnungen 3 und 4 eine ausführliche Beschreibung ersetzen. Zu jeder Lage und jeder Umformung in Zusammenhang mit der Wendetangente gibt es eine polare Lage und polare Umformung in Zusammenhang mit dem Spitzpunkt.

Drei einfache Bögen können in zwei verschiedenen Arten durch einen (dreifachen) Punkt gehen oder eine (dreifache) Tangente haben. Aus jeder dieser Lagen sind zwei Umformungen möglich. Zu jeder Lage der drei Bogenstücke und zu jeder Umformung in Zusammenhang mit dem dreifachen Punkt gibt es eine polare Lage und eine polare Umformung in Zusammenhang mit der dreifachen Tangente. Um diese acht Umformungen in ihren wesentlichen Merkmalen zu charakterisieren, bedarf es des Studiums der Flächenteilung. Deshalb sei zunächst nur auf

Bild 5 und 6 verwiesen, aber darauf aufmerksam gemacht, daß nur die Auflösung des dreifachen Punktes eine echte Umformung darstellt, die zueinander polaren Formwandlungen nicht gleichwertig sind in bezug auf das Punktfeld der Ebene.

- . -

Betrachtet sei ein einfacher Bogen mit dem Anfangselement Aa und dem Endelement Bb als Ausschnitt aus einer beliebigen Kurve. Ein Element Cc zwischen Anfangs- und Endelement werde ausgezeichnet derart: Das Kurvenelement Xx durchläuft (durchdreht) den Bogen, ausgehend von Aa zunächst bis Cc. Dann

durchdreht die Kurventangente x bei festgehaltenem Kurvenpunkt X=C ohne Änderung des Sinnes des Drehens das ganze Strahlenbüschel C bis die Kurventangente wieder bei c angelangt ist.

durchläuft der Kurvenpunkt X bei festgehaltener Kurventangente x=c ohne Änderung des Sinnes des Fortschreitens die ganze Punktreihe c bis der Kurvenpunkt wieder bei C angelangt ist.

Von da an durchläuft (durchdreht) das Kurvenelement das restliche Bogenstück von Cc bis Bb.

Ist an einer beliebigen Kurve an einer beliebigen Stelle eines einfachen Bogens derselben in der oben geschilderten Art ein Kurvenpunkt als Strahlenbüschel oder eine Kurventangente als Punktreihe ausgezeichnet, dann stellt dies eine wichtige Übergangsform dar. Nach einer Richtung führt die Umformung dahin, daß die Auszeichnung verschwindet, nach der anderen Richtung entsteht im einfachsten Fall eine Schleife (Bild 7) in anderen Fällen ein Kurventeil mit mehreren Dornspitzen bzw. mit mehreren Wendestellen (Bild 8, frei herausgegriffene Einzelbeispiele).

Wie die beiden Ausgangssituationen: ausgezeichneter Punkt - ausgezeichnete Gerade sind auch die jeweils daran angreifenden Umformungen zueinander polar, auch wenn in den beiden einfachsten Fällen eine Schleife mit einem Doppelpunkt und einer Doppeltangente entsteht. Vom Punkt ausgehend hat die Schleife doppelt so viele weitere Doppeltangenten mit der Kurve als von diesem Punkt aus Tangenten gingen, von der Geraden ausgehend hat die Schleife doppelt so viele weitere Doppelpunkte mit der Kurve als die Gerade Schnittpunkte hatte.

- . -

Abgesehen von den letzten Umformungen, wo aus Punkten oder Geraden heraus neue Kurventeile geboren werden, handelte es sich stets darum, vorhandene Kurventeile, zu denen auch Wendetangenten bzw. Spitzpunkte gehören, durch Formänderung in Lagen zueinander zu bringen, die neue Eigenschaften für die Kurven entstehen lassen. Dazu müssen diese Kurventeile unter Umständen weit gegenüber den anderen verschoben werden. Hier kann noch der Blick auf ein Element der Formänderung gelenkt werden, das dabei gewissermaßen als "Gelenk" in irgendeiner Form immer wieder aufscheint: die Ein- oder Auswicklung eines Spiralbogens.

Werden von einem einfachen Bogen das Anfangselement Aa und die Endtangente b festgehalten, während der Endpunkt die Punktreihe b durchläuft, so entsteht eine Formwandlung, bei welcher als erste Übergangsform vom einfachen Bogen zum Spiralbogen ein C-Bogen aufscheint. Dies geschieht, wenn der Endpunkt B erstmals den Schnittpunkt $\overline{ab}$ von der Anfangstangente mit der Endtangente erreicht. Ab nun liegt ein Spiralbogen vor, der umso mehr Windungen hat, je öfter B diesen Schnittpunkt $\overline{ab}$ überschreitet. Genau derselbe Vorgang kann auch polar beschrieben werden: Endelement Bb und der Anfangspunkt A werden festgehalten und die Anfangstangente a dreht sich durch das Strahlenbüschel A. Jedesmal, wenn a durch B geht, liegt eine Übergangsform vor. Die erste als C-Bogen: Übergang vom einfachen Bogen zum Spiralbogen, alle weiteren als Übergangsformen zu Spiralbögen höherer Ordnung und Klasse.

- . -

Eine recht eigenartige mehrfache Umformung ergibt sich, wenn zwei ineinanderliegende Bögen an mehreren Stellen über Berührung von innen her zur Durchstoßung geführt werden. Man könnte sie "Verflechtung" nennen. (Bild 9)

ANFÄNGE EINER LEHRE ÜBER DIE GLIEDERUNG DER EBENE DURCH EINE EBENE KURVE

Aus der Sache selbst heraus müßte eine tiefergreifende Darstellung zwei Merkmale tragen, die in folgender Skizze nicht erfüllt sein werden. Erstens müßte jedem Satz, der für die Ebene als Punktfeld ausgesprochen wird, sofort der polare Satz für die Ebene als Strahlenfeld gegenübergestellt werden. Darauf wird verzichtet, um den Text einfacher zu gestalten, wissend, daß damit ein bedeutender Verlust erkauft wird. Dieser kann wett gemacht werden, wenn der Leser die fehlende Ergänzung durch den jeweiligen Aufbau des polaren Sachverhaltes vornimmt. Zweitens wird nicht danach gestrebt, in den Formulierungen konsequent anzuknüpfen an die Begriffe der Mengenlehre und Topologie. Dies, weil sie mir zu wenig geläufig sind. Damit verliert die Darstellung an Tiefe. Dies schließt aber nicht aus, daß später durch andere oder durch mich dieser Mangel aufgehoben wird.

Jede ebene Kurve gliedert das Punkt- und Strahlenfeld der Ebene in voneinander deutlich geschiedene Punktgebiete und Strahlenbereiche, die jeweils Punkte bzw. Strahlen enthalten, welche mit der Kurve eine bestimmte Anzahl Tangenten bzw. Schnittpunkte gemeinsam haben. Sind zwei Kurven polar zueinander, dann entspricht die Gliederung des Punktfeldes durch die eine Kurve, derjenigen der Gliederung des Strahlenfeldes durch die polare Kurve. Die Gliederung eines Strahlenfeldes ist unserem "Punktbewußtsein" schwer vorstellbar, weswegen es leichter ist, wenn die Gliederung des Strahlenfeldes durch eine Kurve untersucht werden soll, die Gliederung des Punktfeldes durch die polare Kurve ins Auge zu fassen. Durch die im ersten Absatz erwähnte Darstellungsbeschränkung auf das Punktfeld wird also nur ein - allerdings bedeutender - methodischer Mangel gesetzt, aber keine Gesetzmäßigkeit des Strahlenfeldes übersehen.

Jedes Punktgebiet mit Punkten einer bestimmten Anzahl Tangenten an die Kurve wird durch Kurvenbögen oder/und Wendetangenten begrenzt. Jede Überschreitung solcher Grenzen verändert die Anzahl der möglichen Tangenten an die Kurve um 2. (Dies folgt z.B. aus dem "Hauptsatz" in der Formulierung 17 A im Buch von Prof. Locher "Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven".) In Kurven-Doppelpunkten und Schnittpunkten von Wendetangenten miteinander oder mit der Kurve stoßen mehrere (3 oder 4) Gebiete verschiedener Tangentenanzahl aneinander, an mehrfachen Punkten und mehrfachen Schnittpunkten der genannten Art noch mehr Gebiete. Solche mehrfache Punkte seien in der folgenden Betrachtung grundsätzlich ausgeschlossen (z.B. indem die Kurvenäste und Wendetangenten gegeneinander soweit verschoben werden, daß nur einfache Doppelpunkte vorkommen).

Geht man von irgendeinem Punkt aus, ohne einen "Eckpunkt" - einen Schnittpunkt zweier Kurvenstücke, zweier Wendetangenten oder eines Kurvenstückes mit einer Wendetangente - zu treffen, längs irgendeines Weges über mindestens eine Grenze und bis wieder zum Ausgangspunkt, dann hat man mindestens eine zweite, stets eine gerade Anzahl Grenzüberschreitungen vorgenommen. Dies trifft selbstverständlich auch zu, wenn der Weg eine Gerade ist. Nennt man die Anzahl der Tangenten, die von jedem Punkt eines Punktgebietes aus an die Kurve möglich sind, den "Wert" des Punktgebietes, dann trifft man auf jedem Weg, der Grenzüberschreitungen aufweist, auf Punktgebiete verschiedenen Wertes. Bei jeder Grenzüberschreitung steigt oder fällt der Wert um 2. Ist der Weg in sich geschlossen, dann endet er bei dem gleichen Wert. Es müssen dann ebensoviele Grenzüberschreitungen mit aufsteigendem wie mit absteigendem Wert vorgekommen sein. Die Anzahl der Grenzüberschreitungen muß ein Vielfaches von 2, also eine gerade Zahl sein.

Als Weg kann auch eine von jenen Geraden gewählt werden, welche die höchstmögliche Anzahl Schnittpunkte mit der Kurve gemeinsam hat und damit die "Ordnung" der Kurve bestimmt. Die "Ordnung" kann geradzahlig oder ungeradzahlig sein, die Anzahl der Grenzüberschreitungen muß aber geradzahlig sein. Daher muß eine Kurve ungerader Ordnung mindestens eine, auf jeden Fall eine ungerade Anzahl Wendetangenten besitzen (dementsprechend eine Kurve ungerader Klasse mindestens eine, auf jeden Fall eine ungerade Anzahl Dornspitzen). Eine Kurve geradzahliger Ordnung (Klasse) hat keine oder eine gerade Anzahl Wendetangenten (Dornspitzen).

Die Punktgebiete werden von Kurvenbogen-Stücken oder Wendetangenten-Strecken begrenzt und haben in Doppelpunkten oder Schnittpunkten ihre Ecken. Ecken, Grenzen und Gebiete bilden eine "Karte" im Sinne der Topologie. Die Anzahl der "Ecken" (in diesem Fall) jeder Doppelpunkt und Schnittpunkt nur einmal gezählt) minus die Anzahl der Bogenstücke und Wendetangentenstrecken plus die Anzahl der Punktgebiete kann 1 oder 2 sein. Damit scheiden sich die Kurven in zwei Typen, nämlich jene, wo dieser Wert 1 und jene wo er 2 ist und es scheiden sich die Umformungen ebenso in zwei Typen, nämlich jene, welche die Kurventype nicht ändern, und jene, welche die Kurve in eine der anderen Type umwandeln. Die Flächen der Punktgebiete sind beim Typ 2 orientierbar, beim Typ 1 nicht.

Ohne Beweis sei hier angeführt: Gibt es mindestens eine Gerade, die als Punktreihe nur Punkte ein und desselben Punktgebietes enthält, also keine Grenze überschreitet oder berührt, dann ist die Kurve von Typ 2 ansonsten vom Typ 1.

Daß es nur ein derartiges Punktgebiet geben kann,ist leicht einzusehen, denn gäbe es zwei, dann könnte in jedes dieser Gebiete eine Gerade gelegt werden. Der notwendige Schnittpunkt dieser Geraden gehörte dann jedem der beiden Gebiete an. Dies ist nur möglich, wenn die beiden Gebiete dieselben sind.

Hat die Kurve auch nur eine Wendetangente, dann gibt es keine Gerade, die ganz in einem Punktgebiet bestimmter Klasse liegen kann, weil jede Gerade mit der Wendetangente einen Punkt gemeinsam hat und daher mindestens 1 Grenzübergang stattfindet. Eine Kurve ungerader Ordnung kann daher nur dem Typ 1 angehören, bei welchem Anzahl der Ecken - Anzahl der Grenzabschnitte + Anzahl der Gebiete = 1 ist - und die Flächen nicht orientiert werden können. Dem anderen Typ (2) kann nur eine Kurve gerader Ordnung ohne Wendetangente angehören. Aber nicht alle Kurven gerader Ordnung ohne Wendetangenten haben diese Eigenschaften. Es können beide Typen bei diesen Kurven vorkommen.

Die Zahl, welche die "Klasse der Kurve" angibt, ist identisch mit dem höchsten vorkommenden Wert der Punktgebiete. Mindestens ein Gebiet hat den niedrigsten vorkommenden Wert. Er muß nicht "Null" sein. Eine Einteilung der Kurven nach dem höchsten vorkommenden Wert der Punktgebiete allein, wie dies üblich ist, ist daher nicht ganz sachgemäß.

Der Unterschied zwischen dem höchsten und dem niedrigsten vorkommenden Wert der Punktgebiete ist immer eine gerade Zahl.

Für jedes Punktgebiet läßt sich eindeutig bestimmen: ein es begrenzender Bogen liegt konkav zu ihm, begrenzt es konkav, wenn die Punkte des Gebietes innere sind in bezug auf den Grenzbogen; er liegt konvex zu ihm, begrenzt es konvex, wenn die Punkte des Gebietes äußere sind in bezug auf den Grenzbogen. Verläßt man das Punktgebiet über einen konkav begrenzenden Bogen, dann kommt man in ein Gebiet höheren Wertes, verläßt man es über einen konkav begrenzenden Bogen, dann kommt man in ein Gebiet niederen Wertes.

Diese Charakterisierung kann auch auf die Wendetangente ausgedehnt werden. In jeder Umgebung jedes Punktes der Wendetangente gibt es solche Punkte, die keine Tangente an die Kurvenäste der Wendestelle entsenden, quasi innere Punkte, und solche, die 2 Tangenten an die Kurvenäste der Wendestelle entsenden, quasi äußere Punkte.

Daher kann der Begriff der konvexen und konkaven Grenze erweitert werden: kommt man beim Überschreiten einer Wendetangente in ein Gebiet höherer Klasse, dann gelte sie als konkav liegend, kommt man in ein Gebiet niederer Klasse, dann gelte sie als konvex liegend zum Ausgangsgebiet.

Die Anzahl der Schnittpunkte einer Wendetangente mit der Kurve und den anderen Wendetangenten einschließlich dem Wendepunkt selbst ist gleich der Anzahl der Grenzabschnitte, in die die Wendetangente gegliedert wird. Ähnlich bei der Kurve, die ebenfalls in sich geschlossen ist, wie eine Gerade. Die Anzahl der Doppelpunkte und Schnittpunkte mit den Wendetangenten, zu denen auch die Wendepunkte gehören, ist gleich der Anzahl der Grenzabschnitte, in die die Kurve gegliedert wird. Dabei werden zunächst alle Punkte doppelt gezählt, die Doppelpunkte einmal als Punkte des einen, dann als Punkte des anderen Bogens, die Schnittpunkte mit den Wendetangenten einmal als Punkte der Kurve, dann als Punkte der Wendetangente, die Schnittpunkte zweier Wendetangenten einmal als Punkte der einen, dann als Punkte der anderen Tangente. Da aber im Sinne früherer Ausführungen alle diese Punkte als "Eckpunkte" nur einmal gezählt werden sollen, ist die Anzahl der "Grenzbögen" oder "Grenzstrecken" doppelt so groß, wie die der Schnittpunkte der genannten drei Arten.

Diese Relation bleibt auch erhalten, wenn man die Spitzpunkte als Eckpunkte betrachtet und demgemäß die beiderseits derselben anschließenden Bögen als zwei verschiedene zählen muß.

Wegen $P - g + F = 1$ oder 2 und $g = 2p$ ergibt sich die Anzahl der Punktgebiete je nach Typ der Kurve $F = p + 1$ (Typ 1) oder $F = p + 2$ (Typ 2).

Ein Gebiet, das nur konkav begrenzt ist, hat jenseits aller Grenzen Gebiete höheren Wertes, es sei, um einen bildhaften Ausdruck zu haben "Senke" genannt. Ein Gebiet, das nur konvex begrenzt ist, hat jenseits aller Grenzen Gebiete niederen Wertes, es sei "Kuppe" genannt. Alle anderen Gebiete mit sowohl konkaven, als auch konvexen Grenzen seien "Übergangsgebiete". Sie können den Charakter eines "Hanges" eines "Sattels" oder eines "mehrfachen Sattels" haben.

In jeder Flächengliederung gibt es unter den $p + 1$ oder $p + 2$ Gebieten mindestens eine Kuppe und mindestens eine Senke. Sind mehrere vorhanden, dann können sie gleichen oder verschiedenen Wert haben. Es können nie zwei Kuppen oder zwei Senken aneinander grenzen. Es müßte dazu die Grenze zwischen beiden konvex oder konkav nach beiden Seiten sein, was nicht möglich ist.

Die einfachste Flächengliederung, bestehend aus nur einer Kuppe und einer Senke, wird durch die Eilinie hervorgerufen. Sie hat keinen Eckpunkt, einen Bogen und 2 Gebiete. Sie hat ein Gebiet - die Kuppe - in dem Gerade liegen können, ihre Flächen sind orientierbar. Sie sind daher vom Typ 2 trotzdem $P-g+F = 0-1+2 = 1$ ist und nicht 2. Hier liegt eine bedeutsame Ausnahme zu der oben genannten (noch nicht bewiesenen) Regel vor.

Es gibt auch eine Flächengliederung, bestehend nur aus einer Kuppe und einer Senke, vom Typ 1. Sie wird von der zu sich selbst polaren Kurve 3. Ordnung 3. Klasse mit einer Wendestelle und einer Dornspitze hervorgerufen, hat kein Gebiet, in dem eine Gerade liegen könnte und ihre Flächen sind nicht orientierbar. Je nachdem, ob man den Spitzpunkt als Eckpunkt zählen möchte oder nicht, ergibt sich für $P - g + F = 2 - 3 + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$.

Man kann die elementaren Umformungen vom Gesichtspunkt der Flächengliederung aus betrachten. Zur Erleichterung dessen sind in den Bildern 1 bis 6 die Punktfelder betont und durch unterschiedliche Schraffierung die verschiedenen Werte der einzelnen Gebiete gekennzeichnet. Es handelt sich um relative Wertunterschiede, die an jeder Grenze "2" betragen, nicht um absolute Werte, da diese vom Verlauf der ganzen übrigen Kurve abhängen.

Auf den ersten Blick ist durch die Darstellung zu erkennen, daß alle Bilder 1, 2, 3 und 4 sowie die jeweils linken Bilder 4 und 5 echte Umformungen zeigen, solche, bei denen die Gliederung des Punktfeldes verändert wird. Bei den rechten Bildern 4 und 5 scheint keine echte Umformung vorzuliegen. Dies stimmt aber nur, solange einseitig das Verhältnis der Kurve zum Punktfeld betrachtet wird. Bedenkt man die zueinander polare Situation der jeweils linken und rechten Einzelzeichnung in Bild 4 und 5, dann erkennt man:

Die Auflösung eines dreifachen Punktes hat nur Einfluß auf die Gliederung des Punktfeldes und damit evtl. auf die Klasse der Kurve, nicht auf die Gliederung des Strahlenfeldes und damit nicht auf die Ordnung der Kurve.

Die Auflösung einer dreifachen Tangente hat nur Einfluß auf die Gliederung des Strahlenfeldes und damit evtl. auf die Ordnung der Kurve, nicht auf die Gliederung des Punktfeldes und damit nicht auf die Klasse der Kurve.

Auch die rechten Bilder 4 und 5 geben echte Umformungen der Kurve wieder, aber solche, die sich nur im Strahlenfeld auswirken, wie sich die linken Bilder 5 und 6 nur im Punktfeld auswirken. Im Gegensatz dazu wirken sich alle Umformungen der Bilder 1 bis 4 in beiden Feldern gleichzeitig entsprechend polar aus.

Bei den bisherigen Überlegungen, außer bei der Betrachtung von Bild 4 und 5, wurde angenommen daß keine mehrfachen Punkte vorhanden sind. In die folgenden Betrachtungen soll jeder Punkt durch den zwei und mehr eigentliche oder uneigentliche Kurvenbögen gehen, eingeschlossen sein. Unter uneigentlichen Kurvenbögen werden die quasikonkaven bzw. quasikonvexen Wendetangenten verstanden.

Die allgemeine Regel vom geschlossenen Weg durch das gegliederte Punktfeld gilt auch dann, wenn dieser Weg eine Eilinie um einen mehrfachen Punkt ist, die so gelegt wird, daß außer diesem mehrfachen Punkt kein weiterer mehrfacher Punkt innerer Punkt dieser Eilinie ist.

Längs dieses Weges muß es eine gerade Anzahl Grenzüberschreitungen geben, von denen ebensoviele über konkav liegende wie über konvex liegende Bögen führen. Und zwar sind es doppelt soviele Grenzüberschreitungen als durch den Punkt Bögen gehen. Es muß mindestens eine Kuppe und eine Senke angetroffen werden, und diese liegen immer einander gegenüber. Zwischen einer Kuppe und einer Senke liegen entweder nur Übergangsgebiete oder eine gleiche Anzahl von Kuppen und Senken mit oder ohne Übergangsgebiete. Daraus ergeben sich bei mehrfachen Bögen: Es können nie zwei Kuppen oder Senken aneinandergrenzen, sie können auch nicht nur durch Übergangsgebiete voneinander getrennt sein, sondern zwischen zwei Kuppen muß mindestens eine, aber jedenfalls eine ungerade Anzahl von Senken liegen ebenso wie zwischen zwei Senken eine ungerade Anzahl von Kuppen liegen muß. Übergangsgebiete, die auch immer einander gegenüberliegen müssen, können trotzdem in beliebiger Anzahl an beliebigen Stellen hinzutreten.

Aus diesem Grund ist es nicht leicht zu sagen, wieviele verschiedene Flächengliederungen rings um einen mehrfachen Punkt durch verschiedene Anordnung der Bögen möglich sind. Beim zweifachen Punkt ist es nur eine mit (K-Ü-S-Ü) Kuppe - Übergangsgebiet - Senke - Übergangsgebiet. Beim dreifachen Punkt gibt es die beiden in Bild 5 und 6 dargestellten Möglichkeiten K - S - K - S - K - S und K - Ü - Ü - S - Ü - Ü .

Beim vierfachen Punkt gibt es aber auch nur zwei Möglichkeiten, erst beim fünffachen Punkt vier, beim sechsfachen Punkt fünf, beim siebenfachen Punkt sieben usw.

Einen Überblick über die Vielfalt der Möglichkeiten bei einem mehrfachen Punkt mit n Bögen könnte man sich folgendermaßen verschaffen: Die Gesamtzahl der Gebiete rings um den Punkt ist 2n. Davon können 2 einander gegenüberliegende als 1 Kuppe und eine Senke herausgegriffen werden. Die restlichen $2(n-1)$ Gebiete sind dann Übergangsgebiete. Es können auch 2×3 paarweise einander gegenüberliegende Gebiete in der Folge K-S-K-S-K-S herausgegriffen werden und die verbliebenen $2(n-3)$ als Übergangsgebiete beliebig dazwischengelegt werden. Weiter können 2×5 Gebiete in der Folge K-S-K-S-K-S-K-S-K-S herausgegriffen werden und die restlichen $2(n-5)$ verteilt werden und so fort ...

Löst man den mehrfachen Punkt auf in $\frac{n(n-1)}{2}$ Doppelpunkte, dann entstehen $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ Punkte, $n(n-2)$ Grenzbögen und $\frac{n(n-3)}{2} + 1$ Flächen neu. In diesem Zustand der Kurve gelten die schon angegebenen Beziehungen $g = 2p \quad f \neq p + 1$ oder $p + 2$. Für jeden mehrfachen Punkt muß sie entsprechend obiger Formeln modifiziert werden.

Da $\left[\frac{n(n-1)}{2} - 1\right] - n(n-2) + \left[\frac{n(n-3)}{2} + 1\right] = 0$ ist, ändert die Auflösung des mehrfachen Punktes nicht die Type der Flächenteilung.

- . -

Zum Abschluß noch ein praktischer Hinweis für das Studium von Flächengliederungen vorgegebener Kurven. Man geht am besten folgendermaßen vor:

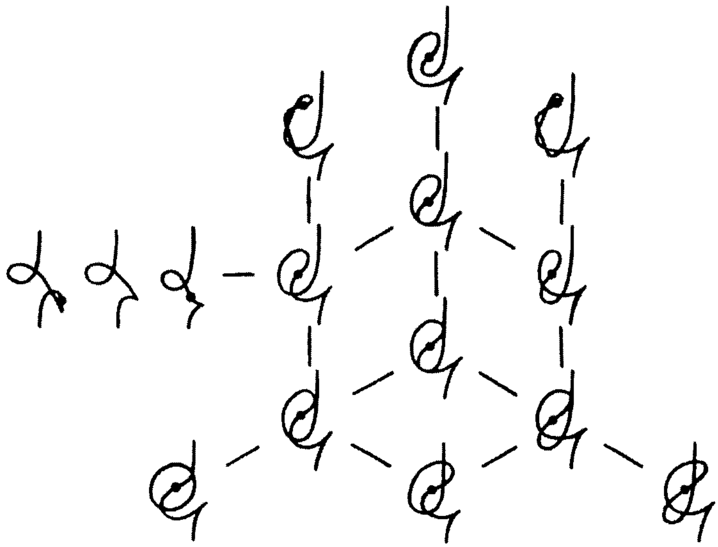
1. Man ergänzt die Kurve durch ihre Wendetangenten.
2. Man markiert sich am Rand des Zeichenfeldes nach welcher Richtung die Wendetangente als konkav gilt.
3. Man bestimmt für irgendeinen Punkt des Zeichenbereiches die Anzahl der Tangenten an die Kurve und schreibt den Wert ein.
4. Man wandert nun von diesem Punktgebiet aus nach allen Richtungen über die Grenzen und schreibt je nachdem, ob man eine konkave oder konvexe Grenze überschreitet ins nächste Gebiet einen um 2 höheren oder niedrigeren Wert ein.

Das Verfahren ist auch anwendbar, wenn die Kurve nicht in sich geschlossen ist, sondern ein Anfangselement A.a und ein Endelement B.b hat. Man behandelt Anfangs- und Endelement wie eine Wendetangente mit dem Unterschied, daß der Wertzuwachs (bzw. die Wertabnahme) bei Überschreitung nur 1 beträgt.

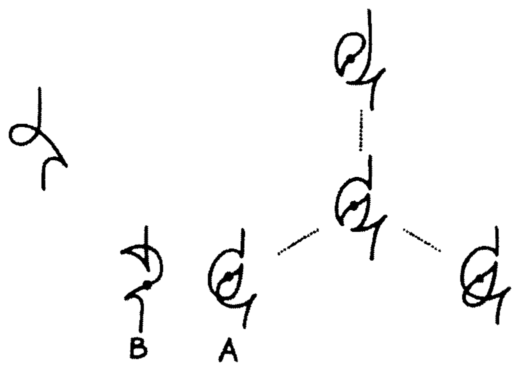
- . -

Es sei noch darauf hingewiesen, daß, ebenso wie jedem Punktgebiet, auch jedem Grenzbogen und jedem Eckpunkt ein Wert zugeordnet werden kann: die Zahl der Tangenten aus einem Punkt des Bogens bzw. aus dem Eckpunkt.

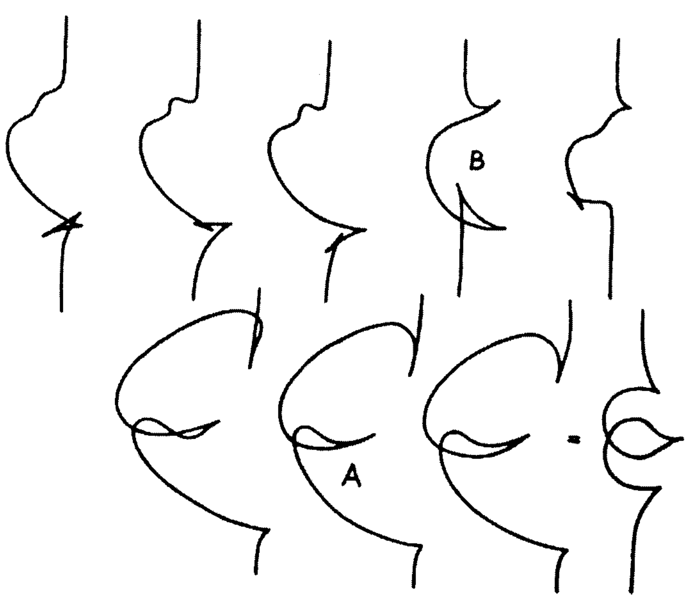
1



2



3



THE GOLEM OF PRAGUE AND THE GOLEM OF REHOVOTH

Gershom Scholem

When, a year ago, Gershom Scholem, the foremost authority of our day on Jewish mysticism, heard that the Weizmann Institute at Rehovoth in Israel had completed the building of a new computer, he told Dr. Chaim Pekeris, who "fathered" the computer, that, in his opinion, the most appropriate name for it would be Golem, No. 1 *("Golem Aleph"). Dr. Pekeris agreed to call it that but only on condition that Professor Scholem would dedicate the computer and explain why it should be so named. What follows are Professor Scholem's dedicatory remarks, which were delivered at the Weizmann Institute on June 17, 1965.*—ED.

ONCE upon a time there was a great Rabbi in Prague. His name was Rabbi Jehuda Loew ben Bezalel and he is known in Jewish tradition as the Maharal of Prague. A famous scholar and mystic, he is credited by Jewish popular tradition with the creation of a Golem—a creature produced by the magical power of man and taking on human shape. Rabbi Loew's robot was made of clay and given a sort of life by being infused with the concentrated power of the Rabbi's mind. This great human power is, however, nothing but a reflection of God's own creative power, and therefore, after having gone through all the necessary procedures in building his Golem, the Rabbi finally put a slip of paper into its mouth with the mystic and ineffable Name of God written on it. So long as this seal remained in his mouth, the Golem was alive—if you can call such a state alive. For the Golem could work and do the bidding of his master and perform all kinds of chores for him, helping him and the Jews of Prague in many ways. But the poor creature could not speak. He could respond to orders and he could sort them out, but no more than that.

ALL THIS went very well for a time; the Golem was even given his day of rest on the Sabbath, when God's creatures are not supposed to do any work. Every Sabbath the Rabbi would remove the slip of paper with the Name of God on it, and the Golem would become inanimate for the day, nothing but a massive conglomerate of clay cells (in those days they were not yet speaking of "little gray cells"). One Friday afternoon, however, Rabbi Loew forgot to remove the Name from the Golem's mouth and went to the Great Synagogue of Prague to pray with the community and to receive the Sabbath. The day had barely drawn to a close and the people were getting ready for the ushering in of the holy day, when the Golem began to get restive. He grew in stature and, like one mad, began tearing about in the Ghetto, threatening to destroy everything. The people did not know how to stop him from running amok. A report of the panic soon reached the Alt-Neuschul where Rabbi Loew was praying. The Rabbi rushed out into the street to confront his own creature which seemed to have outgrown him and become a destructive power on its own. With a last effort he stretched out his arm and tore the Holy Name out of the Golem's mouth, whereupon the Golem fell to the ground and turned into a mass of lifeless clay.

In another version of the same legend, which is recounted of a great Rabbi in 16th-century Poland, the Rabbi is successful in stopping the Golem, but the heap of clay falls upon and kills him. However, the most famous version in Jewish lore of the idea of the Golem as a human creature on a subhuman plane is the one involving Rabbi Loew. It is only appropriate to mention that Rabbi Loew was not only the spiritual, but also the actual, ancestor of the great mathematician Theodor von Karman who, I recall, was extremely proud of this ancestor of his in whom he saw the first genius of applied mathematics in his family. But we may safely say that Rabbi Loew was also the spiritual ancestor of two other departed Jews—I mean John von Neumann and Norbert Wiener—who contributed more than anyone else to the magic that has produced the modern Golem. It is the latest embodiment of this magic which we are privileged to dedicate today, the Golem of Rehovoth. And, indeed, the Golem of Rehovoth can well compete with the Golem of Prague.

NOW, THIS IDEA of the Golem is deeply ingrained in the thinking of the Jewish mystics of the Middle Ages known as the Kabbalists. I want to give you at least an inkling of what lies behind the idea. It may be far removed from what the modern electronic engineer and applied mathematician have in mind when they concoct their own species of Golem—and yet, all theological trappings notwithstanding, there is a straight line linking the two developments.

As a matter of fact, the Golem—a creature created by human intelligence and concentration, which is controlled by its creator and performs tasks set by him, but which at the same time may have a dangerous tendency to outgrow that control and develop destructive potentialities—is nothing but a replica of Adam, the first Man himself. God could create Man from a heap of clay and invest him with a spark of His divine life force and intelligence (this, in the last analysis, is the "divine image" in which Man was created). Without this intelligence and the spontaneous creativity of the human mind, Adam would have been nothing but a Golem—as, indeed, he is called in some of the old rabbinic stories interpreting the Biblical account. When there was only the combination and culmination of natural and material forces, and before that all-important divine spark was breathed into him, Adam was nothing but a Golem. Only when a tiny bit of God's creative power was passed on did he become Man, in the image of God. Is it, then, any wonder that Man should try to do in his own small way what God did in the beginning?

There is, however, a hitch: Man can assemble the forces of nature—identified by him as the basic forces of material creation—and combine them into a semblance of the human pattern. But there is one thing he cannot give to his product: speech, which to the Biblical mind is identical with reason and intuition. The Talmud tells a little story: "Rabha created a man and sent him to Rabbi Zera. The Rabbi spoke to him but he did not answer. Whereupon the Rabbi said: You must have been made by my colleagues of the academy; return to your dust." In Aramaic, the language of the Talmud, the academic colleagues are denoted by the same word that is used for magicians: quite a nice ambiguity. Just as the human mind remains infinitely inferior to the all-encompassing divine intelligence of God, so does the Golem's intelligence lag behind the human—that is to say, it lacks that spontaneity which alone makes Man what he is. But still, even on a subhuman plane, there is in the Golem a representation of Man's creative power. The universe, so the Kabbalists tell us, is built essentially on the prime elements of numbers and letters, because the letters of God's language reflected in human language are nothing but concentrations of His creative energy. Thus, by assembling these elements in all their possible combinations and permutations, the Kabbalist who contemplates the mysteries of Creation radiates some of this elementary power into the Golem. The creation of a Golem is then in some way an affirmation of the productive and creative power of Man. It repeats, on however small a scale, the work of creation.

BUT THERE IS a more sinister side to this too. According to one of the first texts we have on the Golem, the prophet Jeremiah was busying himself alone with the *Sefer Yetsirah* ("The Book of Creation") when a heavenly voice went forth and said: "Take a companion." Jeremiah, obeying, chose his son Sira, and they studied the book together for three years. Afterward, they set about combining the alphabets in accordance with the Kabbalistic principles of combination, grouping, and word formation, and a man was created to them, on whose forehead stood the letters, *YHWH Elohim Emeth*, meaning: God the Lord is Truth. But this newly created man had a knife in his hand, with which he erased the letter *aleph* from the word *emeth* ("truth"); there remained the word *meth* ("dead"). Then Jeremiah rent his garments (because of the blasphemy, God is dead, now implied in the inscription) and said: "Why have you erased the *aleph* from *emeth?*" He replied: "I will tell you a parable. An architect built many houses, cities, and squares, but no one could copy his art and compete with him in knowledge and skill until two men persuaded him to teach them the secret of the art. When they had learned how to do everything in the right way, they began to anger him with words. Finally, they broke with him and became architects on their own, except that what he charged a guinea for, they did for ten shillings. When people noticed this, they ceased honoring the artist and instead gave their commissions to his renegade pupils. So God has made you in His image and in His shape and form. But now that you have created a man like Him, people will say: There is no God in the world beside these two! Then Jeremiah said: "What solution is there?" He said: "Write the alphabets backward with intense concentration on the earth. Only do not meditate in the sense of building up, as you did before, but the other way around." So they did, and the man became dust and ashes before their eyes.

It is indeed significant that Nietzsche's famous cry, "God is dead," should have gone up first in a Kabbalistic text warning against the making of a Golem and linking the death of God to the realization of the idea of the Golem.

In the development of this conception the Golem has always existed on two quite separate planes. The one was the plane of ecstatic experience where the figure of clay, infused with all those radiations of the human mind which are the combinations of the alphabet, became alive for the fleeting moment of ecstasy, but not beyond it. The other was the legendary plane where Jewish folk tradition, having heard of the Kabbalistic speculations on the spiritual plane, translated them into down-to-earth tales and traditions like the ones I quoted at the beginning. The Golem, instead of being a spiritual experience of man, became a technical servant of man's needs, controlled by him in an uneasy and precarious equilibrium.

THIS IS WHERE we may well ask

some questions, comparing the Golem of Prague with that of Rehovoth, the work of Rabbi Jehuda Loew with the work of Professor—or should I say, Rabbi?—Chaim Pekeris.

1. Have they a basic conception in common? I should say, yes. The old Golem was based on a mystical combination of the 22 letters of the Hebrew alphabet, which are the elements and building-stones of the world. The new Golem is based on a simpler, and at the same time more intricate, system. Instead of 22 elements, it knows only of two, the two numbers 0 and 1, constituting the binary system of representation. Everything can be translated, or transposed, into these two basic signs, and what cannot be so expressed cannot be fed as information to the Golem. I daresay the old Kabbalists would have been glad to learn of this simplification of their own system. This is progress.

2. What makes the Golem work? In both cases it is energy. In the old Golem it was the energy of speech, in the new one it is electronic energy. In the case of the Kabbalists it was the *Shem ha-Mephorash*, the fully-interpreted and expressed and differentiated name of God. Now, it is still differentiation according to a given system and interpretation of signs and ciphers which makes the Golem work.

3. What about human shape? Here I must admit to some qualms. Certainly the Prague Golem was never very attractive as a human being, but he seems to have borne some resemblance to the human countenance—which, I am sorry to state, cannot be said of our present Golem of Rehovoth. It still has a long way to go, to be moulded into an acceptable shape. You can say, of course, that these external shapes are optical illusions and deceit, and that what counts, after all, is the mind at work. And here the Golem of Rehovoth may be at an advantage. External beauty has been denied to him. What kind of spiritual beauties lurk inside, we shall learn in due time, I hope.

4. Can the new Golem grow in stature and productivity? He certainly can, although with growing productivity we rather expect the Golem of Rehovoth to shrink in size and to take on a more attractive and becoming exterior. Whether the Golem of Prague could correct his mistakes, I doubt. The new Golem seems to be able, in some ways, to learn and to improve himself. This makes the modern Kabbalists more successful than the ancient ones, and I may congratulate them on this score. There is even more to it. The old Golem, we learn, served his master by bringing water to the house. The new one serves his Rabbi, Chaim Pekeris, by calculating the movement of the ocean tides—a somewhat more progressive type of activity, so far as water is concerned.

5. What about memory and the faculty of speech? As for memory, we don't know how the old Golem scored. The new one certainly shows a great improvement—although he has, I am sorry to say, occasional lapses of memory and other momentary weaknesses which cause trouble to his makers. The progress of the new Golem is thus linked to a certain regression from the previous state. Adam never fell ill, according to the Rabbis, and the same goes for the old Golem of the Kabbalists. The new one, alas, shows a deplorable propensity in this direction. And as for speech, and all that it implies—I mean the spontaneity of intelligence—both the old and the new Golem are found to be sadly lacking. Everybody speculates about what is to become of the more advanced forms of the Golem. But it seems that for the time being and for quite some time to come, we are saddled with a Golem that will only do what he is told. There is still a long, long stretch ahead to that Utopian figure of a Golem, about whom the famous cartoon in the *New Yorker* spoke. It showed two scientists standing in great embarrassment before this end-of-days Golem as they scanned the tape giving out his latest information. The caption read: "The damned thing says: *Cogito, ergo sum.*"

6. And this brings me to my last question: Can the Golem love? In an old book, we read some sayings about the Golem attributed to the Rabbi of Prague. Here is one of them: "The Golem was never ill, for he was immune to every impulse to do evil, from which all illness stems. And the Golem had to be created without the sexual urge; for, if he had had that instinct, no woman would have been safe from him." Now I have to leave it to you to answer this query. For I am really at a loss what to think.

ALL MY DAYS I have been complaining that the Weizmann Institute has not mobilized the funds to build up the Institute for Experimental Demonology and Magic which I have for so long proposed to establish there. They preferred what they call Applied Mathematics and its sinister possibilities to my more direct magical approach. Little did they know, when they preferred Chaim Pekeris to me, what they were letting themselves in for. So I resign myself and say to the Golem and its creator: develop peacefully and don't destroy the world. *Shalom.*

Aus: Commentary REPORT. COMMENTARY IS THE INDEPENDENT JOURNAL OF SIGNIFICANT THOUGHT. PUBLISHED BY THE AMERICAN JEWISH COMMITTEE, 165 East 56 Street, New York, N.Y. 10022. ANNUAL SUBSCRIPTION $8.00