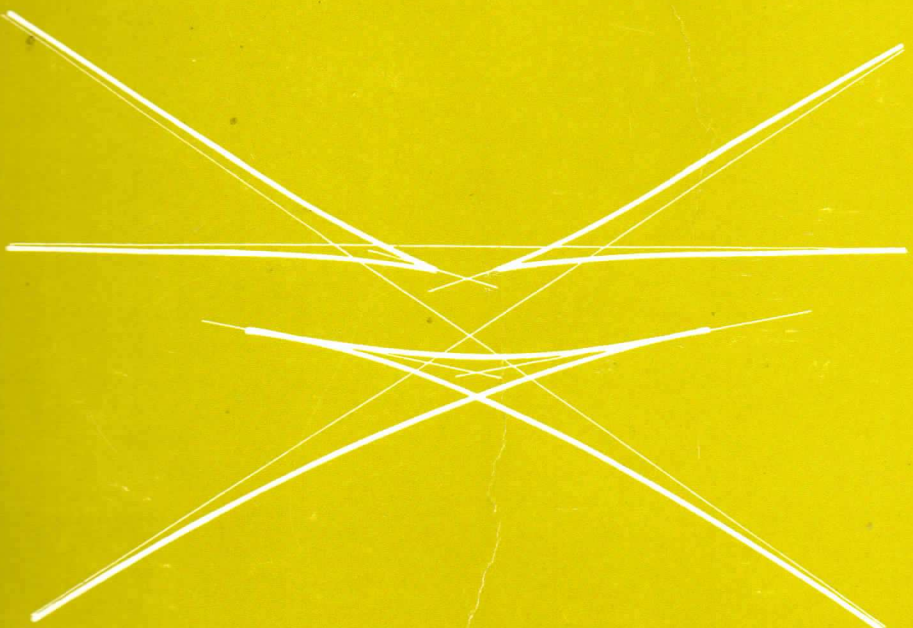
Mathematisch-Astronomische Blätter
Neue Folge
Band 13

Angelo Andes Rovida

Übungen zur synthetischen projektiven Geometrie



M. Form und Gegenform: Dualisierung ebener Kurven

Es werden hier nur geschlossene ebene Kurven, ohne Ecken und Sprünge, aber mit Singularitäten, betrachtet (siehe L. Locher, Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven).

Man betrachte vor allem die Bewegung der Punkte und der Tangenten.

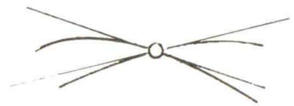
Singularitäten:

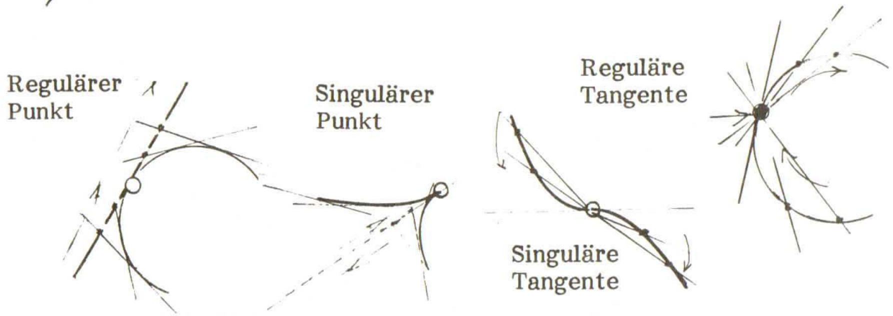
Dornspitze dual zu Wendestelle

Schnabelspitze

ist selbstpolar, d.h. wird wieder zu einer Schnabelspitze.

Doppeltangente: zwei Punkte auf einer Tangente. dual zu Doppelpunkt: zwei Tangenten durch einen Punkt.



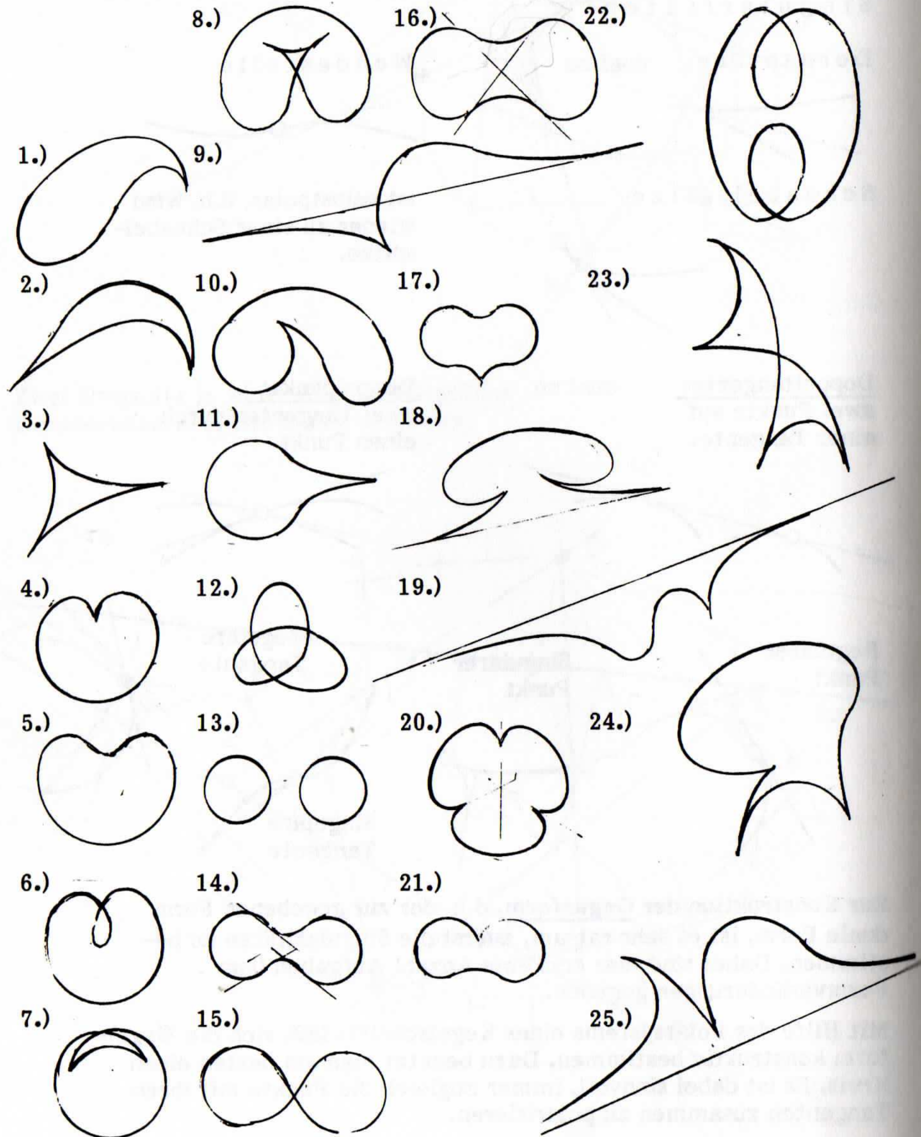


Zur Konstruktion der Gegenform, d.h. der zur gegebenen Form duale Form, ist es sehr ratsam, zuerst die Singularitäten zu bestimmen. Daher sind hier erst eine Anzahl Aufgaben über Formveränderungen gegeben.

Mit Hilfe des Polarsystems eines Kegelschnitts läßt sich die Gegenform konstruktiv bestimmen. Dazu benutzt man am besten einen Kreis. Es ist dabei sinnvoll, immer zugleich die Punkte mit ihren Tangenten zusammen zu polarisieren.

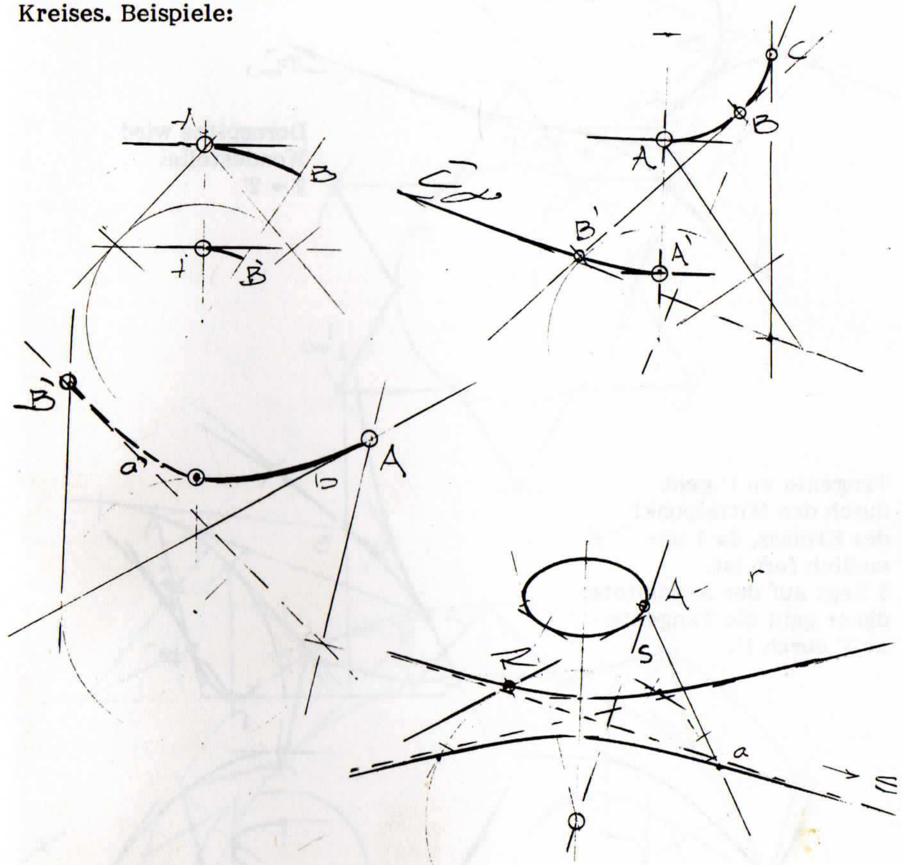
M.1. Freie Dualisierung

Zeichne freihand zu den vorgegebenen Formen die Gegenform; man überlege sich zuerst, ob die gesuchte Kurve die unendlich ferne Gerade überschneiden muß oder nicht. (Wenn von allen Punkten der Ebene Tangenten an die Kurve gelegt werden können, so heißt das für die Gegenkurve, daß alle Geraden der Ebene die Kurve schneiden, insbesondere auch die unendlich ferne Gerade.)



M.2. Konstruktive Polarisierung ebener Kurven an einem Kegelschnitt

Der Einfachheit halber verwenden wir das Polarsystem eines Kreises. Beispiele:

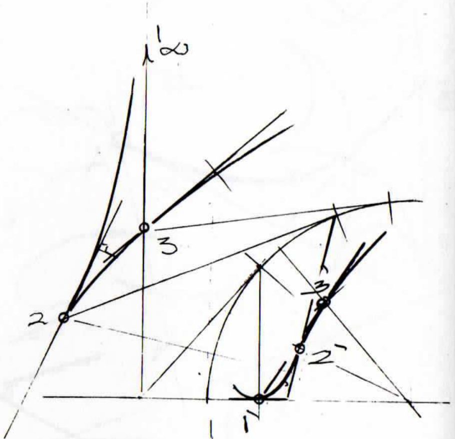


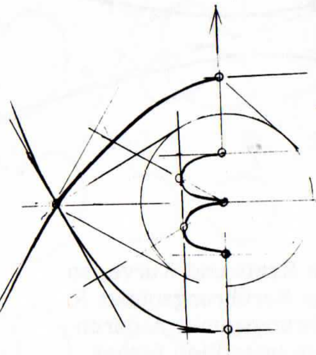
Man beachte:
Gibt es eine **gemeinsame Tangente** an Kreis und Kurve, so überschneidet die Gegenkurve den Kreis im Berührungspunkt R von r. Geht eine Tangente s mit dem Berührungspunkt A durch das Zentrum des Kreises, so ist ihr Pol S ein unendlich ferner Punkt und die Polare a von A eine **Asymptote** der Gegenkurve.

Auf der folgenden Seite finden sich einige konstruktive Hinweise für die Polarisierung von Kurven an einem Kreise. Daran schließen sich einige Aufgaben an. Diese Seiten können zugleich als Zeichnungsvorlagen dienen. Die gezeichneten Kurven sollen am vorgegebenen Kreise (mit " x " markiert) polarisiert werden.

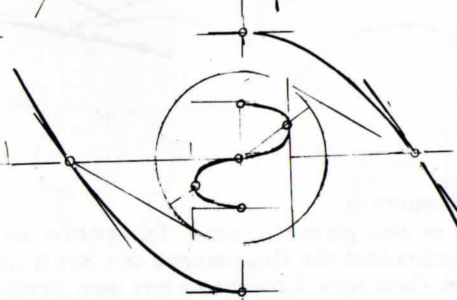
Dornspitze wird
Wendestelle:
2 → 2'

Tangente zu 1' geht durch den Mittelpunkt des Kreises, da 1 unendlich fern ist.
3 liegt auf der Asymptote: daher geht die Tangente zu 3' durch 1'.



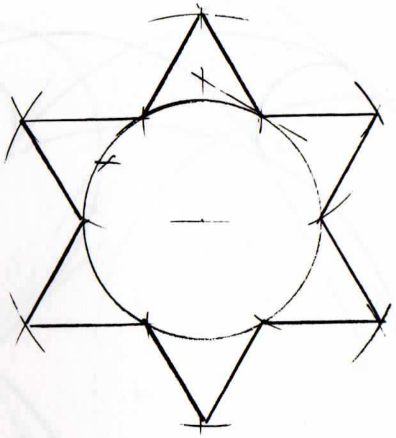


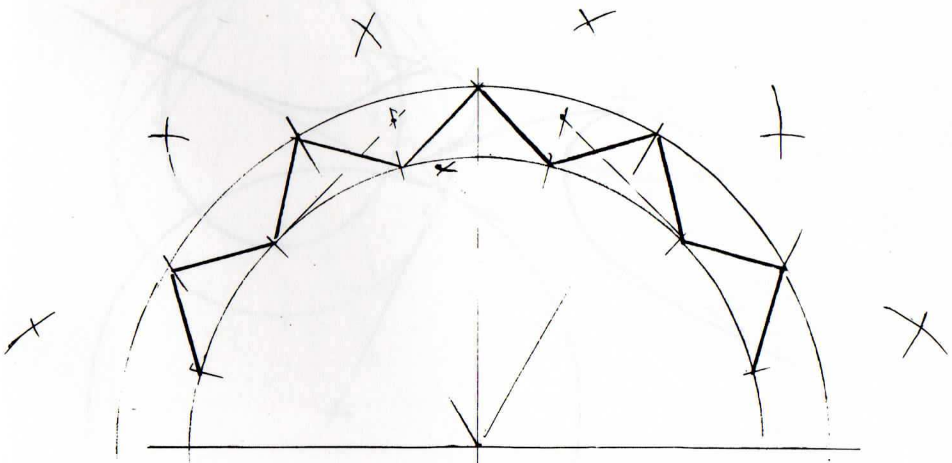
Eine Dornspitze im Zentrum des Kreises wird zu einer parabolischen Wendestelle, d.h. Wendepunkt und Wendetangente liegen im Unendlichen.



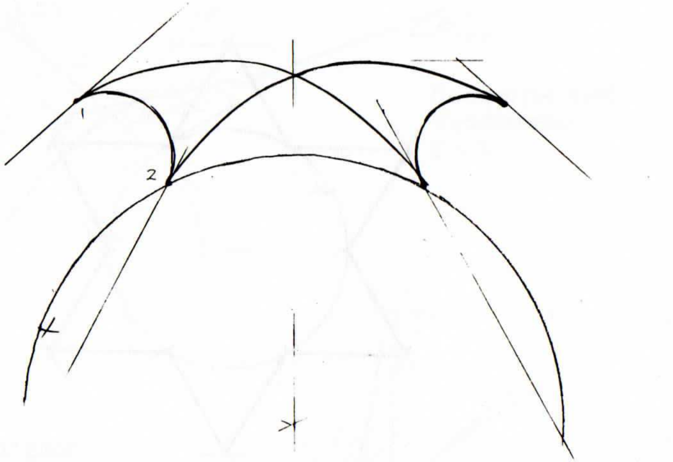
Eine Wendestelle im Zentrum wird zu einer parabolischen Dornspitze, d.h. Spitzpunkt und Spitztangente liegen im Undendlichen.

1.) **Ein Punktstern wird zum Strahlenstern.**
Man zeichne die entsprechenden Strahlenbüschel.



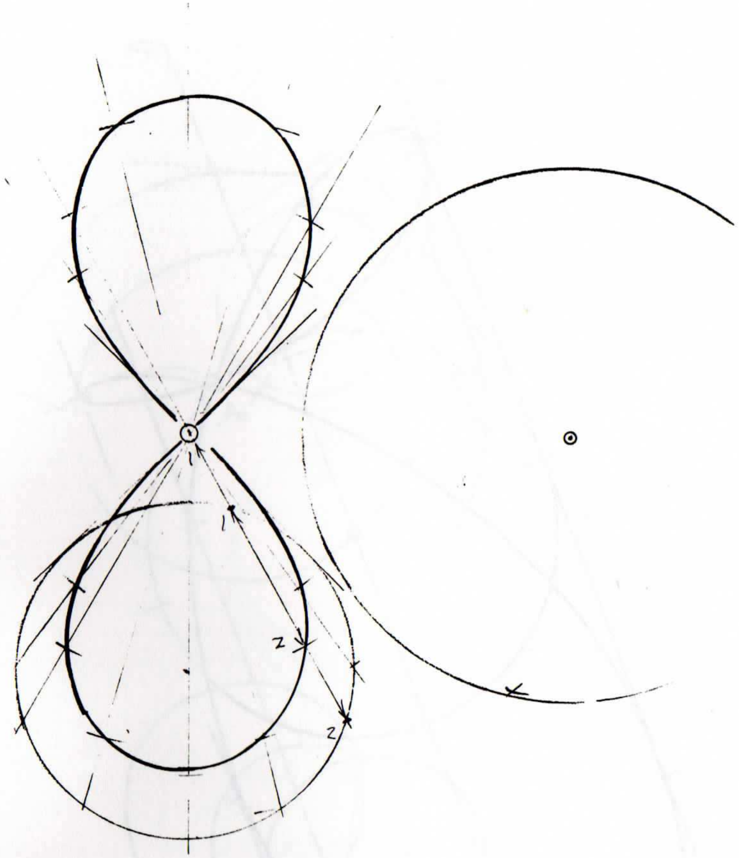


2.) Freie Kurven.



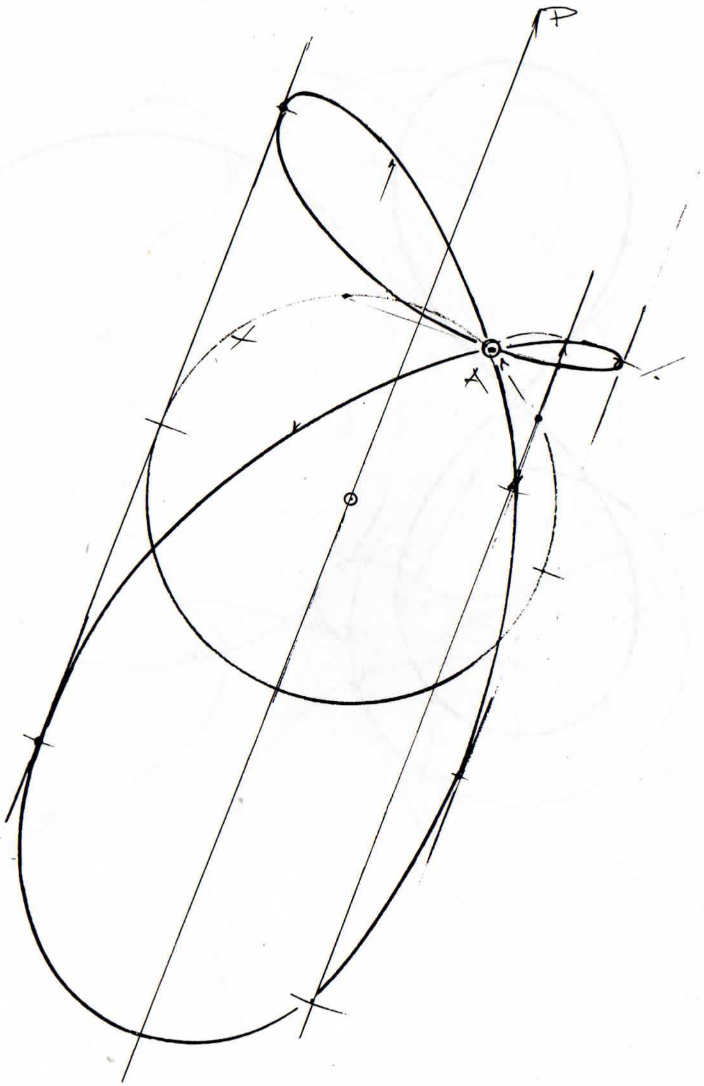
3.) <u>Lemniskate</u>

(Hier als Cissoide bezüglich eines Kreises konstruiert.)



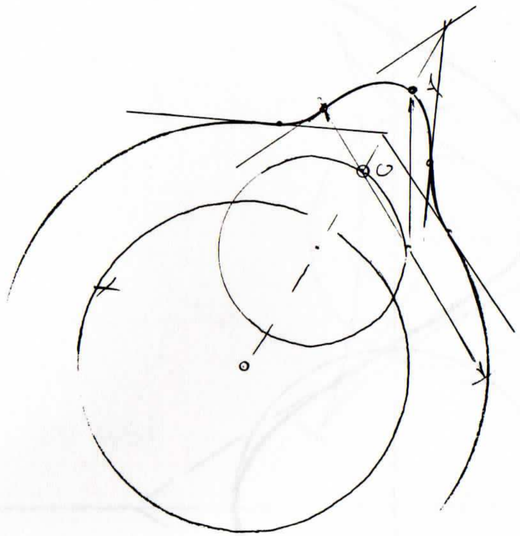
3.) **Strophoide**

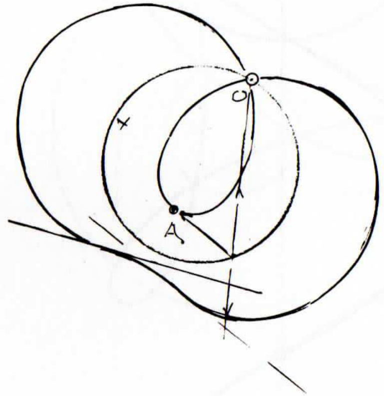
("Pol" im Unendlichen in bezug auf Kreis, Abstände von A sind auf dem Geradenbüschel beidseitig abgetragen.)



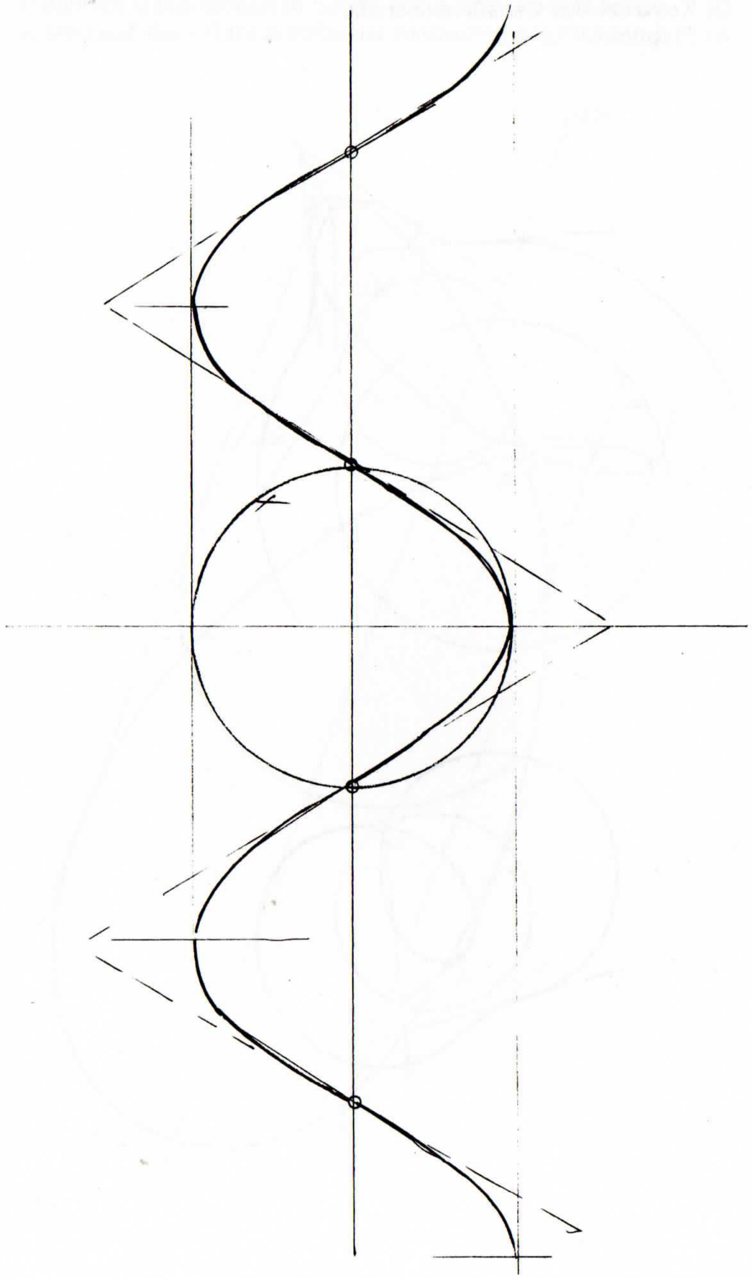
5.) **Strophoide**

O: Zentrum des Geradenbüschels.
A: Fixpunkt.

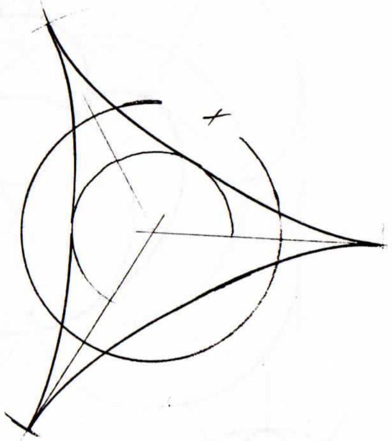


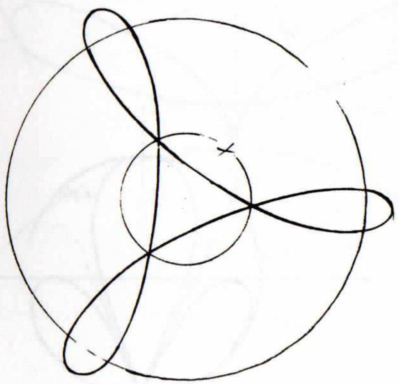


6.) Sinuskurve



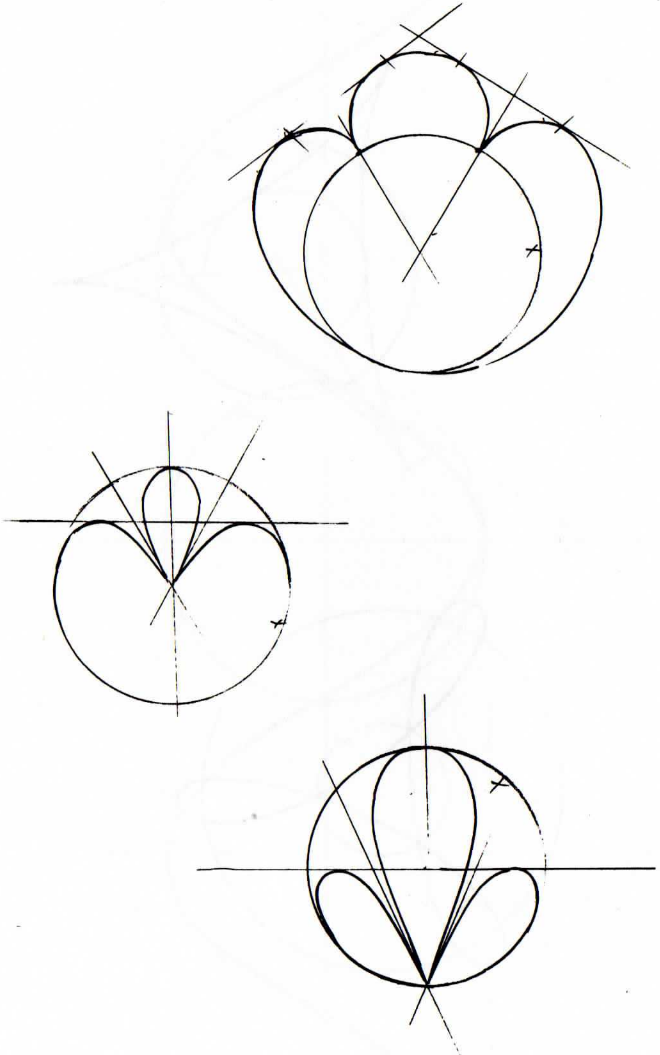
7.) Hypozykloiden



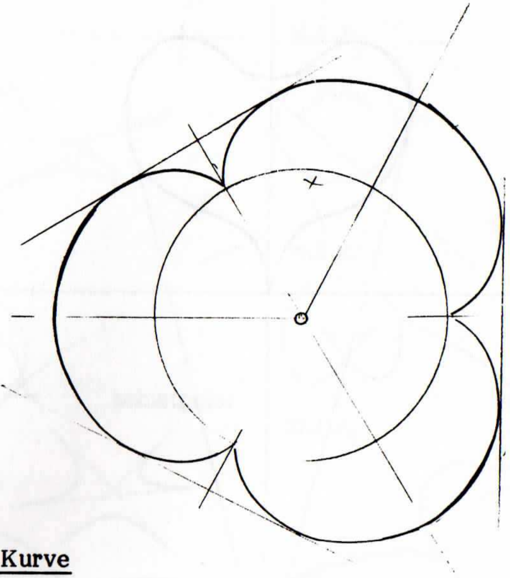


8.) Freie Kurven

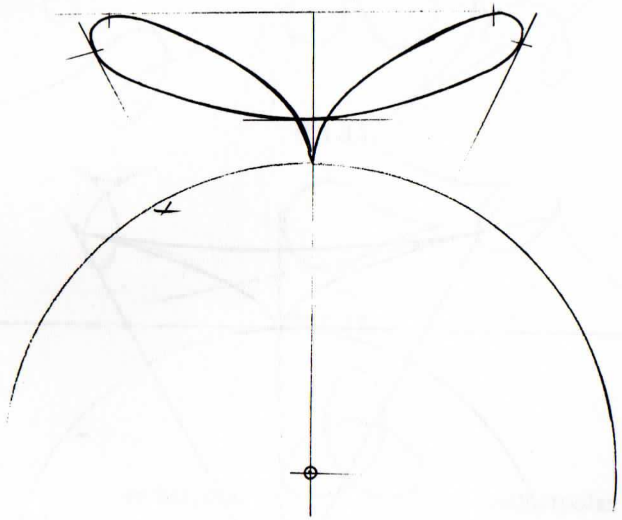
(Drei Stadien einer Metamorphose.)



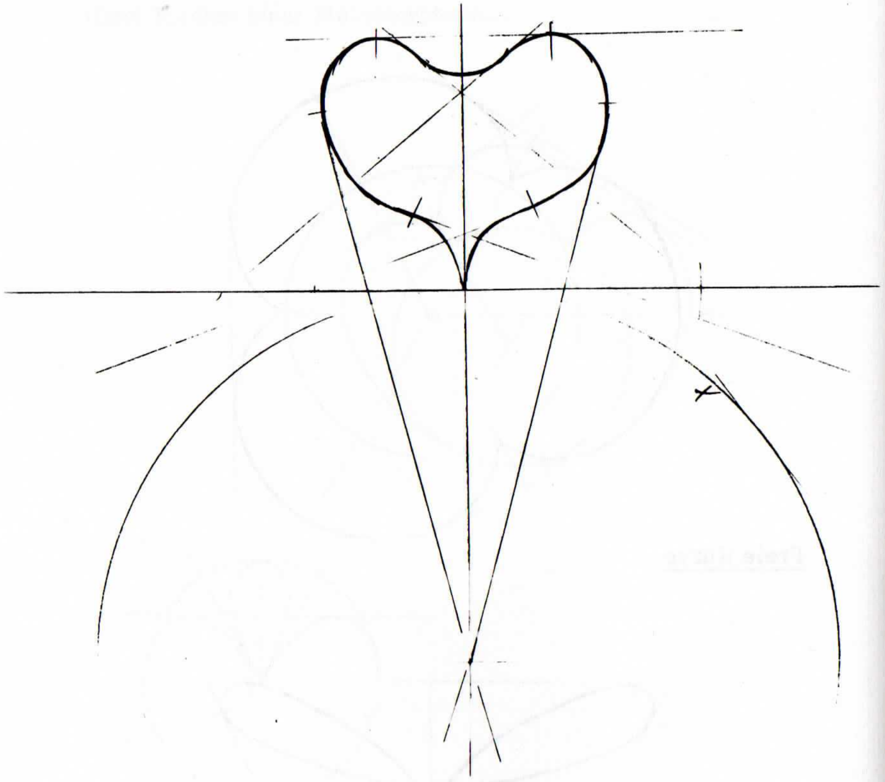
9.) Epizykloide

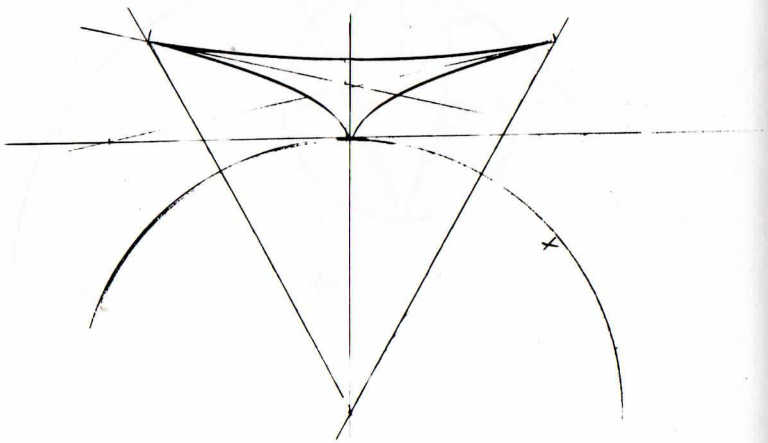


Freie Kurve



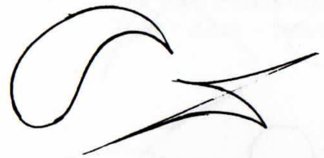
10.) Freie Kurven



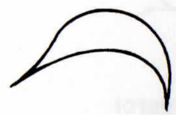


M.1. Lösungen

M.1.1.

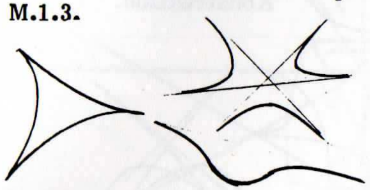


M.1.2.

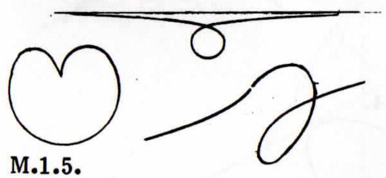


selbstpolar

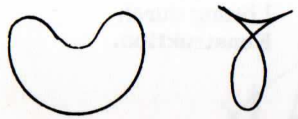
M.1.3.



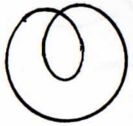
M.1.4.



M.1.5.

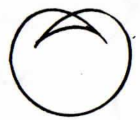


M.1.6.



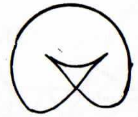
selbstpolar

M.1.7.



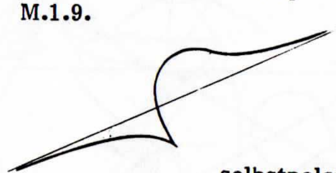
selbstpolar

M.1.8.



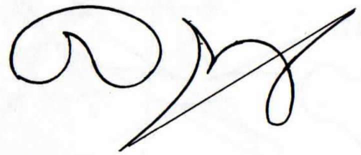
selbstpolar

M.1.9.



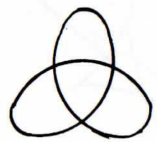
selbstpolar

M.1.10.



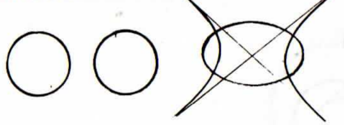
M.1.11.

M.1.12.

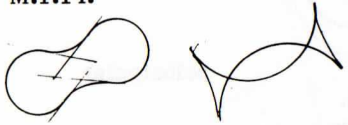


selbstpolar

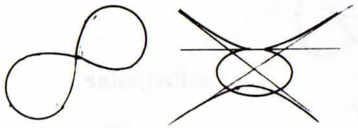
M.1.13



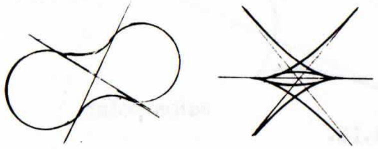
M.1.14.



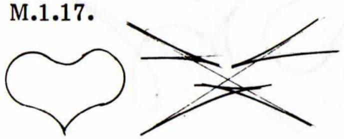
M.1.15.



M.1.16.

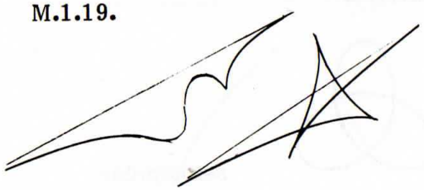


M.1.17.

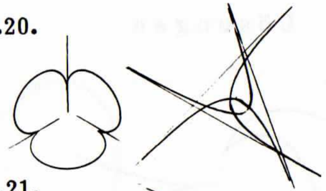


M.1.18.

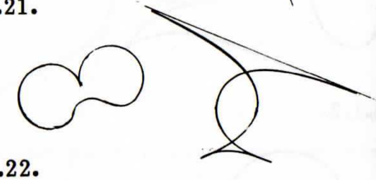
M.1.19.



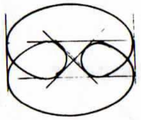
M.1.20.



M.1.21.

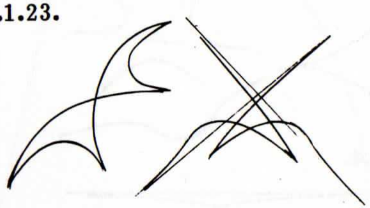


M.1.22.



Lösung durch Konstruktion.

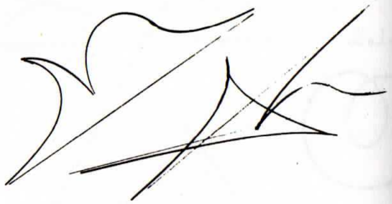
M.1.23.



M.1.24.

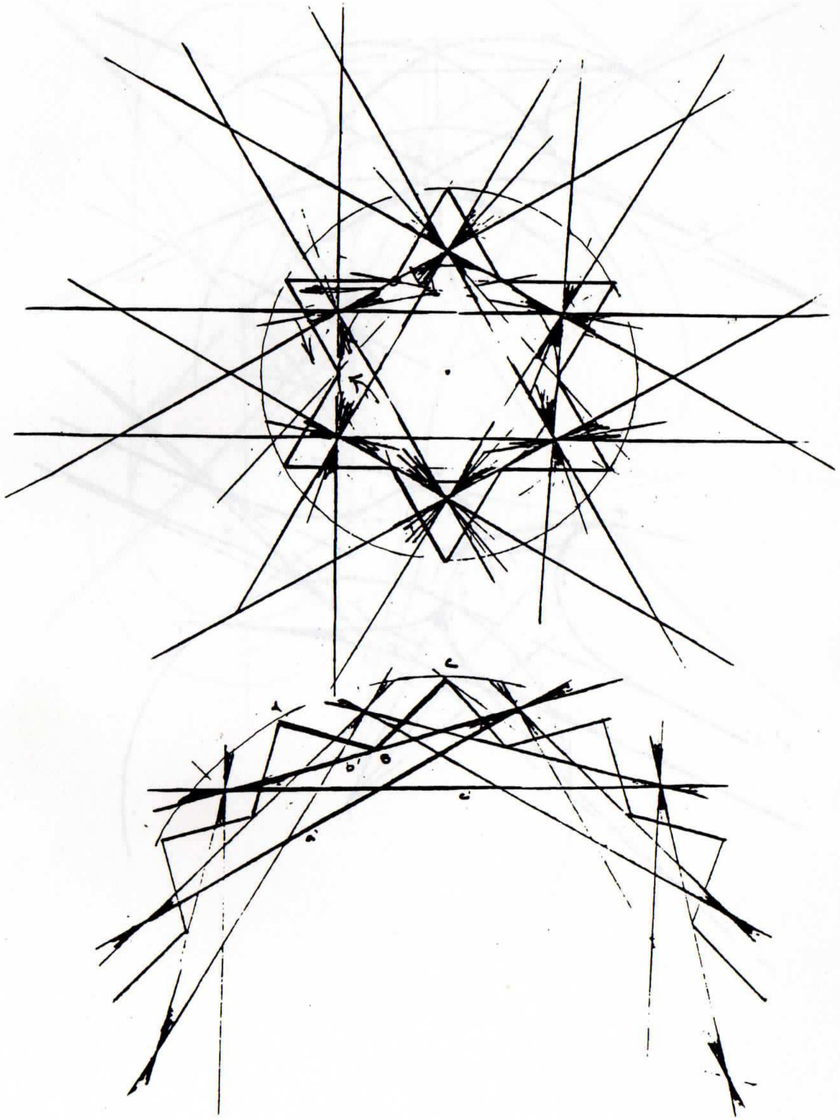
Lösung durch Konstruktion.

M.1.25.

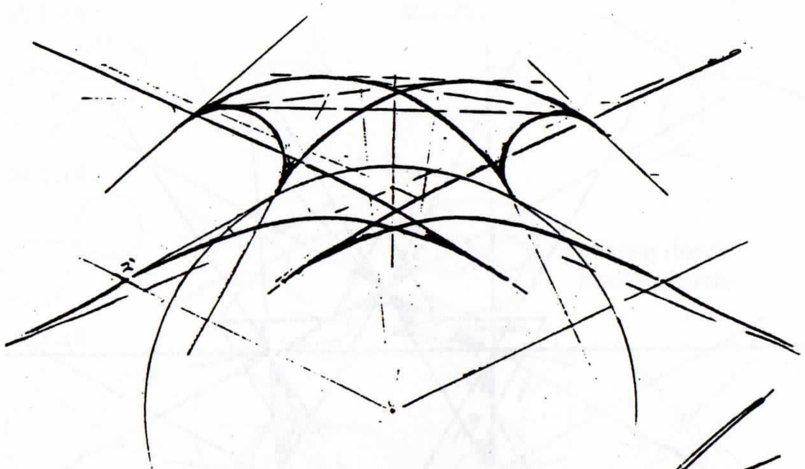


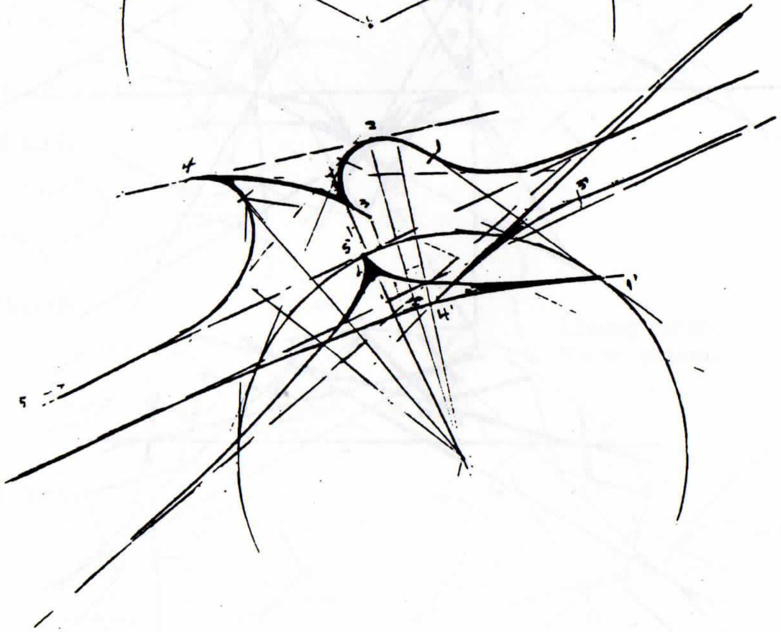
M.2. Lösungen

M.2.1. Zick - Zack - Linie (Punkte) und ihre Polarform: Zick - Zack - Stern (Linien).

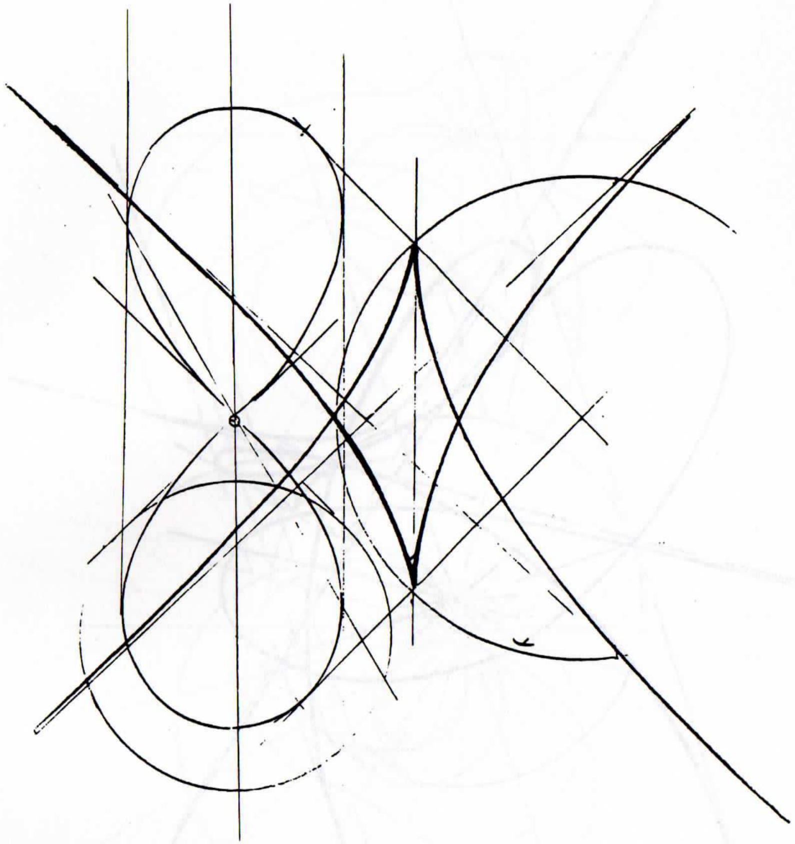


M.2.2. Freie Kurven und ihre Polarformen.

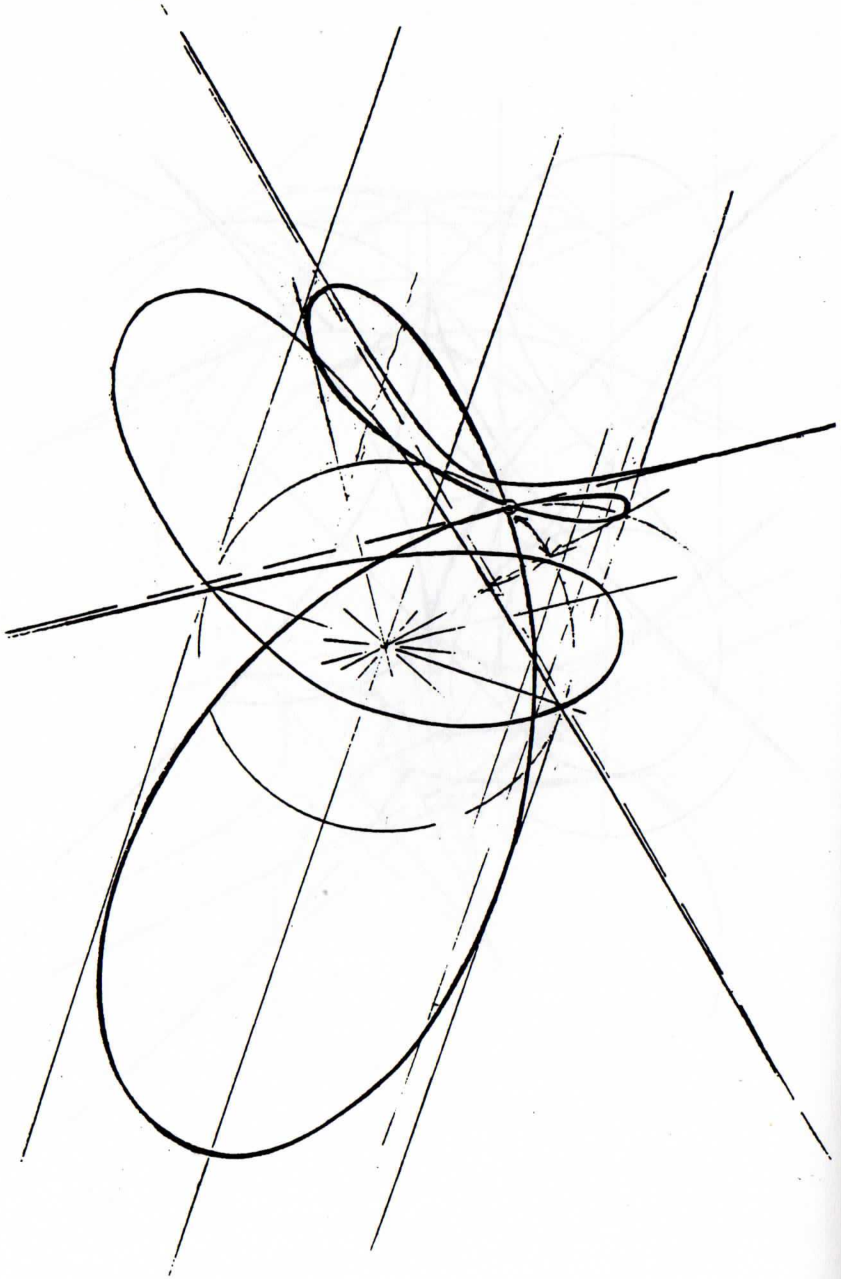




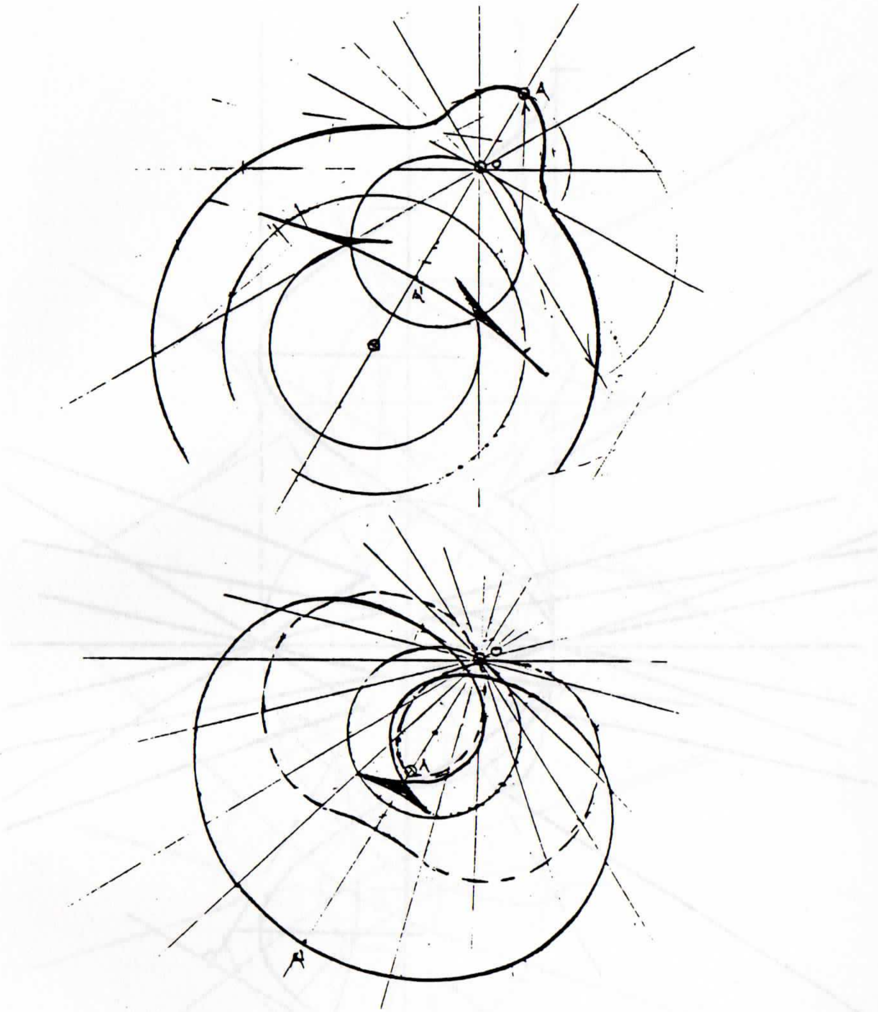
M.2.3. Lemniskate mit Polarform.



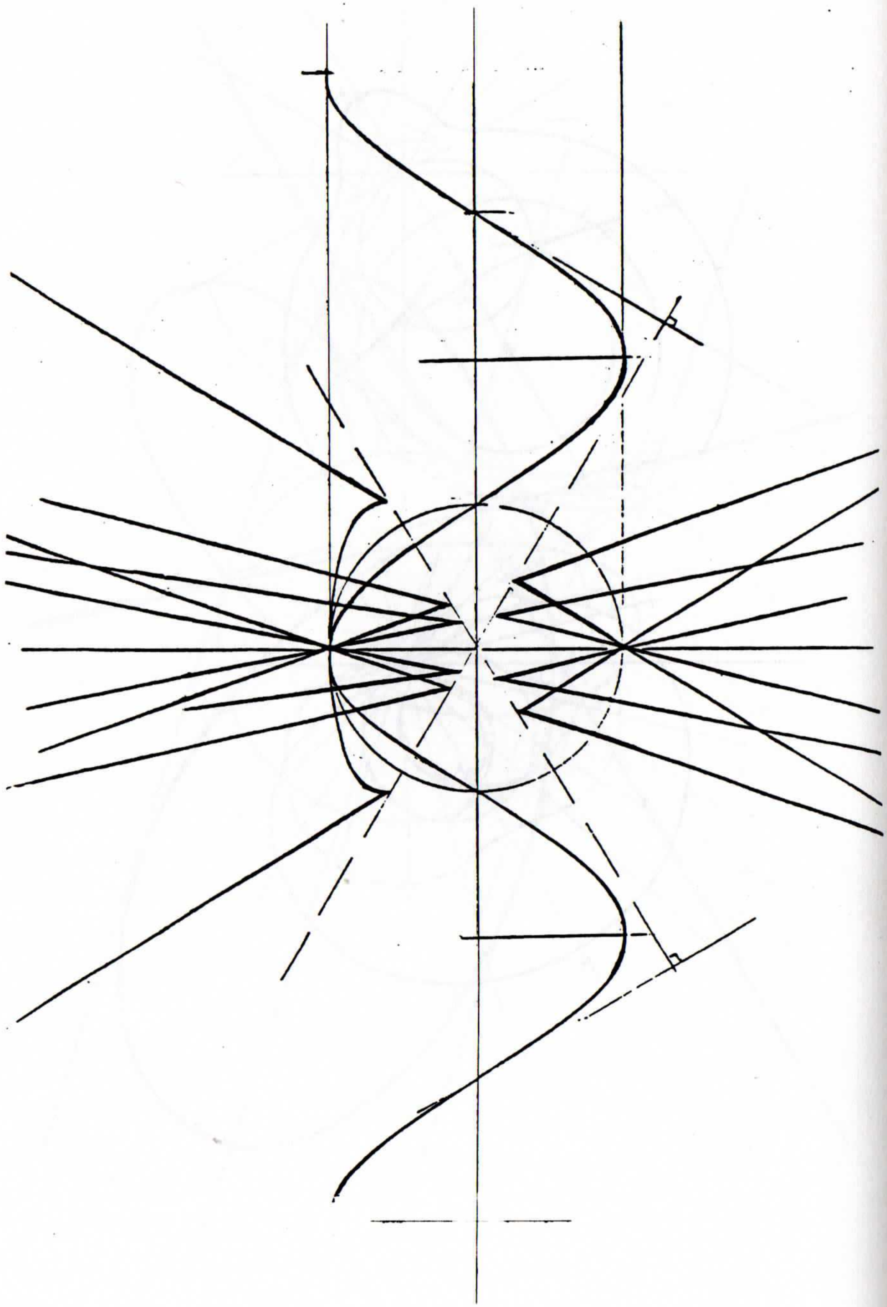
M.2.4. Strophoide mit Polarform.



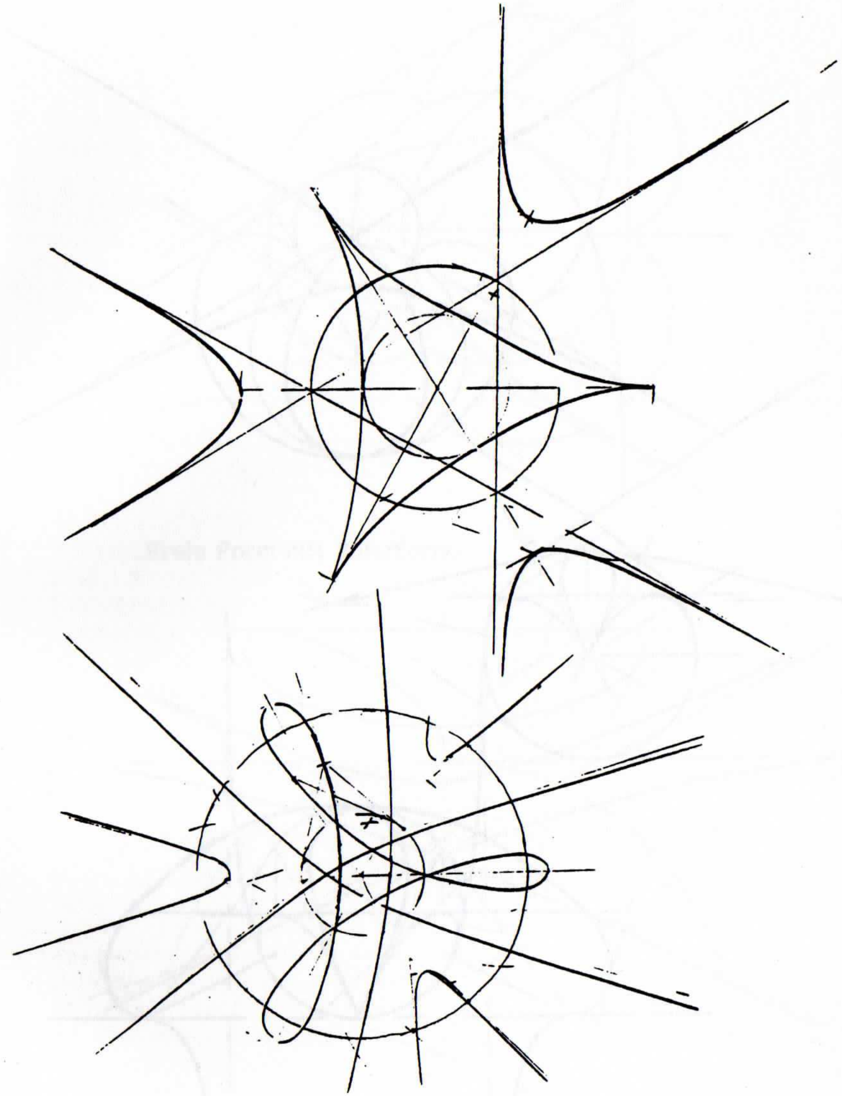
M.2.5. Strophoide mit Polarform.



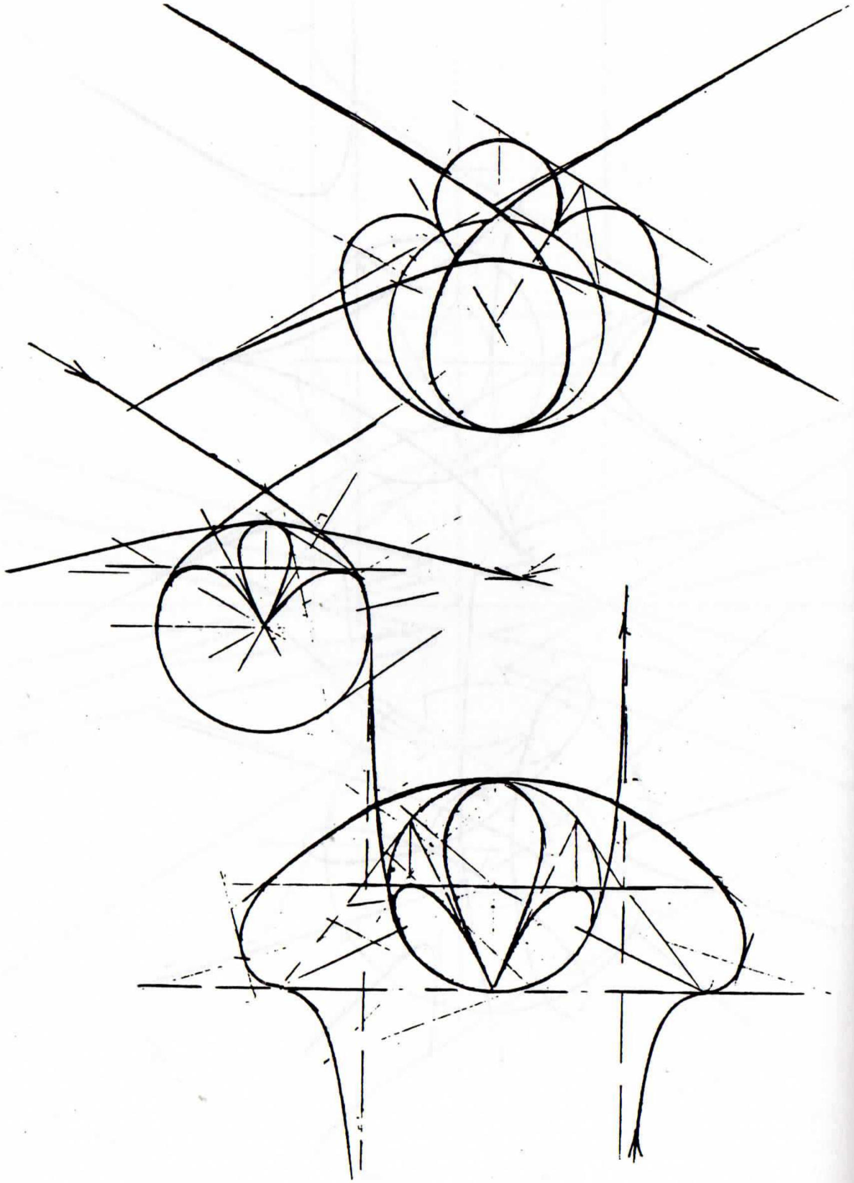
M.2.6. Sinuslinie mit Polarform.



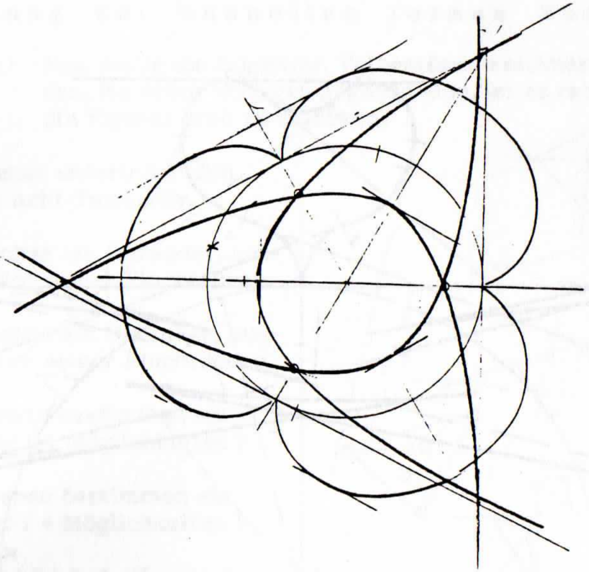
M.2.7. Hypozykloiden mit Polarform.



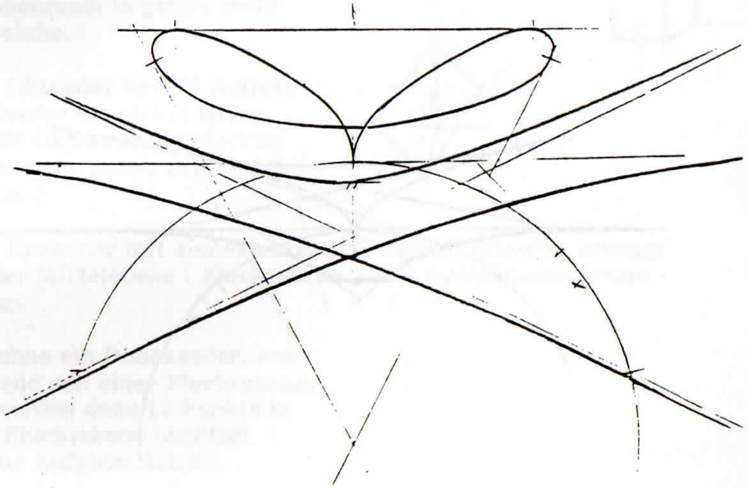
M.2.8. Freie Kurven in drei Stationen einer Metamorphose und ihre Polarformen.



M.2.9. Epizykloide mit Polarform.



Freie Form mit Polarform.



M.2.10. Freie Formen mit Polarformen.