Ernst Schuberth entwickelt für den Geometrieunterricht der vierten und fünften Klasse eine vergleichende Formenlehre. Im Rahmen der Freihandgeometrie werden die elementaren geometrischen Formen vergleichend betrachtet und am Ende der fünften Klasse die geometrischen Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal entwickelt.

Ein Leitfaden für den Aufbau des Geometrieunterrichts mit Anregungen für den Lehrer und Aufgaben für die Schüler.

Dieses Buch ist Teil einer geplanten mehrbändigen Gesamtdarstellung des Geometrieunterrichts in den Klassen 1 bis 8 an Waldorfschulen.

Band 1: Das Formenzeichnen als tätige Geometrie in den Klassen 1 bis 4

Band 2: Vergleichende Formenlehre und geometrische Grundkonstruktionen in den Klassen 4 und 5

Band 3: Die ersten Schritte in die beweisende Geometrie in der 6. Klasse

Band 4: Die Geometrie in den Klassen 7 und 8

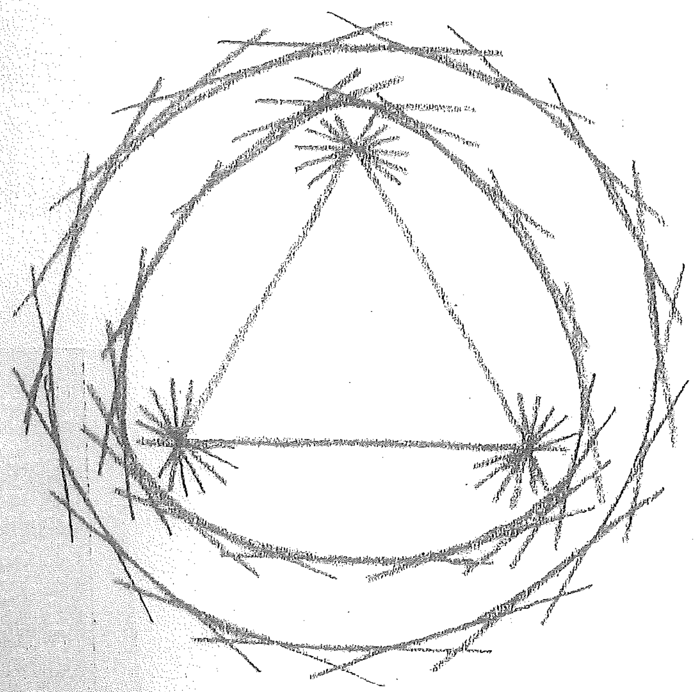
ISBN 3-7725-1682-3

Mu
Schu
2

Ernst Schuberth

Der Geometrieunterricht an Waldorfschulen

Band 2: Vergleichende Formenlehre und geometrische Grundkonstruktionen in den Klassen 4 und 5



Verlag Freies Geistesleben

Menschenkunde und Erziehung

82

Schriften der Pädagogischen Forschungsstelle beim Bund der Freien Waldorfschulen

ERNST SCHUBERTH

Der Geometrieunterricht an Waldorfschulen

Band 2: Vergleichende Formenlehre und geometrische Grundkonstruktionen in den Klassen 4 und 5

Freie Waldorfschule
Karlsruhe
Lehrerbibliothek

VERLAG FREIES GEISTESLEBEN

1. Auflage 1998
Verlag Freies Geistesleben
Landhausstraße 82, 70190 Stuttgart

ISBN 3-7725-1682-3

© 1998 Verlag Freies Geistesleben & Urachhaus GmbH, Stuttgart

Nach den Richtlinien der neuen Rechtschreibung
Einband: Walter Schneider
Druck: WB Druck, Rieden am Forggensee

Inhalt

Vorwort

Dieses Buch ist Teil einer mehrbändigen Gesamtdarstellung des Geometrieunterrichts in den Klassen 1 bis 8 an Waldorfschulen. Entsprechend den menschenkundlichen Entwicklungsgesetzen werden drei Stufen betrachtet: Die erste umfasst etwa die Klassen 1 bis 3, die zweite die Klassen 4 und 5 und die dritte die Klassen 6 bis 8. E. A. K. Stockmeyer hat in seiner Zusammenstellung der Lehrplanangaben Rudolf Steiners als Erster auf die Spiegelung dieser Entwicklungsstufen im Geometrieunterricht aufmerksam gemacht.[1] Auf der ersten Stufe, im *Formenzeichnen*, wird die Geometrie als *tätige Geometrie* gepflegt. Das Kind lernt Formen vielfältig erfassen und erzeugen. Es schult seine Feinmotorik und entwickelt ein Gefühl für die Sprache der Formen, ein *Formenfühlen*. Auf der zweiten Stufe treten die *Beziehungen der Formen zueinander* in den Vordergrund. Stockmeyer nennt dies eine *vergleichende Geometrie*. Auf der dritten Stufe beginnt, was wir gewöhnlich als Geometrie bezeichnen: die *beweisende Geometrie*.

Mit dieser mehrteiligen Darstellung der verschiedenen Stufen wird der Versuch unternommen, Inhalt und Zusammenhang der einzelnen Stufen in einem möglichen Aufbau darzustellen. Wie ich schon in anderen meiner Bücher betont habe, betrachte ich den Aufbau als *Anregung* für den selbständig arbeitenden Lehrer. Es widerspräche dem Selbstverständnis der Waldorfschulbewegung, wenn ein möglicher Weg dogmatisch vertreten würde. Vielmehr erhoffe ich, dass diese Darstellung eines Tages eine Weiterentwicklung durch Kolleginnen und Kollegen findet, die von ihren Erfahrungen berichten und Anregungen vermitteln.

Die Gefahr einer kanonischen Festschreibung ist glücklicherweise – außer durch das naturgemäße Unabhängigkeitsbedürfnis der Waldorflehrerinnen und -lehrer – dadurch gemildert, dass zum Geometrieunterricht eine Vielfalt unterschiedlicher und anregender Darstellungen schon vorliegt. Neben den wunderbaren alten Darstellungen von Hermann von Baravalle und von Alexander Strakosch möchte ich vor allem auf die Bücher des erfahrenen Kollegen Arnold Bernhard hinweisen, die sich für viele Kolleginnen und Kollegen als hilfreich erwiesen haben.[2]

Unbedingt zu erwähnen habe ich das Buch von Arnold Wyss, Ernst Bühler, Fritz Liechti und René Perrin, *Lebendiges Denken durch Geometrie*, das seinem Inhalt nach dieser Darstellung am nächsten kommt. Darin sind viele Anregungen für den Unterricht zu finden, die in einer Waldorfschule in der vierten und fünften Klasse Platz finden können. Deshalb möchte ich das Studium der entsprechenden Teile jenes Buches besonders empfehlen.

Zu danken habe ich vielen Kolleginnen und Kollegen, deren Arbeit ich bei unterschiedlichen Gelegenheiten kürzer oder länger begegnen konnte, den Kindern, mit denen ich arbeiten durfte, aber auch den Freunden in der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum, durch deren jahrelange Zusammenarbeit spirituelle Gesichtspunkte für ein Verständnis der Mathematik gewonnen werden konnten. Mein Dank gilt auch Frau Monika Feles-Baumann, die das Manuskript zu großen Teilen abschrieb.

Mannheim, Freie Hochschule für anthroposophische Pädagogik,
im Winter 1997

Ernst Schuberth

Einleitung

Etwa im zehnten Lebensjahr durchlebt das Kind einen seelischen Wandel, der ihn in ein neues, bewussteres Verhältnis zur Umwelt setzt.[3] Der Lehrplan der Waldorfschulen antwortet auf diese Veränderungen unter anderem dadurch, dass eine erste Ordnung der Tiere, dann der Pflanzen und – im sechsten Schuljahr – der Mineralien besprochen wird. Für das Tier- und Pflanzenreich lässt sich eine Ordnung altersgemäß finden, indem die Tiere auf den Leib und die Pflanzen auf das Seelenleben des Menschen vergleichend bezogen werden.[4]

In der Geometrie kann in methodisch ähnlicher Weise eine vergleichende Beschreibung der einfachsten geometrischen Formen – wie des Kreises, der Dreiecke und Vierecke – einsetzen. Das Kind lernt dabei, die einzelnen Formen bewusster anzuschauen, unterschiedliche Formen zu benennen und einzelne Bestimmungsstücke zu unterscheiden. Dabei wird nicht schlussfolgernd das eine aus dem anderen hergeleitet, wie es vom sechsten Schuljahr an angemessen ist, sondern es werden *vergleichend* die Formen in Beziehungen zueinander gesetzt.

Der im Folgenden vorgeschlagene Aufbau kann selbstverständlich nur als *ein* möglicher Weg betrachtet werden. Andere Inhalte statt der behandelten sind durchaus denkbar. Bei der vergleichenden Formenlehre war es mein Anliegen, von den möglichst vollkommenen Formen (Kreis, Quadrat, gleichseitiges Dreieck) auszugehen und aus ihnen die abgeleiteten, weniger symmetrischen Formen hervorgehen zu lassen. Ich sehe dies in Entsprechung dazu, dass in der Naturkunde zuerst der Mensch behandelt wird, der als eine Art Urbild die einzelnen Naturformen umschließt.

Vorgeschlagen wird auch, die elementaren Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal gegen Ende der fünften Klasse auszuführen. Immer wieder habe ich erlebt, mit welcher Begeisterung die Kinder in diesem

Alter den Übergang vom Formenzeichnen und der Freihandgeometrie zu beschreibbaren Konstruktionsverfahren vollziehen. Damit wird auch die Möglichkeit geschaffen, in der sechsten Klasse tatsächlich mit der beweisenden Geometrie einzusetzen.

Ein weiteres Anliegen des folgenden Aufbaues ist die Entwicklung von *Raumvorstellungen* beim Kind. Hat es in den ersten Schuljahren noch vorwiegend ein flächenhaftes Vorstellen,[5] so beginnt es nach dem Entwicklungseinschnitt im zehnten Lebensjahr deutlicher innerlich die dritte Dimension zu erfassen. Auch wenn eine räumliche Geometrie – außer vielleicht in der Behandlung der regulären Polyeder und einfacher Volumenberechnungen – der Oberstufe vorbehalten bleiben muss, kann doch gerade eine einfache Betrachtung von Licht- und Schattenverhältnissen viel zur Entwicklung von Raumvorstellungen beitragen.[6] Eine Anregung dafür ist hier nur beispielhaft angedeutet. Ähnliche Betrachtungen können in den Geometrieunterricht oder auch in andere Epochen so eingeflochten werden, wie die Gelegenheit es ergibt. In den Darstellungen für die dritte Stufe (Klasse 6 bis 8) wird manches davon noch genauer ausgeführt.

Ein Wort noch zu den Zeichnungen: Die Freihandzeichnungen sind zum großen Teil zunächst mit Bleistift skizziert und dann mit einem kräftigen Stift nachgezeichnet worden. In anderen Fällen wurde aber mit Zirkel und Lineal konstruiert, damit die gemeinte Gesetzmäßigkeit deutlich wurde, der man auch im reinen Freihandzeichnen möglichst nahe kommen sollte. Um den Charakter einer freien Zeichnung anzudeuten, wurde dann die Konstruktion mit Buntstift nachgezeichnet. Einzelne Zeichnungen, die doch als Freihandzeichnungen gedacht sind, wurden erkennbar als Zeichnungen mit Zirkel und Lineal belassen. Sie sind nur zur Orientierung, nicht als Vorbild gedacht.

Die Lehrerinnen und Lehrer werden immer bedenken müssen, dass eine Tafelzeichnung ganz andere Geschicklichkeiten erfordert als eine kleine Zeichnung auf dem Papier. Sie werden also in jedem Fall einige Zeit vorher mit Übungen an der Tafel beginnen müssen. Dies gilt sowohl für Freihand- wie für konstruierte Zeichnungen. Für die Kinder ist von wesentlicher Bedeutung, *wie* der Lehrer oder die Lehrerin zeichnen. Die tatsächlichen Bewegungsabläufe – ob die Hand ruhig oder nervös, mit starkem oder schwachem Druck usw. geführt wird – sind ein wesentlicher Eindruck, den die Kinder aufnehmen und der ihr Verhältnis zum behandelten Inhalt mitbestimmt!

Ratsam und hilfreich ist es bei schwierigen Freihandzeichnungen, sich mit einer leichten Skizze die Position und wichtige Punkte festzulegen. Von einer guten Vorbereitung hängt der Erfolg ab. Strahlen von der Lehrerin oder dem Lehrer Vertrauen in die Fähigkeiten der Kinder aus und leiten sie sie ruhig und überschaubar an, dann können die Kinder Erstaunliches leisten. Dass dabei die Freihandzeichnungen im Allgemeinen nicht die Genauigkeit einer Konstruktion haben können, ist selbstverständlich. Dafür schult aber das Kind daran unmittelbar seine eigene Konstitution – die Koordination von Auge und Hand, die Feinmotorik und manches andere.

Ein wesentliches Handicap für die gedruckten Zeichnungen ist der Mangel an Farbe. In Kursen bemühe ich mich nach Möglichkeit, Farben sinnvoll zur Hervorhebung geometrischer Strukturen oder überhaupt um der Schönheit willen einzusetzen. Aus finanziellen Gründen ist das hier nicht möglich. Im Unterricht sollte aber die Belebung durch die Farbe nicht fehlen. Zu vermeiden ist allerdings ein sinnloses Buntmachen oder ein Verzieren mit Blümchen und Ähnlichem. Die Schönheit geometrischer Zeichnungen liegt wesentlich in der inneren Gesetzmäßigkeit, die sie offenbaren und die meistens viel tiefer reicht, als sie auf dieser Stufe überschaut werden kann. Indem das Kind sich tätig und vergleichend betrachtend in die geometrische Formenwelt einlebt, gewinnt es zu ihr diejenige Beziehung, die später Erkenntnisfragen in der Seele aufsteigen lässt und damit zur eigentlichen mathematischen Betrachtungsweise hinführt.

«Und jetzt können wir in diesem Lebensalter des Menschen auch zur Geometrie übergehen, während wir vorher dasjenige, was dann Geometrie wird, ganz im Zeichnerischen drinnen gehalten haben. Am Zeichnerischen können wir ja dem Menschen Dreieck, Quadrat, Kreis und Linie entwickeln. Die eigentlichen Formen entwickeln wir also am Zeichnerischen, indem wir zeichnen und dann sagen: Das ist ein Dreieck, das ist ein Quadrat. Aber was als Geometrie hinzutritt, wo wir die Beziehungen zwischen den Formen suchen, das beginnen wir erst so um das 9. Jahr herum.»[7]

Mit diesen Worten regt Rudolf Steiner eine Formenlehre an, deren innerer Duktus in der von ihm parallel geforderten Menschen-, Tier- und Pflanzenkunde ausführlicher dargestellt wird. Insbesondere sehe ich eine innere Beziehung zu deren methodischem Aufbau in dem Herstellen von *Verwandtschaftsverhältnissen* und dem Rückbeziehen auf gewisse *Urformen.* So gehen Dreieck und Quadrat aus dem Kreis, die allgemeineren Vierecke aus dem Quadrat hervor. Wie dies im Einzelnen geschehen kann, wird im Folgenden gezeigt. Dabei handelt es sich um *mögliche* Themenkreise, die keinen Anspruch auf allgemeine Verbindlichkeit erheben, sondern durch anderes ersetzt oder auch noch stärker in das rein Künstlerische hineingeführt werden könnten.

Wo eine geometrische Formenlehre einen angemessenen Platz im Unterricht findet, wird jeder Lehrer am besten selber entscheiden. Sicher ist aber zum Beispiel ein Teil einer Formenzeichenepoche oder auch ein Anhang an eine Rechenepoche geeignet. Bezüglich der Jahreszeit habe ich sehr gerne im Winter geometrische Betrachtungen durchgeführt.

Hinführung zur Geometrie

Vom Kreis zur Ellipse

Klaus[8] wird herausgerufen und läuft – nach Aufforderung – vor der Klasse einen Kreis. Der Lehrer zeichnet einen Kreis an die Tafel und weist auf den Zusammenhang zwischen der gelaufenen und der gezeichneten Form hin: «Auf dem Boden hat Klaus sich im Kreis bewegt. Auch ich habe mit meiner Hand eine Kreisbewegung vollzogen, und als ihr mit den Augen verfolgtet, was ich zeichnete, habt ihr mit eurem Blick ebenfalls eine Kreisbewegung gemacht. An der Tafel seht ihr die *Spur* meiner Bewegung, weil ich eine Kreide in der Hand hatte. Dadurch ist die Kreisform auf der Tafel entstanden. Zuerst war die Bewegung da. Jetzt habt ihr in der Kreisform noch die *Spur* der Bewegung, eine *Bewegungsspur.*»

Es ist wichtig, auf den Zusammenhang zwischen der gelaufenen Form und der Tafelzeichnung sorgfältig hinzuweisen. Im Sinne der Brunerschen Repräsentationsmodi könnte man von einer enaktiven und einer ikonischen Darstellung sprechen.[9] Verständnisschwierigkeiten treten für die Kinder häufig dort auf, wo von einer Darstellungsform zu einer anderen übergegangen wird, ohne dass der Zusammenhang sorgfältig besprochen wurde. Die Bewegung des Kindes vor der Klasse wird als dreidimensionale Handlung (enaktiv) erlebt. Die Tafelzeichnung erscheint für das Kind – vor allem wenn die hervorbringende Bewegung beendet ist – in erster Linie zweidimensional-bildhaft (ikonisch). Sie verliert den dreidimensionalen Charakter, mit dem alle leiblichen Tätigkeiten verbunden sind. Es ist deswegen wichtig zu zeigen, wie dieses Bild aus einer Tätigkeit hervorgegangen ist und im Anschauen wiederum durch eine Tätigkeit – in der Bewegung der Augen – erfasst wird.

Natürlich ist die Kreisform den Kindern lange bekannt und im Formenzeichnen und in der Eurythmie oft gebildet worden. Um nun in eine vergleichende Formenbetrachtung einzutreten, geht der Lehrer zunächst selber den Kreis und zieht ihn allmählich in wiederholtem Herumgehen in die Länge, so dass eine *Ellipse* entsteht. Die Kinder beobachten dabei die eintretende Veränderung: An den zwei Enden – den Hauptscheiteln – werden die Krümmungen immer stärker, dazwischen – an den Nebenscheiteln – immer schwächer. Schließlich kann man etwa das Folgende herausfinden:

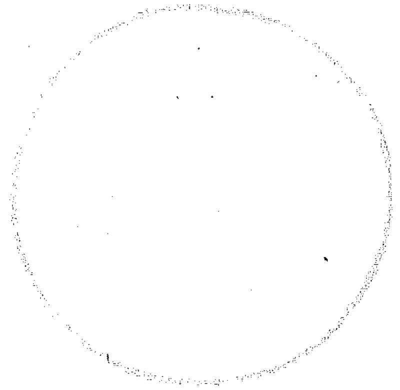


Abb. 1: Der Kreis als Bewegungsspur.

Geht man einen Kreis, so *schreitet* man Schritt für Schritt *fort* und *dreht* sich dabei gleichmäßig. Geht man eine Ellipse, so schreitet man auch immer weiter fort, aber das Drehen ist an den schlanken Enden stärker, dazwischen schwächer. Das Herumdrehen wird *rhythmisiert*.

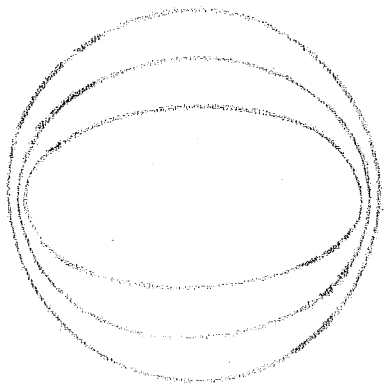


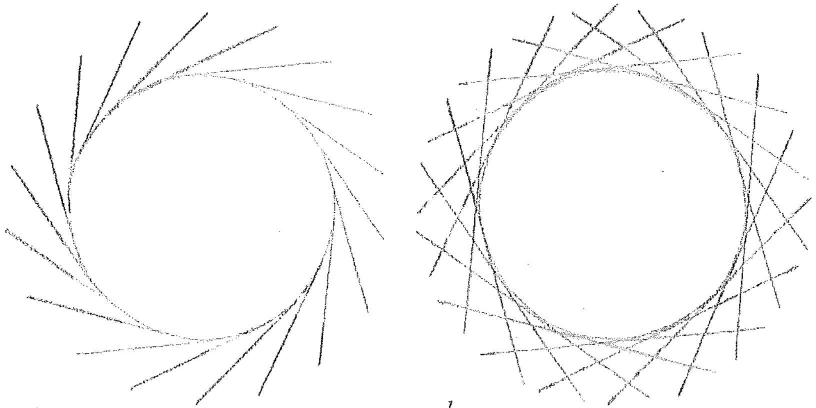
Abb. 2: Vom Kreis zur Ellipse.

Auf dieses *Drehen* und *Fortschreiten* beim Umlaufen einer Form ist einige Zeit zu verwenden. Beide Bewegungen kann man isoliert ausführen lassen und nach dem Unterschied fragen. Vielleicht gelingt es, dass gesagt wird: Beim Fortschreiten ändert man seinen *Ort*, beim Drehen die *Richtung* des Blickes.

Drehen und Fortschreiten sind also ganz unterschiedliche Bewegungen. Getrennt vollzogen, wird dies recht gut verstanden. Dass aber beim Umlaufen eines Kreises (der Nase nach) beide Bewegungen gemeinsam ausgeführt werden, bereitet manchen Kindern Verständnisschwierigkeiten. In meiner Münchener Klasse war es vor allem Klaus, der dies partout nicht einsehen wollte. Dass er weiterging, war ihm klar; das Drehen dabei schien ihm unverständlich. Ich ließ ihn also noch einmal sich nur drehen, und er hatte aufzuzählen, was er ringsum sah. Drehte er sich einmal ganz herum, so hatte er ringsum alle Wände gesehen. Nun lief er noch einmal den Kreis und hatte zu beschreiben, was er sah. Auch jetzt hatte er ringsum alle Wände gesehen, als der Kreis vollendet war. Irgendwie blieb ihm die Sache verdächtig. Ich versuchte es noch auf andere Weise: «Wenn du dich einmal herumdrehst, haben dich die anderen Kinder einmal von allen Seiten gesehen. Gehe noch einmal einen Kreis, und ein Kind wird beschreiben, von wo aus es dich sieht.» Klaus tat dies, und ein anderes Kind sagte: «Bauch, linke Schulter, Rücken, rechte Schulter, Bauch.» Während Klaus also den Kreis gelaufen war, hatte ein anderes Kind ihn von allen Seiten sehen können – wie beim vollen Herumdrehen um die eigene Achse.

Indem wir dies alles taten, gewannen auch die letzten Kinder die Überzeugung, dass es mit dem Drehen beim Gehen auf einer Kreislinie tatsächlich etwas auf sich hat. Nur Klaus blieb misstrauisch. Schließlich half Folgendes. Ich sagte: «Gehe noch einmal ein Stück geradeaus, und dann drehe dich eine Weile. Was ist der Unterschied?» Klaus tat dies und sagte: «Beim Drehen wird einem schwindelig, beim Geradeausgehen nicht.» – «Gut», sagte ich, «wenn einem beim Drehen schwindelig wird und wenn man sich beim Kreislaufen auch dreht, dann müsste einem auch beim Kreislaufen schwindelig werden.» Nun musste Klaus, so schnell er konnte, einen kleinen Kreis laufen, und richtig: nach der fünften Umrundung begann er bedenklich zu schwanken und nahm die am Schwindelgefühl gewonnene Überzeugung mit auf seinen Platz, dass man auch beim Ablaufen einer Kreislinie sich dreht.

Die *Orte*, welche man nacheinander auf dem Kreis beim Durchlaufen einnimmt, kann man als die *Punkte* auf der Kreislinie darstellen. Wie soll man



a *b*

Abb. 3a – b: Der Kreis und seine Richtungen (Tangenten).

die sich ändernden Richtungen andeuten? Dazu kann man die Kinder auffordern, in dem Bild der Kreisbewegung – also beim Kreis an der Tafel – die jeweiligen Blickrichtungen einzuzeichnen, welche man an den einzelnen Orten hat. Es entsteht etwa das folgende Bild (Abb. 3a):

Die Blickrichtung ist hier durch Strahlen in der Form von Halbtangenten angedeutet. Ist das geschehen, so kann man noch einmal nach der Blickrichtung fragen, wenn der Kreis in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Es entsteht dann das vollständige Bild des Kreises mit seinen Tangenten. (Dies ist weniger geometrisch als vielmehr naiv als Bild zu behandeln.) Gibt man einem Kind beim Abschreiten der Kreislinie einen längeren Stock unter den Arm, der jeweils in die Blickrichtung weist, dann lässt sich an ihm sehr schön das Drehen der Tangente beim Umlaufen des Kreises beobachten (Abb. 3b).

Nun können wir noch einmal die aus dem Kreis hervorgegangene Ellipse betrachten, wobei wir die Zeichnung durch die Tangenten ergänzen. Indem die freihändig eingezeichneten Tangenten untereinander etwa gleiche Winkel bilden, wird ihre Häufung an den stark gekrümmten Scheiteln anschaulich (Abb. 4). Ich deutete die stärkere Dynamik, die im Drehen liegt, auch mit Farben an. Bei der stärksten Krümmung zeichnete ich die Linie rot, dann mit abnehmender Krümmung orange, dann gelb und schließlich grün bei der schwächsten Krümmung.

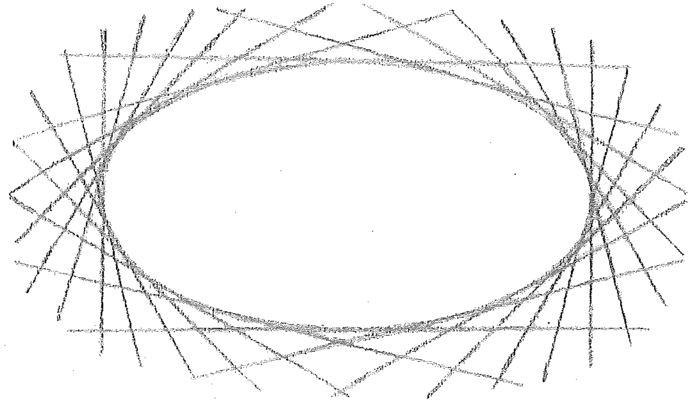


Abb. 4: Die Ellipse und ihre Richtungen (Tangenten).

Indem man auf die beiden Urformen der Bewegung achtet, das Drehen und das Fortschreiten, hellt sich das Erleben des Unterschiedes von Kreis und Ellipse für das Bewusstsein ein Stück weit auf.

Winkel- und Längenmessung

Winkel- und Längenmessung werden in der Regel an Waldorfschulen im Zusammenhang mit der Hausbauepoche und dem Sachrechnen schon im dritten Schuljahr behandelt. Der rechte Winkel ist zum Beispiel durch das Lot, das der Maurer verwendet, um eine Wand im *rechten* (= richtigen) Winkel mauern zu können, bekannt. Das Lot und die Waagerechte (Wasserwaage) bilden den rechten Winkel.

Die Behandlung von fortschreitender und drehender Bewegung gibt Anlass, in der Behandlung des Winkels einen Schritt weiterzugehen.[10] Zunächst können wir noch einmal ein Kind eine Kreislinie laufen lassen. Dabei stellen wir nun ein zweites Kind in die Mitte, welches das herumgehende Kind so mit seinem Blick begleitet, dass es sich mitdreht. Es dreht sich um einen *vollen Winkel*, wenn der Kreis einmal durchlaufen wird. Nun kann man darauf hinweisen, wie man sich auch dreht, wenn man die Sonne im Laufe eines Tages mit dem Blick verfolgt. Natürlich geht das sehr langsam, und man wird es kaum einen Tag lang tun. Mit dem Arm kann man aber die Tagesbewegung der Sonne mit größerer Geschwindigkeit zeigen, und man kann auch darauf aufmerksam machen, wie der Sonnenbogen sich unter dem Horizont in der Nacht fortsetzt.

Die Kinder werden die Sterne schon beobachtet haben, und ohne von der späteren Astronomieepoche schon zu viel vorwegzunehmen, kann man die Sternenbahnen in ihrem Verhältnis zu den Himmelsrichtungen Osten, Süden, Westen und Norden schildern. Manche Kinder werden bereits bemerkt haben, dass zu verschiedenen Jahreszeiten verschiedene Sterne am Nachthimmel sichtbar sind. Vielleicht kann man schon schildern, was eine genauere Beobachtung ergibt:

Blickt man nämlich jede Nacht zur gleichen Zeit in die gleiche Richtung – zum Beispiel genau nach Süden –, dann sieht man, dass die gleichen Sterne jeden Tag etwa um vier Minuten früher in dieser Richtung ankommen. Nach etwa 360 Tagen (genauer nach 365 ¼ Tagen), also nach einem Jahr, kommen die gleichen Sterne zur gleichen Zeit wieder in die Beobachtungsrichtung. So verschiebt sich Nacht für Nacht der Sternenhimmel ein wenig. Diese tägliche Verschiebung haben die Alten als Maß für das Drehen gewählt, und zwar haben sie, da sich mit 360 leichter rechnen lässt als mit 365 ¼, den $^1/_{360}$ Teil der vollen Drehung als Einheit für die Winkelmessung gewählt. Diese Einheit bezeichnet man als 1 Grad und schreibt 1°. Während also das Maß für die Länge (ein Meter, ein Yard oder was auch immer) vom Gehen auf der Erde genommen wurde, stammt das Maß für das Drehen vom Himmel. Es ist ein Himmelsmaß. – Die Breite des Daumens erscheint bei ausgestrecktem Arm etwa unter 1°.

Die Bewegung der Sonne am Himmel ist auch im Drehen der Zeiger auf dem Zifferblatt einer Uhr abgebildet. Nur dreht sich der kleine Zeiger in 24 Stunden *zweimal*, nicht einmal wie die Sonne. Das hängt damit zusammen, dass man früher bei der Zeitmessung die Tages- und die Nachtzeiten als *zwei* Kreisläufe ansah. Man teilte die Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang und von Sonnenuntergang bis Sonnenaufgang in jeweils zwölf Stunden. Dadurch wurden natürlich die Stunden im Sommer und im Winter unterschiedlich lang, und man findet heute noch in Museen alte Kirchturmuhren, bei denen morgens und abends an der «Unruhe» Gewichte verhängt wurden, damit sie tags und nachts verschieden schnell ging.

Die beiden Zeitenkreise kann man durch eine Lemniskate (8) darstellen, wobei der obere Bogen den Tag, der untere die Nacht darstellt. Im Laufe des Jahres nimmt die Lemniskate dann eine wechselnde Gestalt an.

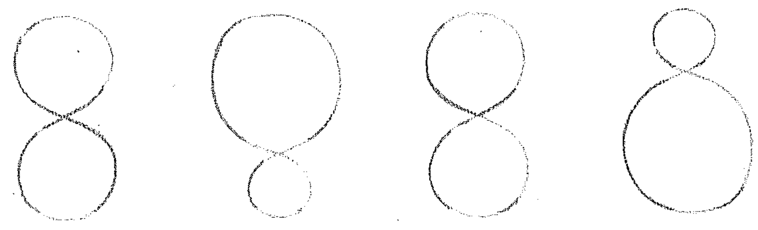


Abb. 5a – d: Der im Jahr wechselnde Tag- und Nachtkreis.

Es gab ein *rhythmisch atmendes Zeitmaß* im Jahreslauf. Gewöhnlich standen die Menschen mit Sonnenaufgang auf und arbeiteten bis Sonnenuntergang. Dann schliefen sie. Was im Sommer mehr gearbeitet wurde, glich sich im Winter wieder aus. Auf dem Zifferblatt der Uhr sind sozusagen die beiden Kreisläufe übereinander geklappt. Deswegen dreht sich der kleine Zeiger *zweimal* in 24 Stunden herum.

Früher zählte man vielerorts die Stunden auch anders als heute: Mit dem Sonnenaufgang begann die *erste* Stunde, dann folgte die *zweite* und so fort bis zur *zwölften*, die mit Sonnenuntergang endete. Dann begann die erste Nachtstunde. Die *neunte* Tagesstunde[11] ging also nach unserer heutigen Benennung von zwei bis drei Uhr am Nachmittag. Wegen der Schwierigkeit, die sich im Umgang mit den Ordensregeln ergab, machte dann die katholische Kirche das Zeitmaß starr, indem sie die Tag- und die Nachtstunden zusammenzählte und in 24 gleiche Teile unterteilte. So entstand unsere heutige Zeitmessung. Notwendig wurde dies, als in nördlichen Ländern, wo im Sommer die Nacht sehr kurz ist, die Ordensregeln, welche feste Gebete für die einzelnen Tag- und Nachtstunden verlangten, nicht mehr befolgt werden konnten.

Die Winkelmessung muss nun geübt werden, indem in möglichst vielfältiger Weise Winkel dargestellt werden.

Beispiele sind:

1. Drehe dich um 360°, um 180°, um 90°, um 45°.
2. Lass deine Arme einen Winkel von 90° (180°, 45°) bilden.[12]
3. Zeige die gleichen Winkel wie in Aufgabe 2 zwischen Ober- und Unterarm.

4. Zwei Kinder laufen unter bestimmten Winkeln vom gleichen Punkt aus in verschiedene Richtungen. Hier müssen sie vor allem auch auf die Bahn des jeweils anderen achten, um den richtigen Winkel einhalten zu können. Je kleiner der Winkel ist, desto langsamer entfernen sie sich voneinander.
5. Winkel in der Umgebung der Kinder werden auf ihre Größe geschätzt.
6. Welche Winkel sind in der folgenden Figur zu finden (Abb. 6)?

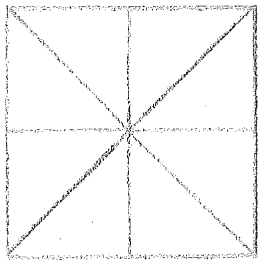


Abb. 6: Welche Winkel sind in dieser Figur zu finden?

Nun kann auch genauer benannt werden, was den Kindern aus dem Formenzeichnen der ersten Jahre gut vertraut ist: dass es *stumpfe* und *spitze* Winkel gibt und dass die Geometer einen Winkel, der kleiner als 90° ist, als *spitz* bezeichnen, einen Winkel, der zwischen 90° und 180° liegt, als *stumpf*. Der *rechte* Winkel besitzt 90°. Einen Winkel von 180° nennt man *gestreckt*, über 180° finden wir den *überstreckten* Winkel. 360° machen einen *vollen* Winkel (vgl. Abb. 7).

Naheliegend ist es, die Verbindung zur Bruchrechnung herzustellen: Die Einheit ist die volle Drehung. Man kann die Kinder nun eine Vierteldrehung, eine Dritteldrehung, eine halbe Drehung und andere Drehungen ausführen lassen und die zugehörigen Gradzahlen bestimmen. Ein Grad ist $^1/_{360}$ der vollen Drehung.

Auch an der *Uhr* lässt sich der Umgang mit Winkeln üben. Beispiele für solche Aufgaben sind: Um wie viel Grad dreht sich der große Zeiger in einer Minute, in zwei, drei, vier, fünf, sechs, zehn, zwölf, fünfzehn, zwanzig, dreißig, fünfundvierzig Minuten? Um wie viel Grad dreht sich in dieser Zeit der kleine Zeiger? (Es ist immer ein Zwölftel des großen Zeigers.)

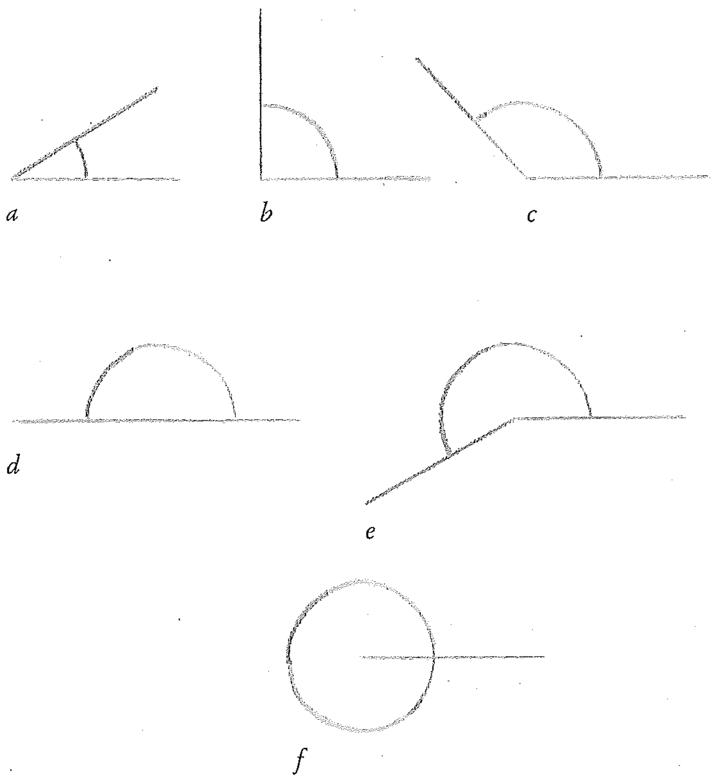


Abb. 7a–f: Die verschiedenen Winkelformen.

Die Verbindung des Bruchrechnens mit dem Drehen kann auch helfen, die häufig verwendete Darstellung der Brüche durch Kreissektoren (Tortenstücke) nicht zu einer einseitigen Fixierung für die Vorstellung von Brüchen zu machen. Umgekehrt ist es wichtig zu vermeiden, dass Winkel als Kreissegmente verstanden werden. Kreissegmente sind *Flächenstücke*; Winkel werden von *Richtungen* gebildet. Kreissegmente können auch bei gleichem Winkel unterschiedliche Größe haben. So bedeutet ein Zwölftel einer Torte je nach Tortengröße sehr unterschiedlich viel Kuchen. Winkel sind von solchen Flächen oder Raumgrößen ganz unabhängig.[13]

Sind die Winkel und das Winkelmaß anfänglich besprochen und durch Übungen gesichert, sollten noch die Winkel an zwei sich schneidenden Geraden behandelt werden. An ihnen bilden sich *vier* Winkel, wobei zwei Paare gleicher Winkel zu beobachten sind. Man bezeichnet sie als *Scheitelwinkel.* Winkel aus unterschiedlichen Paaren ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel (180°). Man bezeichnet sie als *Nebenwinkel.* Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der *Scheitel* aller vier Winkel. Die *Halbgeraden,*[14] die einen Winkel einschließen, heißen seine *Schenkel.*

Im Anschluss hieran kann auch die Frage nach den Winkeln zwischen parallelen Geraden gestellt werden. Zur Antwort kann man die Parallelen durch einen Grenzprozess entstehen lassen, bei dem der Scheitel ins Unendliche wandert (Abb. 8 a-c). Dabei nehmen die Schenkel immer mehr die gleiche Richtung an.

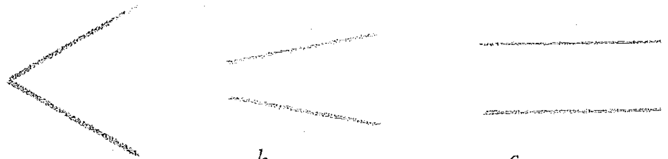


Abb. 8a – c: Welchen Winkel schließen parallele Geraden ein?

Man kann aber auch darauf hinweisen, dass parallele Geraden ja dieselbe Richtung besitzen. Blickt man also von einer der Geraden aus in deren Richtung und dann von der anderen, so findet keine Richtungsänderung, also keine Drehung, statt. Der Winkel zwischen parallelen Geraden ist also null.

Vergleichende Formbetrachtungen

Vom Kreis zum Dreieck

Ähnlich, wie wir den Übergang vom Kreis zur Ellipse vollzogen haben, können wir auch vom Kreis zum Dreieck übergehen. Dazu lassen wir zunächst wieder ein Kind einen Kreis laufen, den wir allmählich in ein dreischeiteliges Oval und schließlich in ein Dreieck überführen.

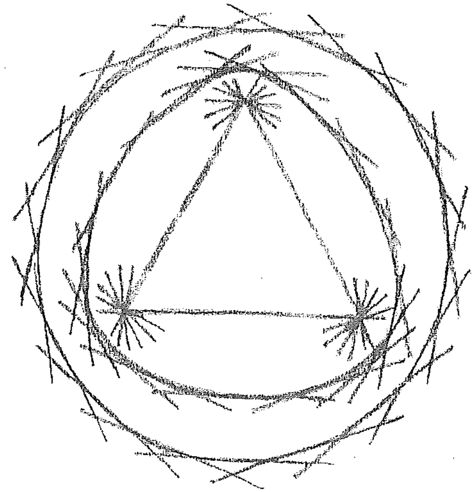


Abb. 9: Vom Kreis zum Dreieck.

Wieder können wir über die Rhythmisierung von Drehen und Fortschreiten sprechen. Beim Dreieck *zerfallen* die beiden Bewegungsarten: Auf den Seiten des Dreiecks *schreiten* wir nur *fort*; in den Ecken *drehen* wir uns nur. Dies lässt sich wieder sehr schön mit Farben darstellen.

Mit dem gleichseitigen Dreieck können eine Vielzahl elementarer Übungen zur Freihandgeometrie durchgeführt werden. Wir deuten mögliche Übungen an, die vom Lehrer jeweils auf der Tafel begonnen und von den Kindern selbständig fortgesetzt werden.

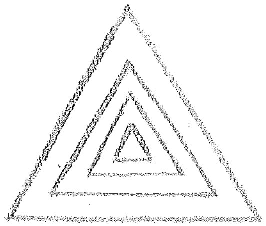


Abb. 10

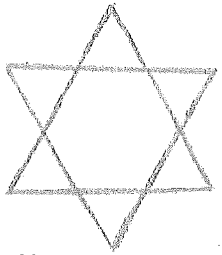


Abb. 11

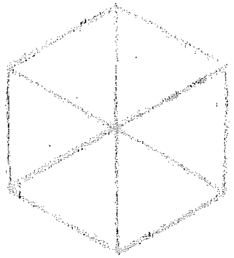


Abb. 12

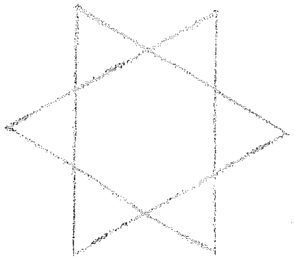


Abb. 13

Abb. 10 – 13: Übungen mit dem gleichseitigen Dreieck.

Übungen zum Dreieck

1. Wachsende und kleiner werdende Dreiecke (Abb. 10).
2. Zwei sich durchdringende Dreiecke als Sechsstern (Abb. 11).
3. Sechs gleichseitige Dreiecke um einen Punkt so anordnen, dass ein regelmäßiges Sechseck entsteht (Abb. 12).
4. Die Dreiecke des Sechsecks nach außen klappen lassen, so dass ein Sechsstern entsteht (Abb. 13).
5. Das (gleichseitige) Dreieck streckt sich (Abb. 14a), duckt sich (Abb. 14b) und schwingt auf und ab (Abb. 14c).
6. Das Dreieck wendet sich neugierig zur Seite (Abb. 15a) und schwingt zu beiden Seiten (Abb. 15b).
7. Ein Dreieck mit einem rechten Winkel wandert mit der Spitze über einer Seite hin und her und behält dabei immer seinen rechten Winkel (Abb. 16).

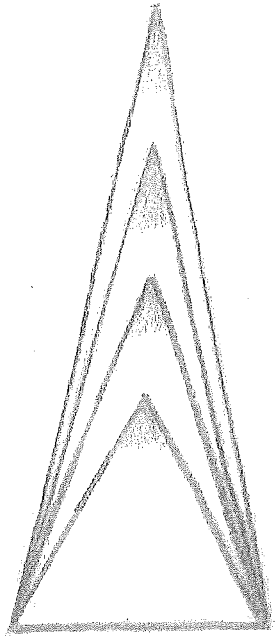


Abb. 14a

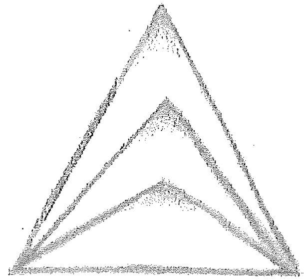


Abb. 14b

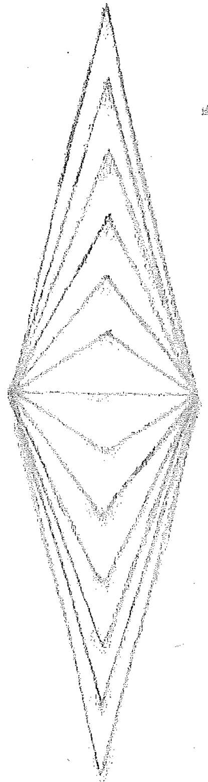


Abb. 14c

Abb. 14a-c: Übungen mit dem gleichseitigen Dreieck.

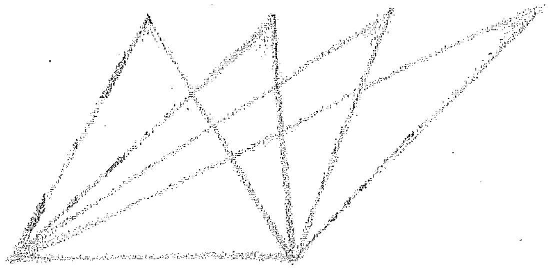


Abb. 15a

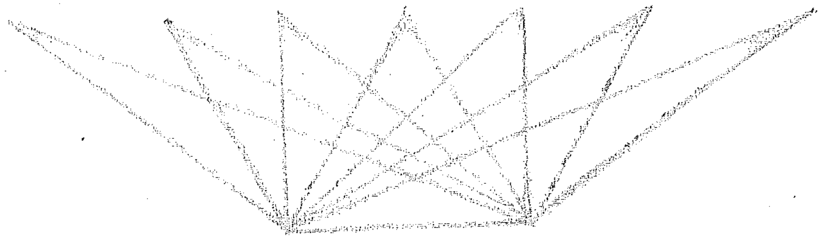


Abb. 15b

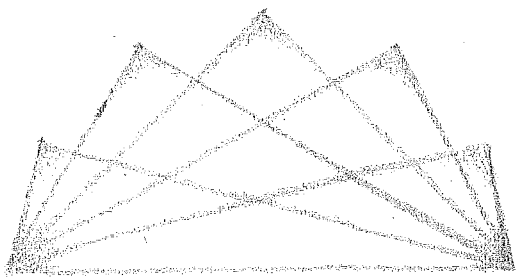


Abb. 16

Abb. 15 und 16: Übungen mit dem gleichseitigen Dreieck.

Viereckslehre

Wie das gleichseitige Dreieck kann auch das Quadrat aus dem Kreis durch allmähliche Umwandlung des Bewegungsverlaufes gewonnen werden, und so wie das Dreieck anfänglich verwandelt wurde, können wir auch die Verwandlungen des Vierecks studieren. Wieder kann man besprechen, wie man auf den Seiten *fortschreitet*, in den Ecken sich *dreht* und so die Winkel beschreibt (Abb. 17).

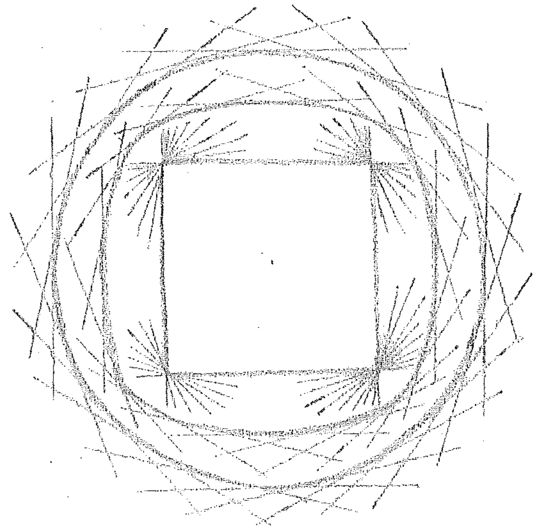


Abb. 17: Vom Kreis zum Quadrat.

Um für die Vierecksformen beschreibende Begriffe zu haben, gehen wir von der Symmetrie des Quadrates aus. Damit kann eine Ordnung der wichtigsten Vierecksformen beschreibend gewonnen werden.

Das Quadrat besitzt vier Symmetrieachsen: Zwei gehen durch gegenüberliegende Ecken; sie werden als *Diagonalen* bezeichnet. Zwei weitere Symmetrieachsen gehen durch gegenüberliegende Seitenmitten. Wir nennen sie *Mittellinien*.

Alle vier Innenwinkel sind gleich und ebenso alle vier Seiten. Die Mittellinien sind gleich lang und halbieren sich gegenseitig. Dasselbe gilt für die Diagonalen. Beide Paare bilden unter sich jeweils Winkel von 90°.

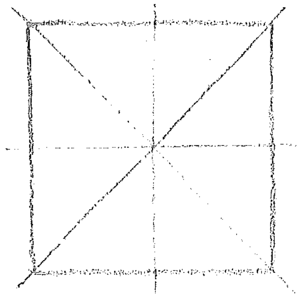


Abb. 18: Das Quadrat und seine Symmetrieachsen.

Man kann nun die Veränderungen des Vierecks, die sich vor allem durch die Symmetrien beschreiben lassen, mehr fachlich oder – was sich in vergleichenden Untersuchungen sehr bewährt hat – mehr phantasievoll im Zusammenhang behandeln. Zum Beispiel habe ich etwa das Folgende den Kindern erzählt und mit den entsprechenden Zeichnungen begleitet:

Der Stammvater des Viereckgeschlechtes, das Quadrat, hatte zwei recht unterschiedliche Kinder. Das eine war sehr gewissenhaft, dabei aber vierschrötig und ein wenig unbeweglich. Das war das *Rechteck*. Es wollte möglichst allen Leuten es immer recht machen. Deshalb wagte es kaum, von sich aus etwas zu tun. Am liebsten wartete es, bis man ihm sagte, was es tun sollte. Dabei blieb es aber lange einfach rechteckig.

Ganz anders war sein Geschwister. Es wollte beweglich und elegant wirken, aber da es der Viereckfamilie entstammte, blieb ihm doch etwas Eckiges und Raues in seinem Wesen. Es wurde die *Raute* genannt. Immer nur rechte Winkel zu zeigen – das schien ihm starr und einfältig. Deshalb ließ es

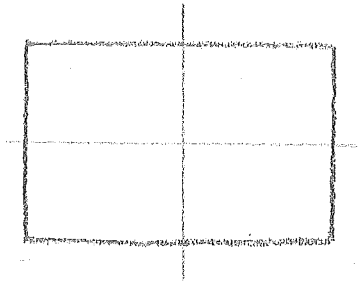


Abb. 19: Das Rechteck.

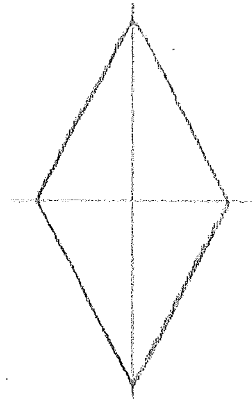


Abb. 20: Die Raute.

seine Winkel mal spitz, mal stumpf werden. Um der schönen regelmäßigen Gestalt willen aber ließ es seine Seiten immer gleich lang sein.

Die beiden Geschwister taten zwar viel miteinander, aber – wie Geschwister sind – sie neckten sich auch untereinander. Vor allem, wenn sie am anderen Mängel bemerkten, scheuten sie sich nicht, dies auch gleich auszusprechen. Als eines Tages das Rechteck tat, als wäre es der Vater, das Quadrat, lachte die Raute es aus und sagte: «Du willst wie der Vater sein? Der Vater hat aber *vier* Symmetrieachsen, du nur *zwei*. Deine Diagonalen sind keine Symmetrieachsen mehr.» Wer Geschwister kennt, weiß, dass sie sich selten etwas nachzugeben haben. So auch hier. Nach dieser Schmähung besah das Rechteck die Raute etwas genauer und sagte: «Du bist ja auch nicht besser, denn du hast *nur* noch die *Diagonalen* als Symmetrieachsen.» Da fanden die beiden, dass sie einander ganz gut ergänzten und zusammen gerade die Eigenschaften des Vater hatten.

Eines Tages kam ein Vetter zu Besuch: das *Parallelogramm*. Zwar war wegen der vier Seiten und der vier Ecken die Verwandtschaft nicht zu verkennen, aber von Symmetrieachsen war nichts zu finden; höchstens an seinem Mittelpunkt konnte man es spiegeln oder es um diesen Punkt einmal um 180° herumdrehen. Seine übrigen Eigenschaften schienen den beiden Geschwistern auch nicht sonderlich wünschenswert. Sah es andere, versuchte es gleich, Kontakt zu knüpfen und – was besonders unangenehm war – sich ihnen nach Möglichkeit anzupassen, ihnen sozusagen nach dem Mund zu reden. Auch den beiden Geschwistern schien es sich gleichzeitig anpassen zu wollen: Wie das Rechteck hatte es parallele und gleich lange

Gegenseiten (davon rührte sein Name her); wie bei der Raute waren seine gegenüberliegenden Winkel gleich. So weit war ihm die Anpassung recht gut gelungen, aber im Inneren schien es den beiden bei ihrem Vetter recht verkehrt zuzugehen: Weder die Diagonalen noch die Mittellinien bildeten schöne rechte Winkel, noch waren irgendwie gleiche Winkel zwischen ihnen zu finden. Das Einzige, was man zugestehen konnte, war, dass die Diagonalen und die Mittellinien sich gegenseitig halbierten und durch denselben Punkt gingen. So hatte das Parallelogramm wenigstens einen richtigen Mittelpunkt.

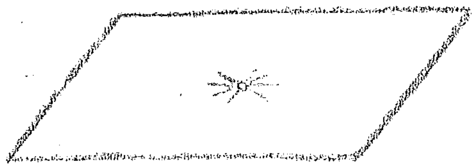


Abb. 21: Das Parallelogramm.

Von zwei sehr merkwürdigen Verwandten zeigte übrigens das Parallelogramm Bilder: Es waren Zwillinge, die durch Zerschneiden eines Parallelogramms in zwei Vierecke entstanden waren. Sie hatten noch ein Paar (gegenüberliegender) paralleler Seiten, aber gar keine Symmetrie. Man nannte sie (allgemeine) *Trapeze*. Unsere – etwas stolzen – Vierecke wollten sie aber wegen der fehlenden Symmetrie noch nicht in ihr *Haus der Vierecke* aufnehmen. Erst im Alter waren sie weniger stolz – aber davon wird noch zu erzählen sein.

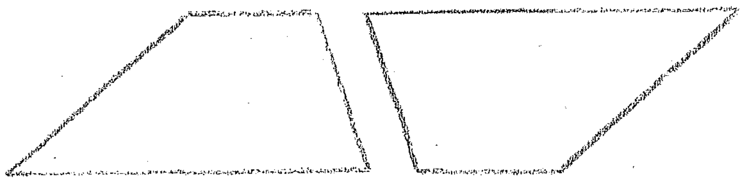
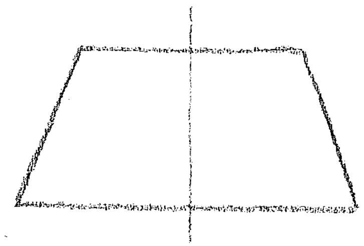


Abb. 22: Allgemeine Trapeze.

Das Leben führte die beiden Geschwister auseinander. Das Rechteck verbrachte viel Zeit am Schreibtisch und ging dadurch unten etwas auseinander. Es wurde zwar zum *gleichschenkligen Trapez* befördert, aber für sein Aussehen bedeutete dies keine Verbesserung. – Die Raute wurde leider etwas aufschneiderisch. Sie versuchte – auch dort, wo es ganz unangemessen war – sich über andere zu erheben und wurde so, was man

überheblich nennt. Ihr neuer Name – *Deltoid* oder *Rhomboid* – klang zwar sehr vornehm, manche sagten dazu aber auch ganz einfach *Drache*.



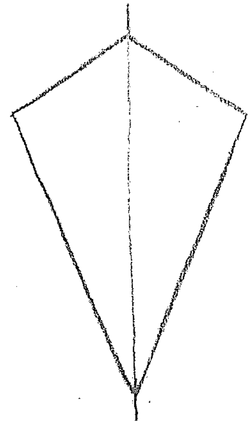


Abb. 23: Das gleichschenklige Trapez. *Abb. 24: Deltoid, Rhomboid oder Drache.*

Nach vielen Jahren trafen sich die beiden Geschwister bei einem Familientreffen wieder. So sehr sie sich verbunden fühlten, blieben die Veränderungen des anderen ihren scharfen geschwisterlichen Augen nicht verborgen. «Was ist denn mit dir geschehen?», sagte das Deltoid zum gleichschenkligen Trapez. «Du hast ja nur noch eine einzige Symmetrieachse.» Das gleichschenklige Trapez beruhigte das Deltoid: «Du bist auch nicht schöner geworden.» Denn die Familie maß ihre Schönheit in ihren Symmetrien. So waren sie wieder von ihrem gleichen Wert überzeugt.

Über das Alter ist nur noch wenig zu erzählen. Als sie sich in späten Jahren einmal trafen, sahen sie sich nur noch still an und wussten, dass äußerlich das allgemeine Viereck weder in der einfachen noch in der überschlagenen Form eine Symmetrie besitzt.

Man kann dann den Kindern als Vorblick auf spätere Schuljahre noch das Folgende sagen:

Auf ein Geheimnis möchte ich euch aber noch aufmerksam machen, das wir in der sechsten Klasse genauer besprechen werden. Im Verborgenen sind nämlich auch die allgemeinen Vierecke Quadrate geblieben. Das könnt ihr vielleicht ein wenig verstehen, wenn ich euch zwei Straßen zeichne, die sich in einer weiten, flachen Ebene rechtwinklig schneiden. In der *Perspektive*, die wir in der sechsten Klasse behandeln werden, er-

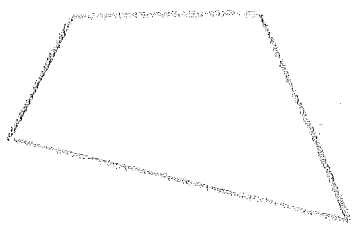


Abb. 25: Das allgemeine Viereck.

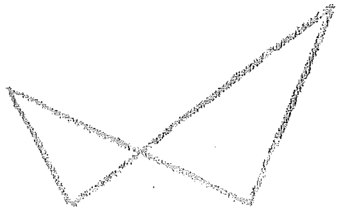


Abb. 26: Das allgemeine überschlagene Viereck.

scheint ein Quadrat – das Feld der Straßenkreuzung – als ein allgemeines Viereck, und umgekehrt kann man auch das allgemeine Viereck als ein perspektivisches Quadrat verstehen. Ihr seht, die Eigenschaften des Stammvaters sind in einer gewissen Weise immer erhalten geblieben, nur verborgener. Wenn ihr in der Oberstufe seid, dann werdet ihr über die allgemeinen Vierecke noch die schönsten Dinge lernen, und vielleicht findet ihr das perspektivische Quadrat dann sogar schöner und interessanter als das gewöhnliche Quadrat. Seht ihr, so ist es auch manchmal im Menschenleben. Die jungen Menschen sind zum Anschauen am schönsten. Wer alt geworden ist und viel gearbeitet hat, der kann nach außen nicht mehr so schön aussehen wie ein junger Mensch, aber in seinem Inneren, in seiner Seele leben vielleicht eine große Schönheit und ein großer Reichtum durch das Viele, was das Leben ihn gelehrt hat.

Solche Geschichten sind ihrem Inhalt nach vielleicht nicht sehr bedeutsam. Man könnte viele verschiedene Darstellungen wählen, durch welche für die Kinder ein seelischer Bezug zu den verschiedenen Vierecksformen entsteht. Worum es geht, ist, nicht bloß Definitionen zu vermitteln, sondern einen Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Formen so herzustellen, dass in ihren Formen etwas Charakteristisches empfunden werden kann und zugleich ein Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Formen aufleuchtet.

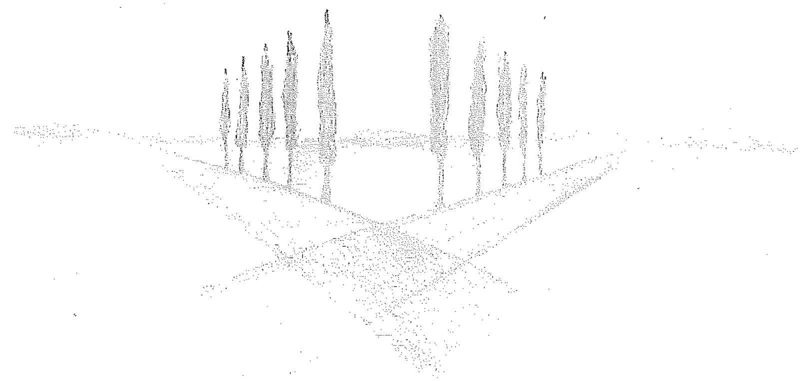


Abb. 27: Jedes allgemeine Viereck ist ein perspektivisch gesehenes Quadrat.

Abschließend kann man die *Familie der Vierecke* und ihre Beziehungen zusammenfassend darstellen. Das Schema wird auch das *Haus der Vierecke* genannt (siehe S. 34).

Hinzuweisen ist noch darauf, dass diese Familie noch andere Verwandte besitzt – wie die Sehnen- und Tangentenvierecke –, die aber einem anderen Familienzweig angehören. In der siebten oder achten Klasse werden sie auch bekannt gemacht.

Die wichtigsten Eigenschaften der Vierecke

Nach dem raschen ersten Durchgang durch die Familie der Vierecke können die einzelnen Formen ausführlicher besprochen und durch ihre Eigenschaften charakterisiert werden. Der Lehrer muss entscheiden, wie weit er hier gehen will. Einen Überblick über eine Reihe benennbarer Eigenschaften gibt die nachfolgende Tabelle (S. 35). Der Kürze halber werden mit den Namen jeweils solche Vierecke bezeichnet, die nicht zugleich eine höhere Symmetrie aufweisen. So ist zwar das Quadrat auch zugleich ein Rechteck. Hier soll aber unter einem Rechteck ein solches verstanden werden, das nicht zugleich ein Quadrat ist; und Entsprechendes gilt in den anderen Fällen.

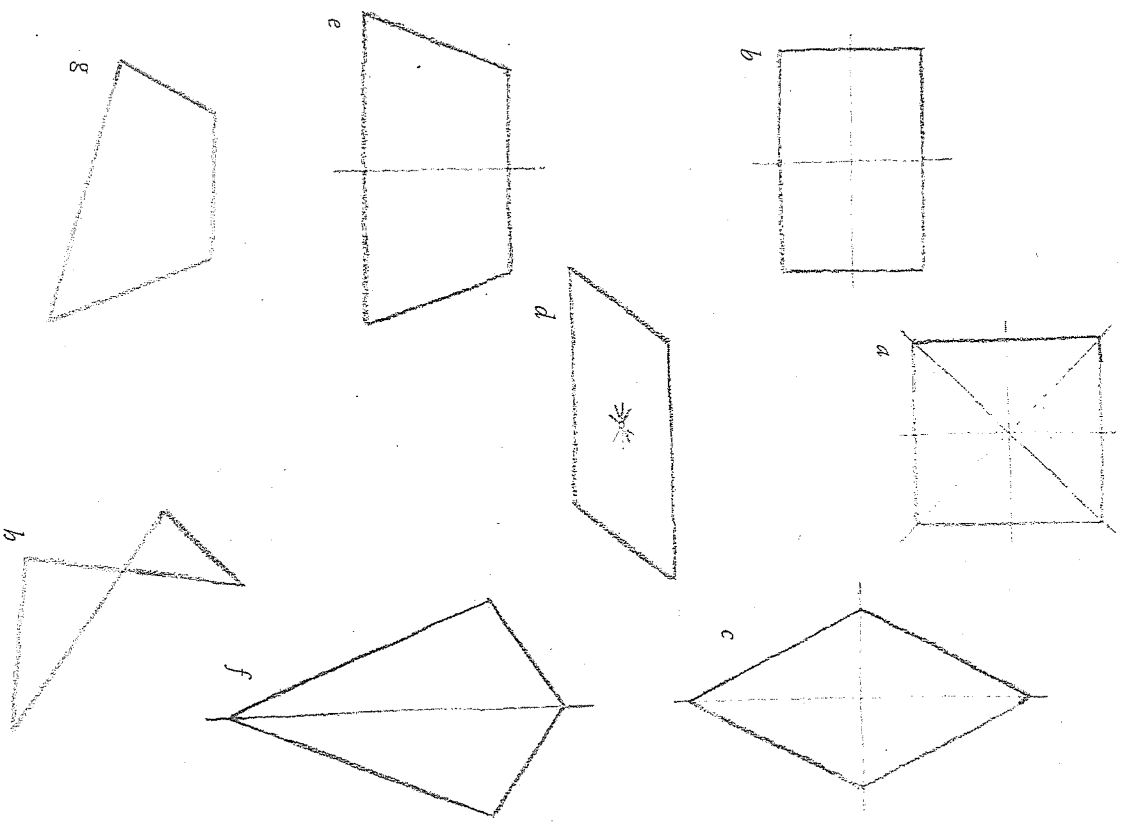


Abb. 28a – h: Das Haus der Vierecke.

Tabelle: Die wichtigsten Eigenschaften der Vierecke.

Name	Symmetrieachsen	Drehsymmetrie	Winkel zwischen den Diagonalen	Winkel zwischen den Mittellinien	Teilverhältnis der Diagonalen	Teilverhältnis der Mittellinien	Innenwinkel	Seiten	Inkreis	Umkreis
Quadrat	4	90°	90°	90°	wechselseitiges Halbieren	wechselseitiges Halbieren	4 gleiche Innenwinkel je 90°	4 gleiche Seiten	ja	ja
Rechteck	2	180°	beliebig	90°	Halbieren	wechselseitiges Halbieren	90°	2 Paare gegenüberliegender gleicher Seiten	nein	ja
Raute	2	180°	90°	beliebig	Halbieren	wechselseitiges Halbieren	2 Paare gegenüberliegender gleicher Winkel	4 gleiche Seiten	ja	nein
Parallelogramm	0	180°	beliebig	beliebig	Halbieren	wechselseitiges Halbieren	Gegenüberliegende Winkel sind gleich	2 Paare gegenüberliegender gleicher Seiten	nein	nein
gleichschenkliges Trapez	1	–	beliebig	90°	Sie teilen sich gegenseitig im gleichen, aber beliebigen Verhältnis	wechselseitiges Halbieren	2 Paare benachbarter gleicher Winkel	1 Paar gegenüberliegender gleicher Seiten	nein	ja
Deltoid	1	–	90°	beliebig	Eine Diagonale wird halbiert, die andere beliebig geteilt	Teilung im gleichen beliebigen Verhältnis	1 Paar gleicher gegenüberliegender Winkel	2 Paare benachbarter gleicher Seiten	ja	nein
allgemeines Viereck	0	–	beliebig	beliebig	beliebig	beliebig	beliebig	beliebig	nein	nein

Begleitend zu den Besprechungen der verschiedenen Vierecksformen sollten Freihandübungen durchgeführt werden, für welche im Folgenden einige Anregungen gegeben werden. Sie sind so gedacht, dass eine spezielle Form, wenn sie besprochen wird, jeweils auch in einer Übung behandelt wird.

Aufgaben zu den Vierecken

1. Konzentrische Quadrate (Abb. 29).
2. Wachsende Quadrate mit einer festen Ecke (Abb. 30).
3. Ineinander geschachtelte Quadrate (Abb. 31).
4. Rechtecke in einem Kreis (Abb. 32).
5. Vom horizontalen Durchmesser[15] zum vertikalen Durchmesser. Rauten mit gleichen Symmetrieachsen und fester Seitenlänge. Von einer horizontalen zu einer vertikalen Strecke (Abb. 33).
6. Sterne aus Rauten mit gemeinsamer Spitze (Abb. 34a – b).
7. Parallelogramme mit gleicher Höhe und gleicher Basis. Welche anderen Vierecksformen kann man in der Abbildung finden (Abb. 35)?
8. Stern aus Parallelogrammen (Abb. 36).
9. Gleichschenklige Trapeze in einem gleichschenkligen Dreieck. Das Trapez in das Dreieck sich verwandeln lassen (Abb. 37).
10. Gleichschenklige Trapeze über eine Kreissehne[16] (Abb. 38).
11. Deltoidstern (Abb. 39).
12. Welche gleich geformten Bruchteile kann man von den verschiedenen Vierecksformen leicht herstellen? Suche möglichst viele Beispiele.

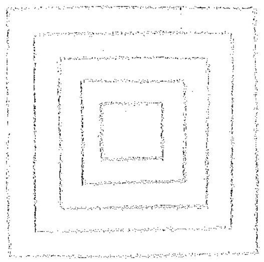


Abb. 29

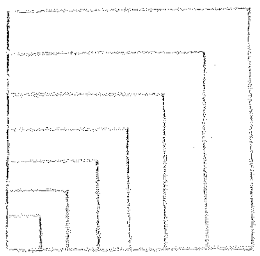


Abb. 30

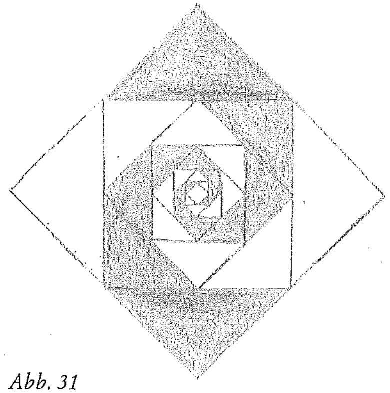


Abb. 31

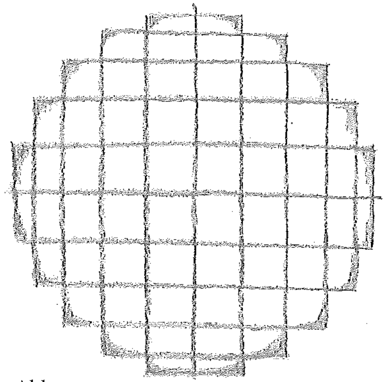


Abb. 32

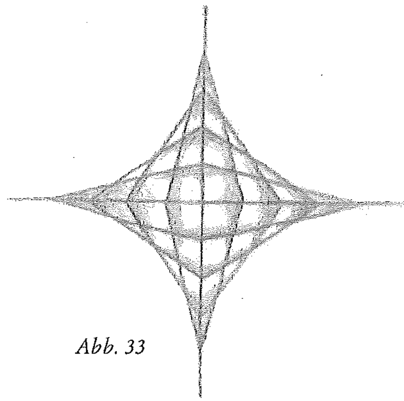


Abb. 33

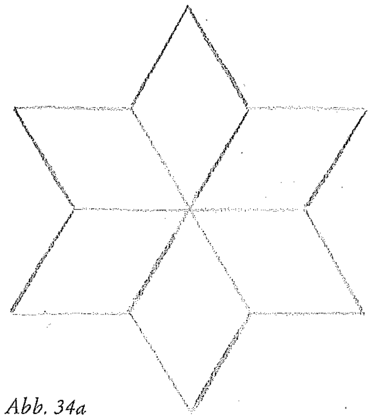


Abb. 34a

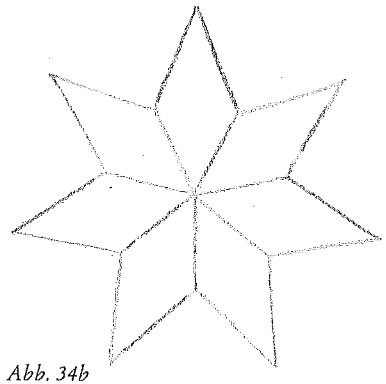


Abb. 34b

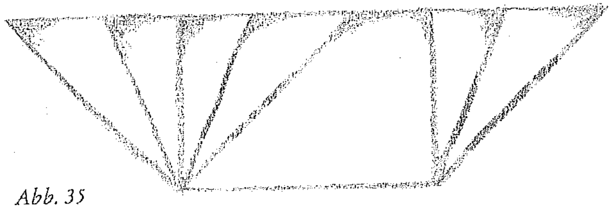


Abb. 35

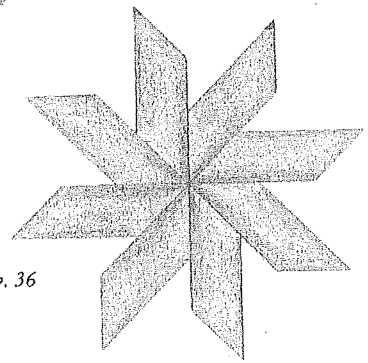


Abb. 36

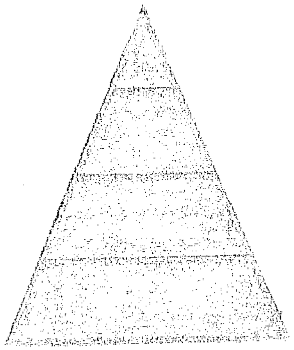


Abb. 37

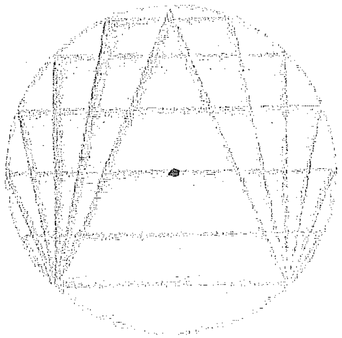


Abb. 38

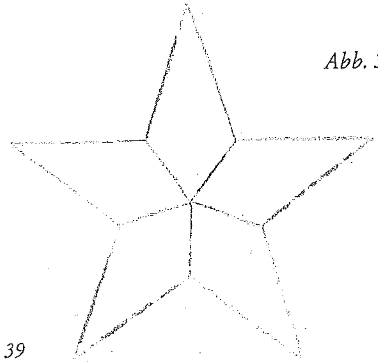


Abb. 39

Licht- und Schattenräume um eine Kugel

Nach dem Entwicklungseinschnitt, den das Kind im zehnten Lebensjahr überschreitet,[17] wird es reif, mit Raumvorstellungen innerlich bewusster umzugehen, als es vorher möglich war. Auch wenn die Darstellung räumlicher Verhältnisse durch perspektivische Zeichnungen erst in der sechsten Klasse einsetzt und die konstruktive Darstellende Geometrie Stoff der neunten und höherer Klassen ist, ist es ratsam, von der dritten bzw. vierten Klasse an auch immer wieder Raumformen zu besprechen.[18]

Als ein besonders schönes Beispiel kann der Schatten einer Kugel betrachtet werden. In einem Klassenraum mit Morgensonne kann man sich zum Beispiel eine Styroporkugel, wie man sie in Bastelgeschäften kaufen kann, für einen geeigneten sonnigen Tag bereithalten. Es empfiehlt sich, in die Kugel eine Stecknadel mit Glaskopf, an dem ein längerer Faden befestigt ist, zu stecken und einen größeren weißen Karton zurechtzulegen. Scheint dann die Sonne und erlaubt der übrige Unterricht eine Unterbrechung, dann schiebt man eine Betrachtung über den Kugelschatten ein.

Man hält die Kugel an dem Faden in das Sonnenlicht und bespricht zunächst mit den Kindern die Licht- und Schattenverhältnisse auf der Kugel: wie die Kugel an der Stelle, welche der Sonne zugewandt ist, am hellsten ist, dann allmählich dunkler wird und auf der sonnenabgewandten Seite schattig ist. So «antwortet» die Kugel mit ihrem Glanz auf der sonnenzugewandten Seite auf das Leuchten der Sonne.

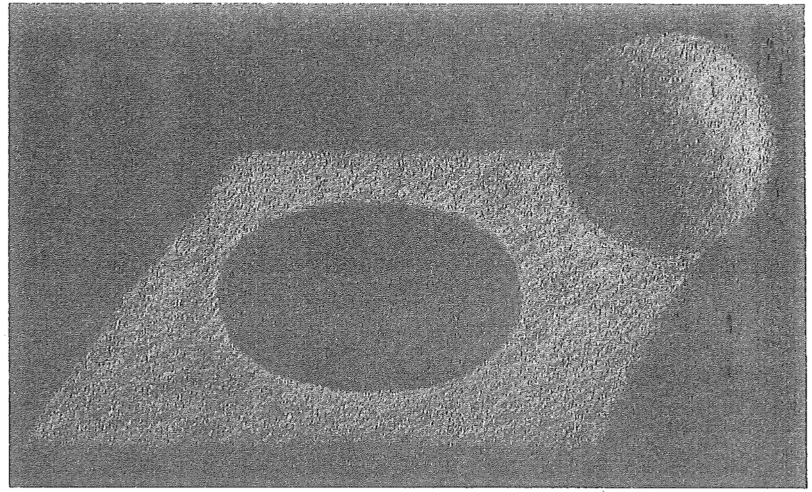
Ist die Kugel genügend betrachtet und besprochen worden, hält man den zurechtgelegten weißen Karton senkrecht zum Sonnenlicht hinter die Kugel. Wie die Kugel von allen Seiten betrachtet im Umriss kreisrund ist, so ist auch der Schatten kreisförmig. Dreht man den Karton ein wenig von der Lichtrichtung ab, so beginnt der Schatten, sich in die Länge zu ziehen. Er wird ellipsenförmig. Nun kann man verschiedene Lagen des Kartons durchspielen. Biegt man ihn zylindrisch, dann nimmt der Schatten noch eine Vielzahl anderer ovaler oder tropfenähnlicher Formen an. Er verliert die elliptische Form. In der Besprechung bleibt man aber zunächst bei der Kreis- und der Ellipsenform des Schattens. Wie kann eine Kugel, die doch von allen Seiten rund ist, einen elliptischen Schatten werfen?[19]

Zunächst kann man zum Bewusstsein bringen, dass man ja eigentlich das Licht *nicht* sehen kann. Erst wo wir einen Körper in das Licht halten, sehen wir an ihm die *Helligkeit*, die es bewirkt. Aber auch den Schattenraum hinter der Kugel sehen wir nicht. Erst wo sich der Karton befindet, erscheinen Helligkeit und Dunkelheit.

Wir können nun über den *Lichtraum* und den *Schattenraum* sprechen. Die Sonne schafft den Lichtraum, die Kugel den Schattenraum. Welche Gestalt der Schattenraum hat, können wir feststellen, indem wir die Pappe hinter der Kugel hin und her bewegen. Der Schattenraum ist zwar unsichtbar, aber er kann in näherer und größerer Entfernung von der Kugel durch den Karton sichtbar gemacht werden. Auch wenn er selber nicht wahrnehmbar ist, kann man seine Gestalt beschreiben: Er ist zylindrisch wie eine kreisrunde Stange oder auch wie eine gerade Wurst. Der Schatten entsteht, wo der Karton diesen Schattenraum *schneidet*. Schneidet man ihn senkrecht zu seiner eigenen Ausrichtung, so entsteht wie bei einer gerade angeschnittenen Wurst eine Kreisfläche. Schneidet man schräg, so entstehen Ellipsenformen.

Schatten entsteht also, wo Licht- und Schattenräume von stofflichen Oberflächen geschnitten werden. Die Schattenform hängt im einfachsten Fall von Form und Lage des Schattenkörpers ab, dann aber auch wesentlich von Lage und Form der Fläche, auf der wir den Schatten zur Erscheinung bringen. Tatsächlich spielen auch die Form des leuchtenden Körpers und manches andere eine Rolle, doch kann das getrost für eine spätere Behandlung aufgehoben werden.

Diese oder ähnliche Betrachtungen ganz elementar mit den Kindern durchzuführen regt die räumliche Vorstellungsbildung außerordentlich an. Wichtig ist, dass nicht von abstrakten Modellen wie Lichtstrahlen oder Ähnlichem gesprochen wird, sondern dass mit *gestalteten Rauminhalten*, deren *Grenzflächen* und *Schnitten* umgegangen wird. Bei einem Tafelbild sollten deshalb auch nicht Linien, sondern Flächen mit breiter Kreide eingefärbt werden.[20]



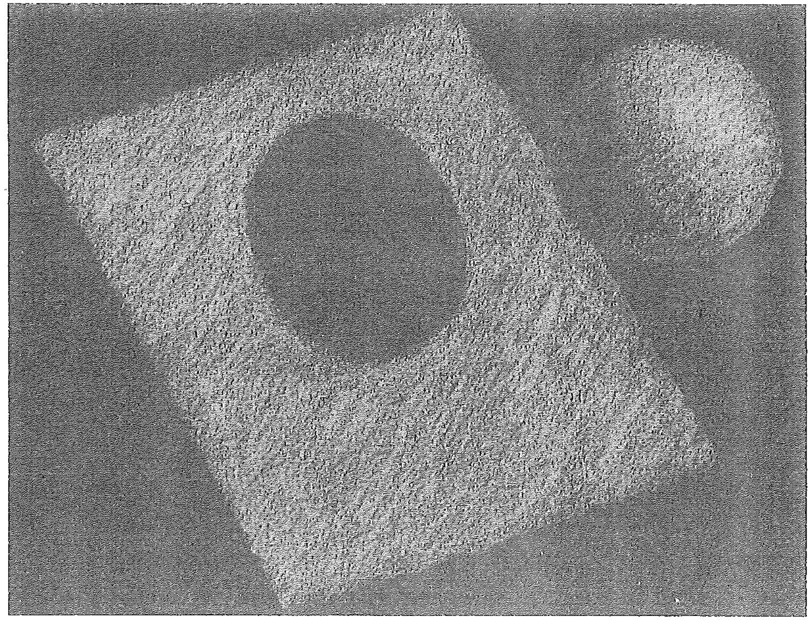


Abb. 40 und 41: Der Kugelschatten auf unterschiedlichen Flächen.

Die fünfte Klasse

Ähnlich wie in der vierten Klasse ist die Geometrie der fünften Klasse, sofern sie noch Freihandgeometrie ist, als Teil des Formenzeichnens zu betrachten. Der hier vorgeschlagene konstruktive Teil gehört aber schon in engerem Sinne dem Mathematikunterricht an.

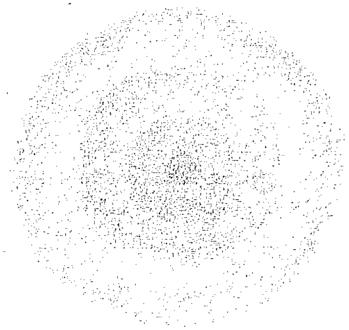
Die weiter unten folgenden geometrischen Ausführungen zur Symmetrie sind – wenigstens zum Teil – als begleitende Besprechungen zu den Freihandübungen zu verstehen. Der Arbeitsteil des Hauptunterrichts kann mit den Betrachtungen zum Kreis und zur Symmetrie eingeleitet werden. Dann können täglich die Freihandübungen einsetzen, zu denen im Anschluss einige Anregungen gegeben werden. Zunächst soll aber der Kreis noch einmal unter einem neuen Aspekt gezeichnet und besprochen werden.

Der Kreis

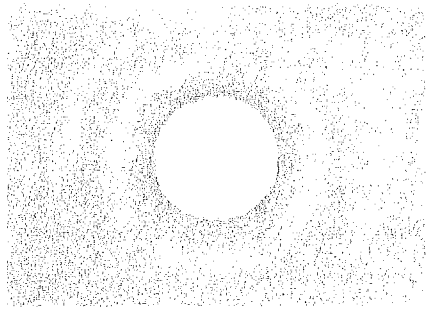
Der Kreis als Brandungslinie

Wie in der vierten Klasse kann man wieder von der Kreisform ausgehen. Diesmal soll sie aber durch einen *Prozess* entstehen. Wir denken uns eine *Quelle*, aus der wir – zum Beispiel mit gelber Farbe – eine kleine Kreisfläche hervorgehen lassen. In einer zweiten Zeichnung lassen wir – zum Beispiel mit blauer Farbe – vom Umkreis her ebenfalls eine Kreisform so entstehen, dass sie umhüllt wird. Die Kinder sollen nun abwechselnd mit Gelb und Blau an beiden Zeichnungen so schraffieren, dass die gelbe

Fläche, immer eine Kreisform *erfüllend,* nach außen wächst, während die blaue Fläche, von außen *umhüllend,* sich zur Mitte hin verengt. Sie umschließt eine Kreisform.



Kreisfläche sich weitend
Kreis-Inneres
Erfüllend die Form



Kreisfläche umschließend
Kreis-Äußeres
Umhüllend die Form

Abb. 42 und 43: Kreis-Inneres und Kreis-Äußeres.

In einer dritten Zeichnung lassen wir nun beide Prozesse gleichzeitig ablaufen: Mit Gelb lassen die Kinder eine wachsende Kreis*fläche* entstehen, mit Blau vom Umkreis her eine Kreis*hülle.* Wo die beiden Strömungen sich begegnen, entsteht die *Kreislinie*.

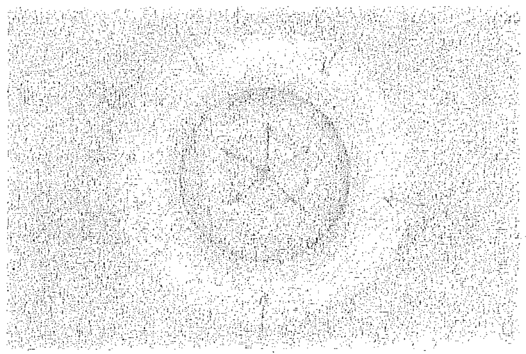


Abb. 44: Kreis-Inneres und Kreis-Äußeres treffen in der Kreislinie zusammen.

Man kann dabei etwa an Wasserströmungen denken, die gegeneinander laufen, wie es bei Sturm vor der Küste geschieht. Die *Brandungslinie* entsteht aus dem Zusammenprall des auflaufenden und des ablaufenden Wassers. So wird hier die Kreisform mit dynamischen Vorstellungen durchdrungen. Sie entsteht als Ergebnis *dynamischer Vorgänge,* als Brandungslinie der beiden *Strömungen.* Sie hat nicht in gleicher Weise ein Sein wie die Flächen. Ihr Sein ist in einem *Prozess* konstituiert.

Auch an den beiden einfarbigen Zeichnungen können zwei Bewegungen besprochen werden. Das Gelb kann sich weiten und zusammenziehen, verströmen und konzentrieren. Die Bewegungsgesten sind *Dehnen* und *Verdichten.* Die blaue Hülle kann enger umschließen und sich weiten. Die Bewegungsgesten sind *Umschließen* und *Weiten.*[21]

Gerade und Punkt als Grenzvorstellungen eines Kreises

In der vierten Klasse hatten wir verschiedene Formen (Ellipse, Dreieck, Quadrat) aus dem Kreis entstehen lassen. Dabei hatten wir auf zwei Bewegungsarten (Fortschreiten = Ortsänderung und Drehen = Richtungsänderung) hingewiesen. Die Kreislinie war dabei schon als Punkt- und als Strahlenmenge aufgetreten.[22]

Daran können wir in der fünften Klasse wieder anknüpfen. Wir machen darauf aufmerksam, dass der Kreis viele *Orte* (= Punkte) besitzt, die man durchlaufen kann, und ebenso viele *Richtungen,* welche durch die Geraden angedeutet werden, die den Kreis als *Tangenten* umhüllen (Abb. 45). Indem wir wieder ein Kind die Kreisform vor der Klasse laufen lassen und die vollzogene Bewegung an der Tafel darstellen, schließen wir an die Inhalte der vierten Klasse an. Ist dies geschehen, lassen wir nun den Kreis, den das Kind läuft, immer kleiner und kleiner werden, bis er zu einem Punkt geschrumpft ist. Dann bleibt als Bewegung nur noch das Drehen in diesem Punkt übrig. Es ist ein *Strahlenbüschel* entstanden. Dieses besteht aus einem Punkt und allen durch ihn gehenden Geraden. Die Geraden können sich in dem Punkt in zweierlei Sinn *drehen:* im Uhrzeigersinn und im entgegengesetzten Sinn (Abb. 46).

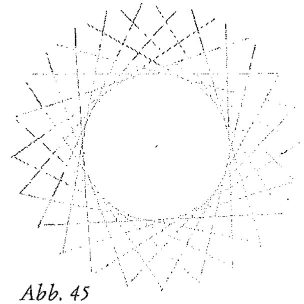


Abb. 45

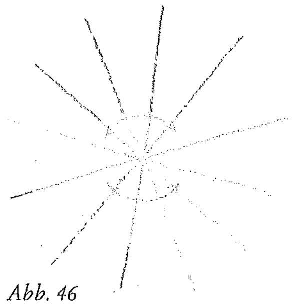


Abb. 46

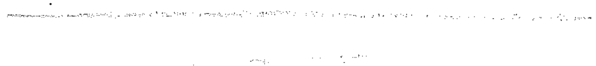


Abb. 47

Abb. 45 bis 47: Der Kreis mit seinen Tangenten kann zum Strahlenbüschel und zur Punktreihe entarten.

Nun lassen wir den Kreis wieder wachsen. Das Strahlenbüschel *plustert sich* sozusagen *auf.* Wird der Kreis größer und größer, so tritt beim Durchlaufen das Fortschreiten immer mehr in den Vordergrund, und das Drehen tritt zurück. Schließlich wird der Kreis so groß, dass er nicht mehr in der Klasse gelaufen und auch nicht auf der Tafel gezeichnet werden kann. In der Vorstellung entwickeln wir das Vergrößern des Kreises mit den Kindern aber weiter und rufen als *Grenzvorstellung* die Vergrößerung des Kreises bis ins Unendliche hervor. Von den beiden Bewegungen bleibt jetzt nur das Fortschreiten auf der einzig verbliebenen Geraden übrig (Abb. 47). Eine Gerade mit ihren Punkten wird eine *Punktreihe* genannt.[23] Soweit es möglich ist, bespricht man mit den Kindern die beiden Grenzformen des Kreises – das Strahlenbüschel und die Punktreihe – in ihrer Polarität.

Sollen in einfachster Weise Inneres und Äußeres des Kreises zu Punkten und Geraden in Beziehung gesetzt werden, so kann man bedenken, dass jeder Punkt zunächst endlich erscheint. Punkthaft haben wir deshalb bei der gelben Kreisfläche aus der Quelle das Innere sich weiten lassen. Jede Gerade ist in sich schon unendlich. Geraden können *umhüllend* die Kreisform umschließen, die von den Punkten *erfüllend* gebildet wird. Die Gesamtheit der Geraden im Äußeren des Kreises nennen die Mathematiker eine *Hülle* (Abb. 48), das von Punkten gebildete Innere einen *Kern* (Abb. 49). Ihn bezeichnet man gewöhnlich als die *Kreisfläche*.

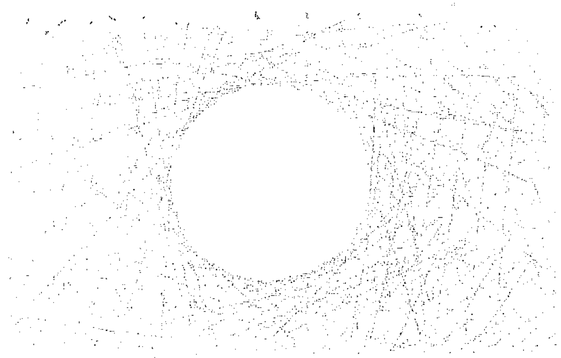


Abb. 48: Kreis – Äußeres – Hülle.

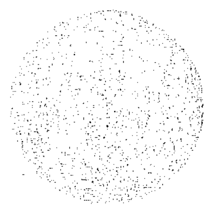


Abb. 49: Kreis – Inneres – Kern.

Im Sinne der vorausgegangenen Betrachtungen können wir die Kinder auf das *polare* Verhältnis der Punkte und der Geraden zum Kreis hinweisen. Das Wort «polar» drückt aus, dass sich etwas entgegengesetzt, aber doch aufeinander bezogen verhält – so wie man es im einfachsten Fall an Nord- und Südpol eines Magneten beobachten kann. Man kann den Kindern sagen, dass man diese polaren Verhältnisse noch ein Stück weiter verfolgen wird, dass die Kinder aber erst in der Oberstufe – in der zehnten oder elften Klasse – all dies viel genauer lernen werden.

Ein besonderer Punkt im Kreis ist der *Mittelpunkt*. Die Geraden durch den Mittelpunkt nennt man *Zentralen*. Sie schneiden den Kreis in genau gegenüberliegenden Punkten. Die Strecke zwischen solchen gegenüberliegenden Punkten nennt man einen *Durchmesser* des Kreises. Der halbe Durchmesser, also die Strecke vom Mittelpunkt bis zu einem Kreispunkt, nennt man den *Radius*.

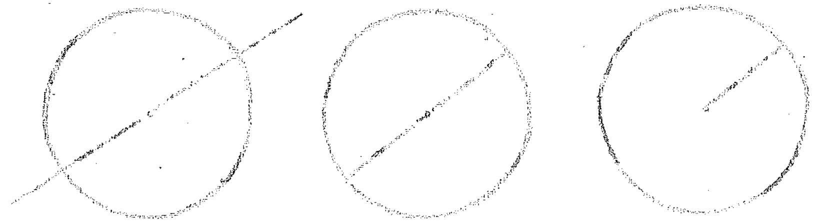


Abb. 50a – c: Zentrale, Durchmesser und Radius am Kreis.

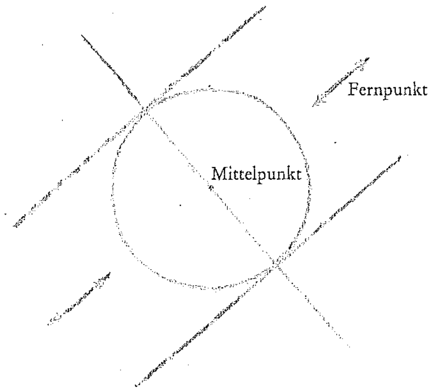


Abb. 51: Die Beziehung des Mittelpunktes zum Unendlichen.

Betrachtet man eine Zentrale und die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit dem Kreis, so sind diese Tangenten *parallel*. Sie weisen hinaus ins Unendliche. So steht der Mittelpunkt des Kreisinneren in einer Beziehung zum Unendlichen, aus welchem die Kreishülle, die wir am Anfang blau zeichneten, hervorging und sich zur Mitte hin ausweitete. Dem Kreismittelpunkt mit allen seinen Zentralen entspricht das Unendliche in allen Richtungen.[24]

Wenn nun aus dem Unendlichen eine Gerade allmählich an die Kreislinie herankommt, können wir verschiedene Lagen im Verhältnis zum Kreis beschreiben. Solange eine Gerade den Kreis nicht trifft oder berührt, nennt man sie eine *Passante*. Berührt sie den Kreis, so wird sie zur *Tangente*. Schneidet sie den Kreis in zwei Punkten, so nennt man sie eine *Sekante*. Geht sie durch den Mittelpunkt, so heißt sie – wie schon erwähnt – *Zentrale*. Das Verhältnis der Geraden zum Kreis wird also im Wesentlichen durch die Zahl ihrer Kreispunkte bestimmt. – Hier sollte auch die *Sehne* genannt werden: Sie ist die Strecke einer Sekante, welche durch die Kreisschnittpunkte bestimmt wird.

Entsprechend kann man die Punkte unterscheiden, nun aber danach, wie viele Geraden sie mit dem Kreis gemeinsam haben (s. Abb. 52a – h). Die folgenden Bezeichnungen sind zwar bis auf den Berührpunkt nicht üblich, entsprechen aber genau der Unterscheidung der verschiedenen Lagen von Geraden. Ein Punkt im Kreisinneren hat keine Tangenten mit dem Kreis gemeinsam. Er entspricht der Passante, die keine Punkte mit dem Kreis gemeinsam hat. Man könnte ihn *Meidepunkt* nennen. Rückt nun der Punkt nach außen, so kommt er auf die Kreislinie zu liegen und hat eine Gerade mit dem Kreis gemeinsam, die Tangente. Man nennt ihn dann *Berührpunkt*. Der Sekante mit ihren zwei Kreispunkten entspricht ein Punkt im Kreisäußeren, der nun zwei Geraden (Tangenten) mit dem Kreis gemeinsam hat. Man könnte ihn einen *Verbindungspunkt* nennen. Der Zentralen würde ein Punkt entsprechen, der unendlich fern ist und zwei gegenüberliegende Tangenten an den Kreis sendet, so wie die Zentrale zwei gegenüberliegende Kreispunkte besitzt. Man kann ihn einen *Fernpunkt* nennen.

Ich halte es nicht für notwendig, diese – im Folgenden auch nicht alle gebrauchten – Bezeichnungen einzuführen. Auf den Sachverhalt der polaren Verhältnisse von Geraden und Punkten am Kreis sollte aber hingewiesen werden.

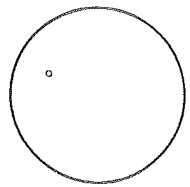


Abb. 52a: Meidepunkt

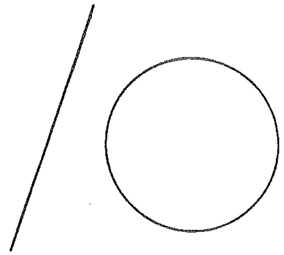


Abb. 52b: Passante

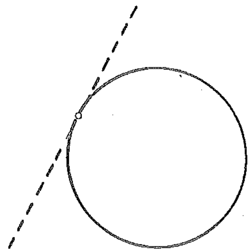


Abb. 52c: Berührpunkt

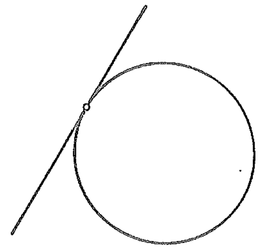


Abb. 52d: Tangente

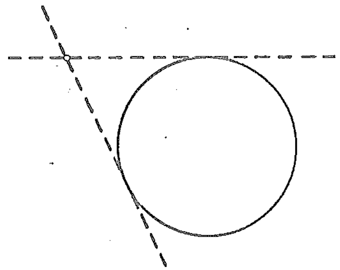


Abb. 52e: Verbindungspunkt

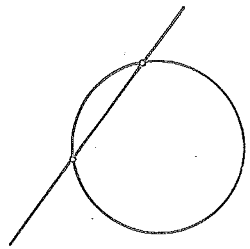


Abb. 52f: Sekante

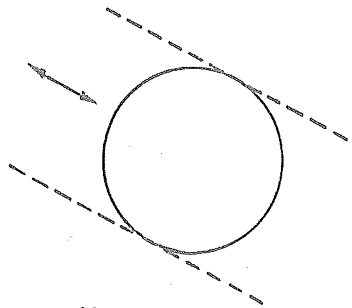


Abb. 52g: Fernpunkt

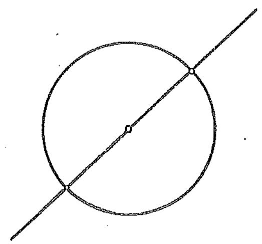


Abb. 52h: Zentrale

Abb. 52a – h: Punkte und Geraden im Verhältnis zum Kreis.

Durch eine Vielzahl von Symmetrieübungen im Formenzeichnen sind die Kinder seit langem mit der Achsensymmetrie vertraut. Angesichts der Bedeutung des Symmetriebegriffs für den Aufbau der Geometrie kann hier – ohne in eine zu frühe und formale Systematik zu verfallen – speziell auf Symmetrieverhältnisse am Kreis und mit ihnen zusammenhängende einfache Figuren aufmerksam gemacht werden. Dazu kann man eines Tages noch einmal über die (Achsen-)Symmetrie sprechen und vielleicht zunächst an einer einfachen Figur die Symmetrieachsen bestimmen lassen. Beim Besprechen der Vierecke waren zum Beispiel die Symmetrieachsen zur Ordnung im Haus der Vierecke herangezogen worden. Die eine oder andere Figur könnte daraus erinnert werden.

Dann kann man die Kinder nach den Symmetrieachsen eines Kreises fragen. Das Ergebnis wird wohl sehr rasch gefunden: Alle Zentralen – und nur diese – sind Symmetrieachsen (Abb. 53).

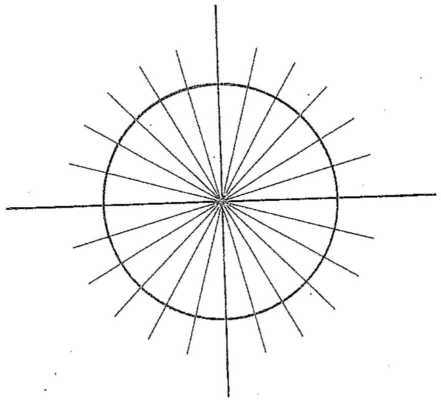


Abb. 53: Alle Zentralen – und keine anderen Geraden – sind Symmetrieachsen des Kreises.

Nun lassen wir sozusagen aus dem ersten Kreis einen zweiten – gleich großen – hervorgehen, dessen Mittelpunkt ein wenig horizontal gegen den ersten Mittelpunkt verschoben ist (Abb. 54a). Diese neue Figur aus zwei Kreisen hat nur noch *zwei* Symmetrieachsen: die Verbindungsgerade der beiden Kreismittelpunkte und die Verbindungsgerade der beiden Kreisschnittpunkte. Die beiden Symmetrieachsen verlaufen senkrecht zueinander. Man kann diese Verhältnisse auch so aussprechen: Die genannten Punkte bilden eine Raute, in der die Diagonalengeraden Symmetrieachsen sind.

Rücken nun die Kreismittelpunkte weiter auseinander, so tritt der Fall ein, dass sich die beiden Kreise *berühren* (Abb. 54b). Die eine Symmetrieachse ist dann die gemeinsame Tangente. Rücken die beiden Kreismittelpunkte noch weiter auseinander, so verläuft die zweite Achse senkrecht zur Verbindungsgeraden der Kreismittelpunkte – mitten zwischen den Kreismittelpunkten (Abb. 54c).

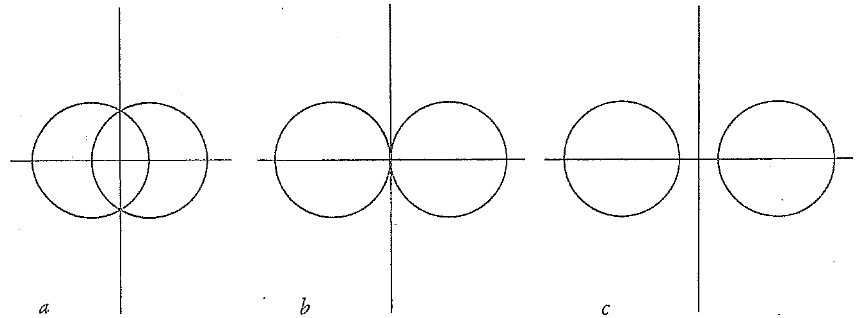


Abb. 54a – c: Die Symmetrieachsen von zwei Kreisen mit gleichem Radius.

Nun können wir die Figur noch in anderer Art variieren, indem wir die Kreise immer kleiner werden lassen (Abb. 55a – c), bis sie schließlich zu Punkten schrumpfen: Auch die sehr einfache Figur aus nur zwei Punkten hat zwei Symmetrieachsen (Abb. 55c).

In einer weiteren Variation lassen wir die Kreise immer weiter wachsen, bis sie schließlich zu Geraden werden (Abb. 55d – e).[25] Sind sie parallel (Abb. 55e), tritt der interessante Fall ein, dass wieder sehr viele Symmetrieachsen zu finden sind; und zwar sind auch alle Geraden, die *parallel* zur ursprünglichen Verbindungsgeraden der Mittelpunkte verlaufen, Symmetrieachsen geworden. Die ursprünglich zweite Symmetrieachse ist nun *Mittelparallele.* Schneiden sich aber die beiden Geraden, so gibt es nur zwei Symmetrieachsen der Figur (Abb. 55f).

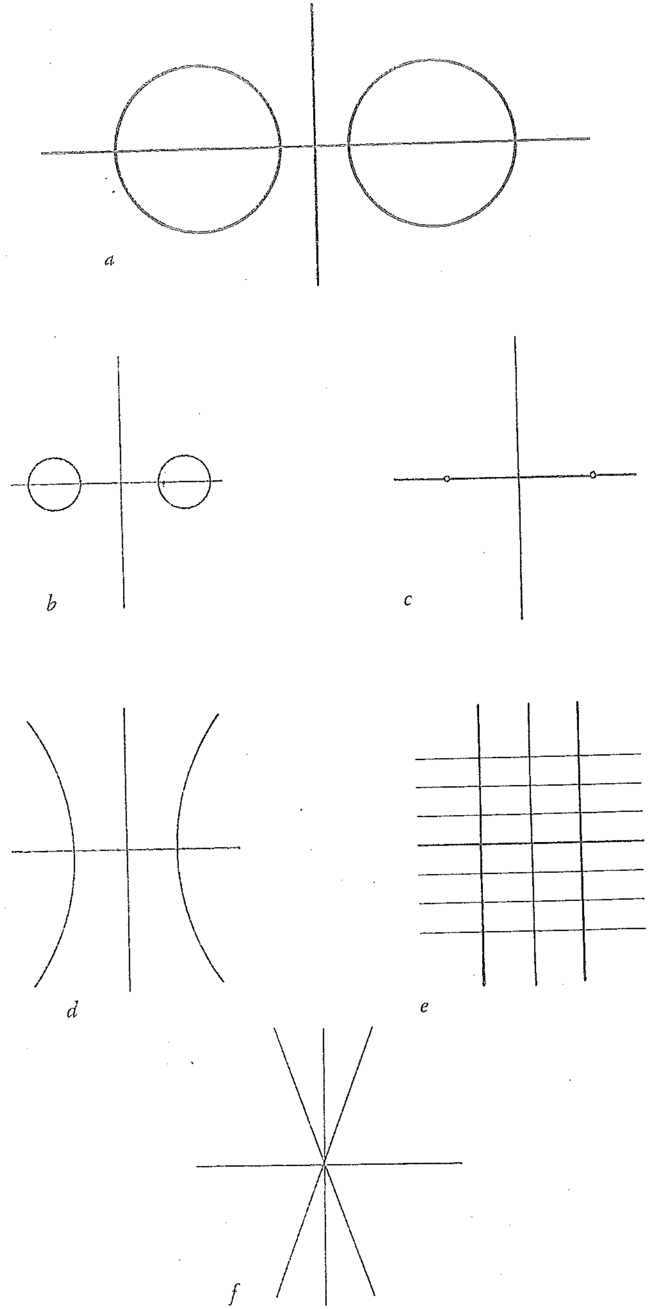


Abb. 55a – f: Die Symmetrie bei zwei Kreisen und Grenzfälle.

Die Verwandlung der Figur kann noch in interessanter Weise weitergeführt werden, indem wir nun die Kreisradien *verschieden* werden lassen (Abb. 56b – c, bzw. 56d – e). Dann ist die Verbindungsgerade der beiden Kreismittelpunkte die einzige Symmetrieachse.

Wieder lässt sich die Figur variieren und bis zu Grenzvorstellungen hinführen, wo nur noch Punkte und Geraden auftreten (Abb. 56f). So hat die Figur aus einem Punkt und einer Geraden – wenn der Punkt nicht auf der Geraden liegt – genau eine Symmetrieachse. Besonders erwähnt werden sollte auch der Fall eines Kreises und einer ihn schneidenden Geraden (einer Sekante). Die Symmetrieachse verläuft senkrecht zur zugehörigen Sehne und halbiert sie (Abb. 56g).

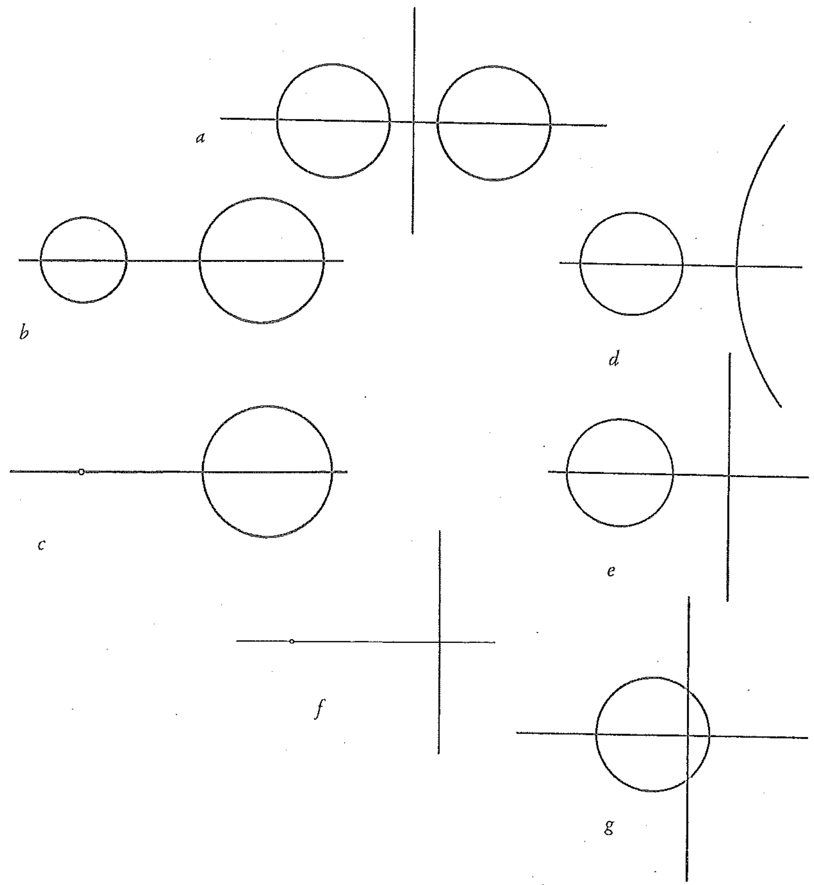


Abb. 56a – g: Die Symmetrie bei zwei Kreisen mit unterschiedlichem Radius und Grenzfälle.

Übungen zur Freihandgeometrie

Die vorangehenden Besprechungen über den Kreis sollten von freihandgeometrischen Übungen begleitet werden. Manche der Übungen sind vielleicht schon in den vorangehenden Jahren behandelt worden. Sie können aber immer wieder neu beleuchtet werden und zeigen in der zunehmenden Vollkommenheit auch etwas vom Fortschritt der Kinder. Jetzt werden solche Übungen vorgeschlagen, die auch dann als konstruktive Übungen angewandt werden können, wenn Zirkel und Lineal eingeführt worden sind. Dadurch erscheinen sowohl die Fähigkeiten der Hand wie die Genauigkeit der Instrumente in wechselseitiger Beleuchtung.

1. Der Kreis (Abb. 57).
2. Konzentrische Kreisscharen von innen nach außen oder von außen nach innen entstehend (Abb. 58).
3. Die Keimübung (Abb. 59).
4. Ausgleich zwischen Punkt und Gerade durch eine Kreisschar (Abb. 60).
5. Dreiecke im Kreis (zum Üben von beweglichen Vorstellungen und vergleichenden Beschreibungen) (Abb. 61a – b).
6. Die Kreisrosette (Abb. 62).
7. Fünfstern im Fünfeck (Abb. 63).
8. Ineinander geschachtelte Quadrate (Abb. 64).

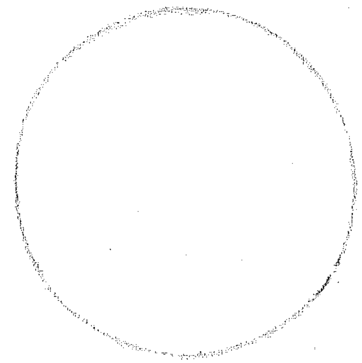


Abb. 57

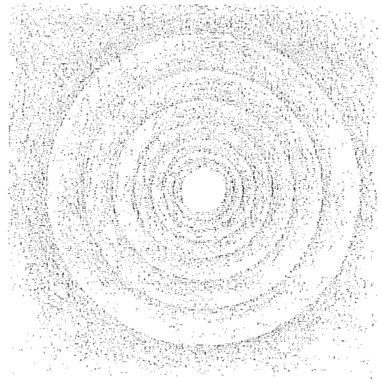


Abb. 58

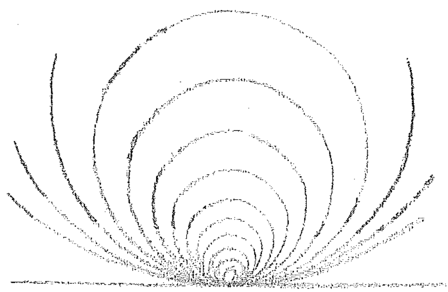


Abb. 59

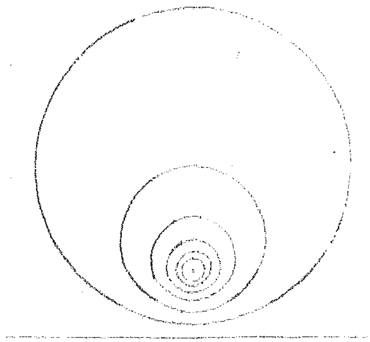


Abb. 60

Abb. 57 – 60: Übungen zur Freihandgeometrie.

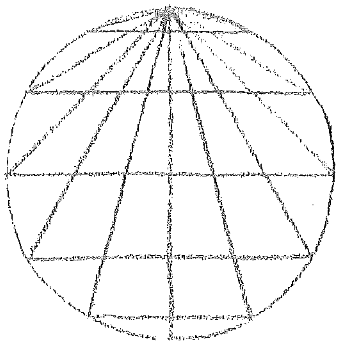


Abb. 61a

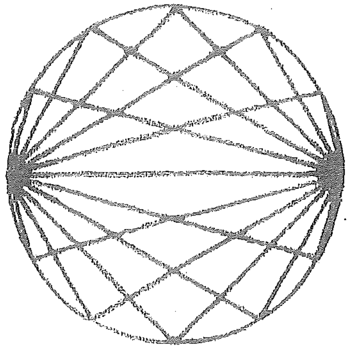


Abb. 61b

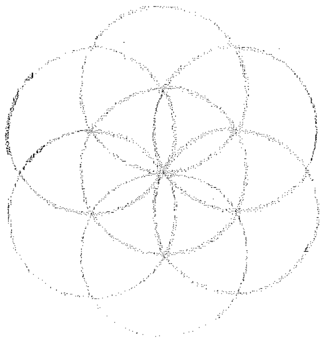


Abb. 62

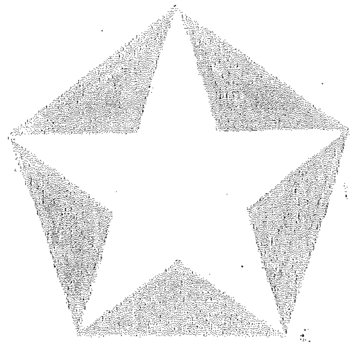


Abb. 63

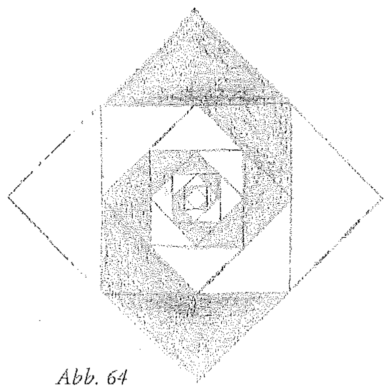


Abb. 64

Abb. 61 – 64: Übungen zur Freihandgeometrie.

Die Einführung von Zirkel und Lineal

Mit der Einführung von Zirkel und Lineal werden nicht nur Werkzeuge für ein genaueres Zeichnen zur Verfügung gestellt, sondern sie sind zugleich der Ausdruck bestimmter Begriffe und Begriffszusammenhänge, die zu ganz neuen Aufgaben und Fragestellungen führen. Für die Freihandgeometrie hat es zum Beispiel keinen Sinn, nach der Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke zu fragen. Werden, wie in der Übung der ineinander geschachtelten Quadrate, Seitenmitten bestimmt, so findet dabei eine Sinnes- und Koordinationsschulung statt. Stehen dagegen Zirkel und Lineal zur Verfügung, so sind durch die Werkzeuge bestimmte Handlungsmöglichkeiten vorgegeben, deren Anwendung begrifflich beschrieben und gedanklich begründet werden kann. Die motorische Schulung in der Anwendung der Instrumente beginnt sich vom mathematischen *Inhalt* abzulösen, wie es dann bei der Verwendung eines Geometrieprogramms im Computer zu einem extremen Auseinanderfallen von motorischer Aktivität und dargestelltem Inhalt auf dem Bildschirm kommen kann.

Die Einführung der geometrischen Instrumente sollte langfristig auf einem Elternabend vorbereitet werden. Dort ist zu erfragen, in welchen Elternhäusern geeignete Zirkel und Zeichengeräte zur Verfügung stehen. Diese Geräte sollten namentlich gekennzeichnet in die Schule mitgebracht werden, damit ihre Verwendbarkeit rechtzeitig vom Lehrer überprüft werden kann. Wo Neubestellungen notwendig sind, empfiehlt sich eine einheitliche Anschaffung durch den Lehrer. Für Deutschland kann als Standard gelten, dass beide Zirkelschenkel miteinander so verbunden sind, dass sie sich nur gleichzeitig bewegen lassen. Für größere Zeichnungen ist es nützlich, Zirkel mit Verlängerungsmöglichkeiten anzuschaffen. Ansonsten gehören zu einer guten Ausrüstung ein 30cm-Lineal, ein Geodreieck, Bleistift, Buntstifte, Spitzer und ein feines Sandpapier zum Schärfen der Zirkelspitze. Filzschreiber sind für die geometrischen Zeichnungen ungeeignet, da sie durch das Papier hindurch diffundieren. Bis zum Beginn der konstruktiven Geometrie sollten für jedes Kind mindestens der Zirkel und das Lineal im Klassenschrank bereitliegen. Neben den linienfreien DIN A4-Epochenheften habe ich gerne größere Zeichnungen auf DIN A3-Blättern ausführen lassen, für welche die Kinder eine Mappe mitbrachten.

Wenn nun der erste Tag der Behandlung der konstruktiven Geometrie kommt, ist es ratsam, die Zeichengeräte zwar bereitzulegen, aber noch nicht auszuteilen. Zuerst zeigt man an einem Zirkel, welche Teile er besitzt und wie mit ihm umzugehen ist. Man weist auf die Spitze, die bei einem Herunterfallen leicht verbogen werden kann, was den Zirkel erheblich verschlechtert; man benennt die beiden *Schenkel* des Zirkels, führt vor, wie Spitze und Mine ein- und auszusetzen sind, welche Schwierigkeiten entstehen, wenn von den Feststellschrauben eine verloren geht, wie man mit dem Sandpapier die Mine schräg keilförmig (nicht rund) schärft, und schließlich, wie man sachgerecht ihn anfasst und einen Kreis zeichnet:

Mit der linken Hand wird der Schenkel mit der Stahlspitze angefasst. Die rechte Hand hält den Zirkel am Griff. (Linkshänder greifen umgekehrt.) Die linke Hand führt dann die Stahlspitze zu der Stelle, wo der Kreismittelpunkt sein soll, drückt sie leicht hinein und lässt los. Die rechte Hand dreht am Griff den Zirkel im Uhrzeigersinn so herum, dass die Ebene durch die beiden Zirkelschenkel möglichst senkrecht zum Papier steht. Sie kann auch leicht nach vorne in Bewegungsrichtung geneigt sein. Die zuletzt beschriebene Handhabung des Zirkels beim Zeichnen wird am besten mit einem großen Tafelzirkel vorgeführt.

Über das Lineal ist nur wenig zu sagen. Indem der Lehrer mit dem Finger leicht über die Zeichenkante streicht, beschreibt er ihre Glätte. Die Gefahr ist, dass beim Fallen oder Schlagen diese Kante eine Kerbe bekommt, wodurch das Lineal für ein genaueres Arbeiten unbrauchbar wird. Nach dem Austeilen der Zeichengeräte kann jedes Kind sich selber durch Entlanggleiten an der Zeichenkante von der Qualität seines Werkzeuges überzeugen.

Dieses liebevoll-ausführliche Besprechen der Werkzeuge hat zur Folge, dass die Kinder sehr viel sorgfältiger mit ihnen umgehen. Das Wertschätzen eines guten Werkzeuges kann nicht gründlich genug vermittelt werden. Wie viel kann man in dieser Hinsicht von dem verehrten Schweizer Kollegen Ernst Bühler lernen!

Bezeichnungen

Wenn aus dem Unterricht ein Bedürfnis dafür entstanden ist, sich knapp und mit Bezug auf Zeichnungen auszudrücken, sollten auch Bezeichnungen für die Ecken (Punkte), Seiten, Geraden und Winkel von Figuren

systematisch besprochen werden. Das kann in der traditionell üblichen Weise oder auch etwas abweichend geschehen. Wir bezeichnen Punkte mit großen lateinischen Buchstaben, Geraden oder auch Strecken mit kleinen lateinischen Buchstaben und Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben. Diese Bezeichnungen sind heute noch weithin üblich, auch in Ländern, die sonst gar nicht die lateinische oder griechische Schrift verwenden. Deshalb ist es zum Beispiel nicht allzu schwer, sich in einem russischen Geometriebuch zu orientieren.

Wir werden – vor allem in späteren Jahren – aber auch Geraden durch Angabe von zwei Punkten, z.B. AB, kennzeichnen. Ebenso kann man Punkte durch Angaben von zwei Geraden, z.B. als ab, beschreiben. AB bedeutet die Verbindungsgerade der Punkte A und B, ab der Schnittpunkt der Geraden a und b. $\overline{AB}$ bedeutet in der üblichen Weise die Strecke zwischen den Punkten A und B.[26]

Geraden- und Kreisübungen

Mit den neu eingeführten Werkzeugen sollten die Kinder zunächst durch eine Reihe von einfachen Übungen vertraut gemacht werden. Dabei ist von vornherein auf ein exaktes Arbeiten zu achten. Die nicht zu weichen Bleistifte müssen gut gespitzt sein. Soll ein Kreismittelpunkt auf einer Geraden oder einer Kreislinie liegen, so muss die Genauigkeit größer als 1 mm sein. Vor dem Zeichnen ist im Allgemeinen der Kreismittelpunkt zu markieren, um ihn leicht wiederfinden zu können. Besonders beim Zeichnen auf der Tafel ist dies wichtig. Die Kreisrosette oder die Kreisrosettenfelder zeigen sehr rasch, wer genau zu arbeiten versteht. In den Abbildungen sind eine Reihe von Anregungen gegeben, die leicht ergänzt werden können. Weitere Anregungen findet man zum Beispiel in dem alten Lehrbuch von Fialkowsky[27] und bei Alexander Strakosch.[28]

Sind Punkte auf einer Geraden in gleichen Abständen abzutragen, so wird im Allgemeinen am besten der Zirkel mit zwei Spitzen (statt der Bleistiftmine) ausgestattet und so durch Umschlagen jeweils um den letzten Punkt der neue nächste Punkt gewonnen. Natürlich gibt es auch Fälle, in denen die Verwendung des Zentimetermaßes zuträglich ist, doch wird dies im Allgemeinen zu ungenaueren Ergebnissen führen.

(Es ist gedacht, dass die Kinder nach Wunsch die Zeichnungen einfärben können.)

1. Der einfache Kreis (Abb. 65).
2. Eine Schar konzentrischer Kreise wächst in gleichen Schritten. Dafür werden zunächst die gleichen Schritte auf einer Strecke abgetragen (Abb. 66).
3. Die Kreisrosette (Abb. 67). Bei genauem Zeichnen schließt sich die Rosette. Ein Beweis erfolgt in der sechsten Klasse. Diese Übung kann zu Rosettenfeldern ausgeweitet werden. Außerdem können, wie Strakosch es vorschlägt, viele geradlinige Figuren darin entdeckt werden. Zum Beispiel kann man die vielfältigsten Vierecks- und Dreiecksformen darin entdecken. Insbesondere kann so auch das regelmäßige Sechseck in einem Kreis konstruiert werden.
4. Auf einer vertikalen Geraden sind Punkte in gleichem Abstand markiert. Wähle einen geeigneten Punkt als Mitte und zeichne um die anderen Punkte Kreise durch diese Mitte (Abb. 68).
5. Zeichne von den sechs Blättern der Kreisrosette nur jedes zweite. Verbinde alle Punkte miteinander und mit dem Mittelpunkt (Abb. 69).
6. Zeichne um einen Punkt einen Kreis und solche vier weiteren Kreise aus der Kreisrosette, dass du einen rechten Winkel hineinzeichnen kannst (Abb. 70). *Lösung*: Zeichne einen Kreis und zu ihm eine horizontale Zentrale. Zu ihr ist die Senkrechte zu konstruieren. Zeichne um die Schnittpunkte der Zentrale mit dem Kreis zwei Kreise mit dem Radius des ersten. Fahre fort wie in der Zeichnung.
7. Ausgehend vom Scheitel werden auf den Schenkeln eines Winkels gleiche Strecken wiederholt abgetragen. Die Teilpunkte werden in der dargestellten Weise verbunden (Abb. 71).
8. Mit der Figur von Aufgabe 5 lässt sich ein rechter Winkel konstruieren. Damit kann man auch das Quadrat konstruieren. (Wie?) In einem Quadrat mit 8 cm Seitenlänge sind nun im Zentimeter-Abstand die Teilpunkte auf den Seiten abgetragen. Um jeden Teilpunkt ist ein Kreis mit gleichem Radius gezeichnet. Wenn verschiedene Kinder verschiedene Radien wählen, kann man gemeinsam eine schöne Verwandlungsreihe erzeugen. Natürlich können das Quadrat und die Abstände der Teilpunkte auch sehr unterschiedlich gewählt werden. Günstig ist es im Allgemeinen, mit einem rechten Winkel zu beginnen, vom Scheitel aus die Schrittgröße so oft wie gewünscht auf beiden Schenkeln abzutragen und dann erst das Quadrat zu vollenden (Abb. 72).
9. Wie in der achten Aufgabe wird ein Quadrat mit gleichmäßig unterteilten Seiten konstruiert. In der dargestellten Weise werden dann die Teilpunkte untereinander verbunden (Abb. 73).

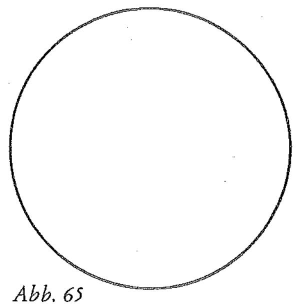


Abb. 65

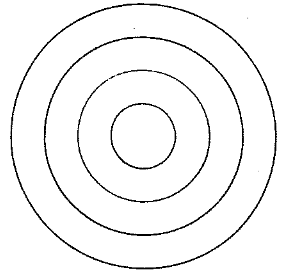


Abb. 66

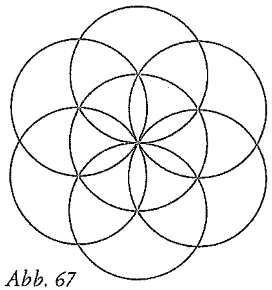


Abb. 67

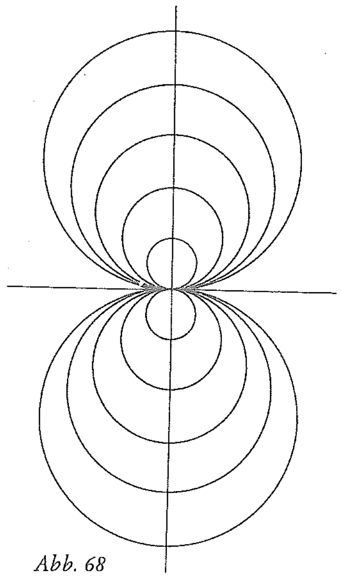


Abb. 68

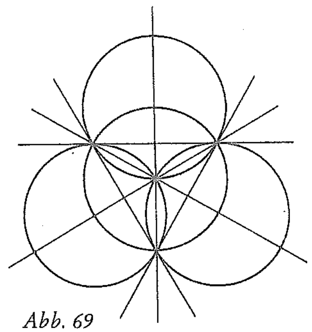


Abb. 69

Abb. 65 – 69: Geraden- und Kreisübungen.

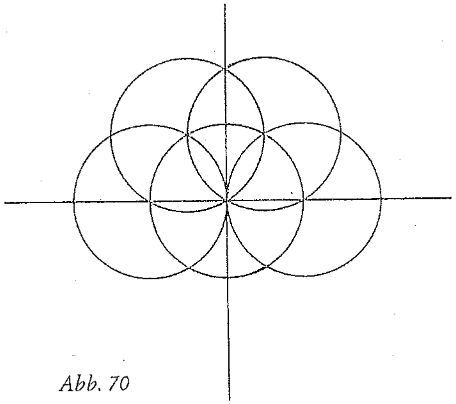


Abb. 70

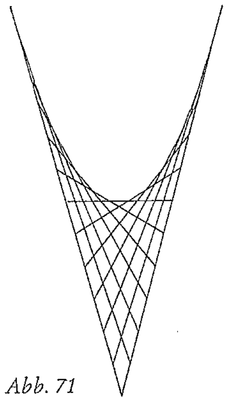


Abb. 71

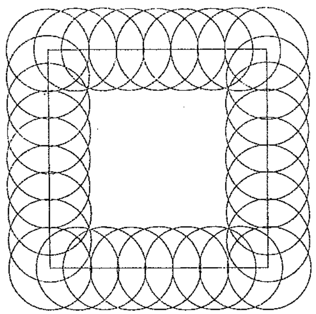


Abb. 72

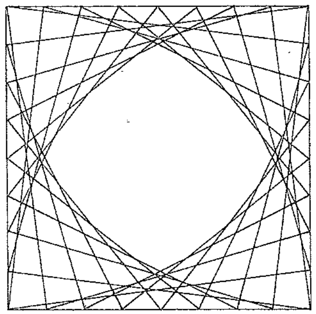


Abb. 73

Abb. 70–73: Geraden- und Kreisübungen.

Die geometrischen Grundkonstruktionen

Methodisches

Ist die Handhabung der Werkzeuge ausreichend eingeübt, kann mit der Behandlung der Grundkonstruktionen begonnen werden.

Die vollständige Behandlung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe durchläuft eine Reihe von Stufen, die zwar im Einzelfall kurz sein können oder mit einer anderen Stufe fast zusammenfallen oder auch einmal übersprungen werden, die aber doch zu ihr gehören. Louis Locher-Ernst beschrieb diese Stufen in seinem Buch *Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis* folgendermaßen:

«Beim Lernen der Mathematik wird eine große Menge von Aufgaben gelöst. Leider wird aber zu wenig darauf geachtet, dass auch wenigstens einzelne Aufgaben *vollständig* durchgeführt werden. Eine wirklich vollständige Lösung braucht viel Zeit. Die daran zu erlebenden Schritte werden aber jedem, der sie durchgemacht hat, unvergeßlich bleiben. Ich will den Vorgang einer solchen Lösung kurz schildern. Es handle sich um irgendein geometrisches Problem (z.B. Konstruktion eines Vierecks aus fünf Daten). Die unmittelbar vorgelegte Aufgabe enthält ganz *bestimmte* Daten (z.B. nicht nur die Angabe ‹Winkel zwischen den Diagonalen›, sondern auch dessen verlangte Größe). Die Griechen sprachen deshalb von der *Protasis*, der allgemeinen Aufgabe, und der *Ekthesis*, der bestimmt vorgelegten Aufgabe. Im nächsten Schritt, der *Auflösung* (*Analysis*), handelt es sich nun darum, eine Brücke zu bauen von dem Gesuchten aus zu dem Gegebenen hin. Dazu ist ein gewisses Maß von mathematischer Phantasie nötig, ferner wird die Brücke um so leichter zu finden sein, je mehr einschlägige mathematische Wahrheiten in das Bewusstsein gehoben werden können. Ist das Grundgerüst der Brücke geschaffen, so geht man im vierten Schritt, der *Zurückführung* (*Apagogä*), daran, gemäß dem Ergebnis des dritten Schrittes die vorgelegte Aufgabe auf eine Kette bekannter einfachster Grundaufgaben zurückzuführen. Der Gang vom allgemeinen Problem bis zur Zurückführung verläuft *analysierend*: Die allgemeine Aufgabe wird aus dem Weltzusammenhang herausgeschält, enthüllt und zergliedert. Da stellt sich eine natürliche Ruhepause ein. Es tritt eine Wendung ein, indem die weiteren Schritte ihre Richtung umkehren. Der fünfte Schritt besteht in der *Konstruktion (Kataskeuä)*. Gemäß der Zurückführung werden die einzelnen erforderlichen Konstruktionen *wirklich* ausgeübt. Der nächste Schritt, der *Beweis (Apodeixis)*, hat zu zeigen, dass die ausgeführte Konstruktion den durch die vorgelegte Aufgabe gestellten Forderungen in allen Teilen Genüge leistet. Im Wesentlichen wird dabei die Analysis in umgekehrter Reihenfolge durchgangen. Im letzten Schritt, der *Abgrenzung (Diorismos)*, wird Rückblick und Vorschau geübt. Die verschiedenen, durch die Ekthesis zum Teil ausgeschlossenen Möglichkeiten des allgemeinen Problems sind möglichst umfassend in Berücksichtigung zu ziehen, und es ist zu prüfen, was diese Möglichkeiten zur Folge haben. Meist ergeben sich daraus wieder neue Probleme. Der Kreis ist damit geschlossen. Im Ganzen genommen ist der Gang von der erwähnten Ruhepause an synthetisierend. Er endet mit der Einordnung der zergliederten Aufgabe in die Zusammenhänge innerhalb der ideellen Welt.»[29]

Für die pädagogische Behandlung ergänzt sich diese Stufenfolge noch, da auf eine richtige Verankerung des Behandelten im Seelischen des Kindes zu achten ist. Damit ergibt sich eine Abfolge, die etwa so beschrieben werden kann:

- Hinführung zur Fragestellung. Dies geschieht häufig durch eine kurze Erzählung, mit der auf eine Lebenssituation hingewiesen wird.
- Herausarbeiten des mathematischen Problems
- die speziell vorgelegte Aufgabe
- Lösung des Problems
- Beschreibung der Lösung
- Begründung der Konstruktion
- vereinfachte Konstruktion für die tägliche handwerkliche Anwendung
- Darstellung der zugehörigen Ganzheit in einer schönen Zeichnung
- Anwendungen der Konstruktion in unterschiedlichsten Aufgabenstellungen
- Erweiterung der Fragestellung
- Hinführung zu neuen Fragestellungen.

An der Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke soll diese Stufenfolge in einfacher Form dargestellt werden. Durchläuft man mit den Kindern diese Stufenfolge, so kann erlebt werden, wie das Kind zunächst an die Welt unter einem bestimmten Aspekt angeschlossen wird. Dann zieht es heran, was es aus dem Geometrieunterricht schon weiß. In der

Lösung werden seine ganz individuellen Kräfte aufgerufen. In der Beschreibung und Begründung der Konstruktion bringt es jeden Einzelschritt zum Bewusstsein. Aus dieser Verengung weitet es dann allmählich wieder den seelischen Blick auf größere Zusammenhänge und neue Fragestellungen.

1. Grundkonstruktion: Die Mittelsenkrechte

Hinführung zur Fragestellung:
Man kann den Kindern zum Beispiel von zwei sehr gefährlichen angeketteten Hunden A und B erzählen, deren Platz man an der Tafel mit *A* und *B* markiert. Ein Kind, das ein wenig ängstlich ist, muss seinen Weg zwischen ihnen hindurch nehmen. Wo wird es entlanggehen? Kinder werden im Allgemeinen die Mittelsenkrechte auf der Strecke $\overline{AB}$ nennen.[30] Auf ihr hält das Kind immer gleichen Abstand von den Hunden. Diese Mittelsenkrechte ist die Symmetrieachse zwischen den beiden Punkten.

Herausarbeiten des mathematischen Problems:
Es wird darauf hingewiesen, dass eine Linie, deren Punkte von zwei anderen Punkten immer gleichen Abstand haben, in der Geometrie oder auch bei praktischen Aufgaben im Leben oft eine besondere Bedeutung hat. Die Ausdrücke *Strecke* und *Mittelsenkrechte* werden verwendet. Wie kann zu einer gegebenen Strecke die Mittelsenkrechte mit Zirkel und Lineal konstruiert werden?

Die Lösung:
Die Lösung wird im Allgemeinen von den Kindern selbständig gefunden. Verschiedene Lösungsvorschläge werden angehört und besprochen. Das Gespräch wird so lange fortgesetzt, bis allgemeines Verständnis und Einverständnis vorhanden sind.

Konstruktionsbeschreibung:
Hier sollen die Kinder genügend Zeit haben, eine Beschreibung davon zu geben, was sie *tun*, um die Mittelsenkrechte einer Strecke zu konstruieren. Es kommt noch nicht auf eine möglichst knappe, stenogrammartige Formulierung an. Für viele Kinder steht noch der handwerkliche Charakter

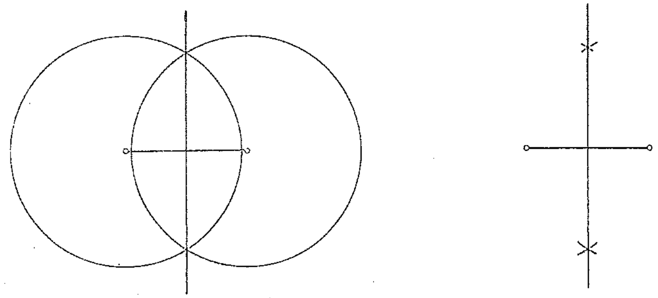


Abb. 74 und 75: Die Konstruktion der Mittelsenkrechten.

der real vollzogenen Handgriffe im Vordergrund. Man kann viel von den Kindern dadurch lernen, dass man auf ihre individuelle Beschreibung sorgfältig eingeht. Beispielsweise könnte ein Kind schreiben:

Ich öffne den Zirkel, bis er mehr als die halbe Strecke fasst. Dann steche ich mit der Zirkelspitze in den einen Endpunkt A der Strecke ein und schlage um A einen Kreis. Dasselbe tue ich um den anderen Endpunkt B der Strecke. Die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Mit dem Lineal verbinde ich nun diese beiden Punkte und erhalte die gesuchte Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$.

Vergleicht man diese ausführliche Beschreibung etwa mit der Kurzfassung «Zwei Kreisbögen um A bzw. B mit gleichem Radius $r > \overline{AB}/2$ werden in zwei Punkten zum Schnitt gebracht; die Verbindungslinie ist die gesuchte Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$», dann ist zwar diese zweite Beschreibung auch exakt, lässt aber den eigentlichen Handlungsverlauf kaum mehr sichtbar werden. Für eine Reihe von handlungsorientierten Kindern wird die Geometrie schon dadurch abstrakt und unverständlich.

Die Begründung der Konstruktion:
Alle Punkte eines Kreises haben von seinem Mittelpunkt gleichen Abstand. Da die beiden Kreise um A und B gleichen Radius haben, geht durch ihre Schnittpunkte die Symmetrieachse der beiden Kreise einschließlich ihrer Mittelpunkte, wie wir es schon auf Seite 50 f. besprochen haben.[31]

Vereinfachte Konstruktion:
Für die tägliche handwerkliche Anwendung der Konstruktion genügt es selbstverständlich, nicht die vollen Kreise, sondern nur solche kurzen Kreisbogenstücke zu zeichnen, die sich nach Abschätzung durch das Augenmaß miteinander schneiden. Dies ist vor allem dann notwendig,

wenn die Konstruktion selber nur eine nebensächliche Rolle spielt und es vielmehr auf die Mittelsenkrechte selber ankommt.

Man kann mit den Kindern einen kleinen Wettbewerb machen, wer, ohne den Radierer zu benutzen, mit den kleinsten Kreisbogenstücken die Mittelsenkrechte konstruieren kann.

Die Ganzheit und der Übergang zu neuen Fragen:
Um die zur Konstruktion gehörende Ganzheit in einer schönen Zeichnung darzustellen, kann man Kreisscharen verwenden, die alle zur Mittelsenkrechten führen. Lässt man die Kreisscharen um die beiden Endpunkte der Strecke gleichmäßig wachsen, so entsteht ein Feld sich durchdringender Kreise, deren Schnittpunktlinien zu ganz neuen Fragestellungen führen.

Zur praktischen Durchführung der Konstruktion zeichnet man am besten eine horizontale Gerade, welche zum Beispiel in 1 cm lange Strecken eingeteilt wird. Im Abstand einer geraden Anzahl von Zentimetern markieren wir die Endpunkte der Strecke, um die wir nun jeweils rechts und links mit gleicher Größe die wachsenden Kreise zeichnen. Färbt man die entstehenden Flächenstücke schachbrettartig ein, so wird sichtbar, dass die Mittelsenkrechte der Sonderfall einer ganzen Schar von Kurven ist, die in diesem Feld aufgefunden werden können (Abb. 76). In der achten Klasse werden die darin enthaltenen Ellipsen und Hyperbeln genauer zu studieren sein.

Die Aufgabe, eine Mittelsenkrechte zu konstruieren, sollte nicht abgeschlossen werden, ohne die Strecke auch in unterschiedliche Lagen zu bringen. Der Ausdruck «Senkrechte» wird natürlicherweise zunächst mit der vertikalen Lotrichtung in Verbindung gebracht. «Senkrecht zu einer Strecke oder Geraden» meint aber immer, dass zwischen der gegebenen Strecke und der konstruierten Senkrechten ein *rechter Winkel* entsteht, und der kann auch bei verschiedenen Lagen der beiden Linien sich bilden. Hier liegt ein wichtiger Schritt, der für dieses Alter charakteristisch ist: Jetzt beginnt die Möglichkeit, Raumformen von ihrer Raumlage zu trennen und zum Beispiel das Senkrechtstehen als eine von der Lage unabhängige Qualität zu fassen.

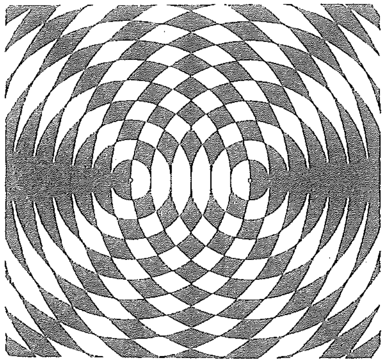


Abb. 76: Kreisscharen, welche zur gleichen Mittelsenkrechten führen.

Aufgaben zur Mittelsenkrechten

1. Zeichne in einem Kreis einen Durchmesser und konstruiere den dazu senkrecht stehenden Durchmesser. Beschreibe die Konstruktion.
2. Verwende die erste Aufgabe, um in einem Kreis ein einbeschriebenes Quadrat zu konstruieren. Beschreibe die Konstruktion.
3. Konstruiere in einem Kreis ein einbeschriebenes Achteck. Verwende dazu die zweite Aufgabe. Beschreibe die Konstruktion.
4. Konstruiere in einem Kreis ein regelmäßiges Sechseck und errichte auf allen Sechseckseiten die Mittelsenkrechte. Suche möglichst viele interessante geometrische Figuren, die in dieser Figur zu entdecken sind oder mit ihrer Hilfe leicht konstruiert werden können (Zwölfeck, Zwölfstern, Sechsstern, Quadrat, Dreiecke usw.).
5. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 6 cm.

2. Grundkonstruktion: Das Halbieren einer Strecke

Aus der vorangehenden Grundkonstruktion, dem Errichten einer Mittelsenkrechten, ist auch die Aufgabe zu lösen, eine gegebene Strecke zu halbieren. Dazu ist nur der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit der gegebenen Strecke zu markieren.

In der praktischen Anwendung wird man allerdings für die Errichtung einer Mittelsenkrechten die Radien der benötigten Hilfskreise verhältnis-

mäßig groß wählen, damit die beiden Schnittpunkte weit genug auseinander liegen, um ihre Verbindungsgerade zuverlässig zeichnen zu können. Bei der Halbierung einer Strecke lässt man gewöhnlich die beiden Hilfskreise sich nahe der gegebenen Strecke schneiden, weil auch so eine ausreichende Genauigkeit erreicht wird.

Hinweis: Für Konstruktionen an der Tafel wählt der Lehrer nach Augenmaß möglichst genau die halbe Strecke als Zirkelöffnung und trägt sie von den beiden Endpunkten der Strecke aus auf der Strecke ab. Gewöhnlich ergibt sich eine geringe Differenz. Die Mitte wird nach Augenmaß von Hand eingetragen. Dies ist schneller, weil nicht noch einmal ein Lineal verwendet werden muss und es im Rahmen der Zeichengenauigkeit mindestens so gut wie eine ausführliche Konstruktion ist.

Aufgaben zum Halbieren einer Strecke

1. Konstruiere ein Quadrat in einem Kreis. Halbiere die vier Quadratseiten und verbinde die Teilpunkte wiederum zu einem Quadrat. Zeichne in diesem Quadrat die Diagonalen und füge nun Quadrat in Quadrat, so dass die Ecken des folgenden Quadrates immer auf den Seitenmitten des vorhergehenden liegen. Färbe Teilfiguren so ein, dass interessante Figuren entstehen. Ein Beispiel gibt die folgende Abbildung (Abb. 77):
2. Konstruiere die entsprechende Figur mit regelmäßigen Sechsecken.[32]
3. Mit unseren Kenntnissen ist nun auch schon die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks in einem gegebenen Kreis möglich (Abb. 78). Dazu sind folgende Konstruktionsschritte auszuführen:

- Zeichne den gegebenen Kreis, in den das Fünfeck einzubeschreiben ist.
- Zeichne einen Durchmesser.
- Konstruiere den zu diesem Durchmesser senkrechten Durchmesser.
- Halbiere einen der vier Radien.
- Schlage um den Mittelpunkt des halbierten Radius einen Kreisbogen durch die Endpunkte des anderen Radius.
- Dieser Kreisbogen schneidet den ersten Durchmesser, auf dem ein Radius halbiert wurde. Steche den Zirkel in diesen Schnittpunkt ein und öffne ihn bis zum Ende des anderen Durchmessers.

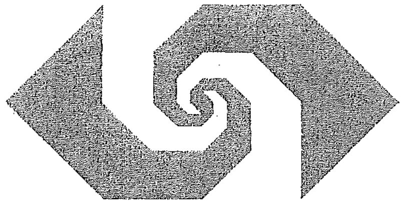


Abb. 77. Eine Spiralfigur (Logarithmische Spirale).

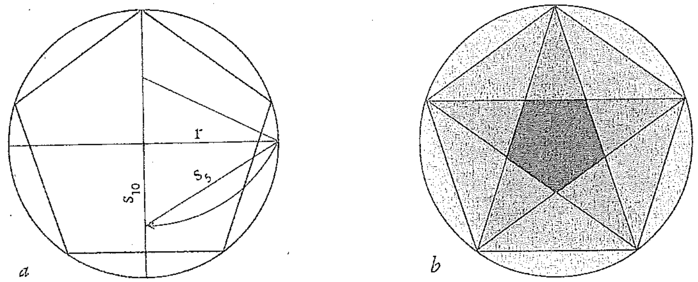


Abb. 78a – b: Die Konstruktion des Fünfecks.

- Wenn genau gearbeitet wurde, lässt sich die in den Zirkel gefasste Strecke fünfmal als Kreissehne abtragen. Sie ist die Fünfeckseite s_5. So entsteht ein regelmäßiges Fünfeck im Kreis. s_{10} ist zugleich die Zehneckseite.[33]

3. Grundkonstruktion: Das Errichten der Senkrechten in einem Punkt einer Geraden

Auch das Errichten der Senkrechten in einem Punkt einer Geraden ist auf die Konstruktion der Mittelsenkrechten zurückzuführen. Dazu wählen wir eine geeignete Zirkelöffnung und tragen von dem gegebenen Punkt aus nach links und nach rechts auf der gegebenen Geraden gleiche Strecken ab. Konstruieren wir für diese Strecke die Mittelsenkrechte, so erfüllt sie die geforderten Bedingungen.

Ein Sonderfall liegt vor, wenn die Senkrechte im Endpunkt einer Strecke oder Halbgeraden zu errichten ist. Steht genügend Platz zur Verfügung, kann die Strecke einfach über den Endpunkt hinaus verlängert werden, so dass die eben beschriebene Konstruktion durchgeführt werden kann. Ist dies nicht der Fall, so gibt es eine Reihe von Hilfskonstruktionen, mit denen dennoch die Senkrechte zu errichten ist.[34]

Aufgaben zur Senkrechten

1. Konstruiere ein Quadrat, dessen Seitenlänge 6 cm beträgt. Verwende dabei die Konstruktion der Senkrechten.
2. Konstruiere ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 cm und 4 cm.
3. Auch diese Grundkonstruktion erlaubt mit Hilfe der vorangehenden die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks. Dabei wird jetzt nicht von dem umschriebenen Kreis ausgegangen, sondern von der Länge der Fünfeck- bzw. Pentagrammseite selbst. Der Konstruktion liegt zugrunde, dass Pentagramm- und Fünfeckseite im Verhältnis des *Goldenen Schnittes* stehen. Die Teilung einer Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnittes wird in folgenden Schritten ausgeführt (Abb. 79):

- Zeichne die Strecke $\overline{AB}$, die im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt werden soll. Errichte in einem Endpunkt A der Strecke eine Senkrechte, die mindestens die halbe Länge der ursprünglichen Strecke besitzt.
- Halbiere die gegebene Strecke.
- Trage die gewonnene halbe Streckenlänge von dem gemeinsamen Punkt auf der Senkrechten ab.
- Verbinde den gewonnenen Punkt (C) mit dem anderen Endpunkt (B) der ursprünglichen Strecke zu einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC.
- Schlage um den Endpunkt C der kurzen Dreiecksseite einen Kreisbogen durch den Scheitel A des rechten Winkels und schneide ihn mit der längsten Dreiecksseite. Du erhältst D. Schlage nun um B einen Kreisbogen durch D bis zum Schnitt mit der Strecke $\overline{AB}$. Du erhältst E. E teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Aus der ursprünglichen Gesamtstrecke und der konstruierten Teilstrecke kann nun ein regelmäßiges Fünfeck konstruiert werden:[35] Zunächst wird die Strecke $\overline{AB}$ als Pentagrammseite in der gewünschten Lage

abgetragen. Um beide Endpunkte werden Kreisbögen mit dem Radius $\overline{BE}$ gezeichnet, die sich untereineinander und die Pentagrammseite schneiden. Damit erhältst du – außer A und B – weitere Fünfeck- und Pentagrammpunkte. Nun ist die Figur fertig zu stellen (Abb. 80).

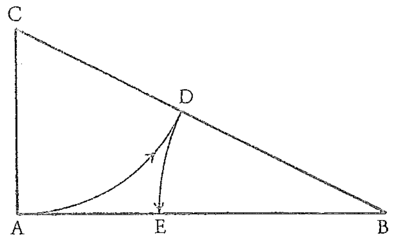


Abb. 79

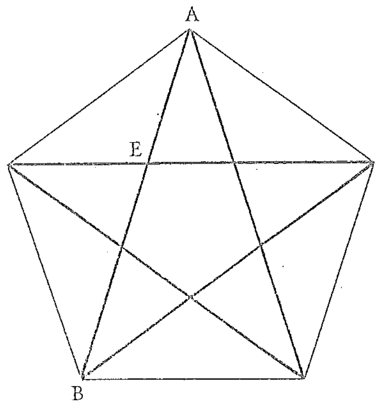


Abb. 80

Abb. 79 und 80: Die Konstruktion des Goldenen Schnittes und des Fünfecks.

Die heute gebräuchlichen Geodreiecke vereinigen mehrere Funktionen: Sie sind Lineale, gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke und Winkelmesser in einem. Es muss dem Lehrer überlassen bleiben, wann er sie einführt, doch sollte dies in der richtigen Weise geschehen. Soll zum Beispiel ein Winkel von 30° gezeichnet werden, dessen einer Schenkel und dessen Scheitel gegeben sind, dann ist das Geodreieck so anzulegen, dass sich der Mittelpunkt der Basis am Scheitel des Winkels befindet und der schon vorhandene Schenkel unter der 30°-Marke des Winkelmessers liegt. An der Basis entlang kann dann sofort der zweite Schenkel gezeichnet werden.

Auch die Senkrechte in einem Punkt einer Geraden oder einer Strecke ist mit dem Geodreieck leicht zu zeichnen. Dazu wird die Höhe (die Mittellinie) des Geodreiecks so auf die gegebene Gerade bzw. Strecke gelegt, dass die Grundseite durch den gegebenen Punkt verläuft. Dabei ist selbstverständlich die Strichstärke des Zeichengerätes zu berücksichtigen. An der Basis entlang kann dann die Senkrechte sofort gezeichnet werden.

Solche Zeichenhilfen können dann eingeführt werden, wenn es auf die eigentlichen Konstruktionsschritte nicht mehr ankommt. Dies gilt vor allem bei der praktischen Ausführung von Zeichnungen, bei der eine Vielzahl gleicher Konstruktionen benötigt wird, um zum Beispiel eine harmonische Gesamtfigur zu erzeugen. Ebenso werden mit vollem Recht derartige Zeichenhilfen in der Praxis verwendet, wenn in technischen Zeichnungen rechtwinklige Linien verlangt werden. Ist aber die Lösung einer Konstruktionsaufgabe gefordert, so dass es wesentlich auf die Konstruktionsschritte ankommt, dann sollten auch die Konstruktionen wirklich durchgeführt werden, denn sie spiegeln begriffliche Beziehungen.

4. Grundkonstruktion: Das Fällen eines Lotes

Diese Grundaufgabe fordert, von einem Punkt aus auf eine Gerade, die nicht durch diesen Punkt verläuft, das *Lot* zu fällen. Den Kindern ist das Lot zunächst aus der Bauepoche in der dritten Klasse bekannt. Es dient dem Maurer dazu, die vertikale Richtung zuverlässig zu bestimmen. Im ersten Schritt sollte auch die gegebene Gerade *horizontal* sein, so dass das

Lot *vertikal* verläuft (Abb. 81a). Wie schon erwähnt, sind die Kinder erst jetzt in dem Alter, wo sie allmählich die geometrischen Beziehungen – wie das Senkrechtstehen – von der konkreten Raumlage ablösen können. Der Lehrer muss deshalb ausführlich mit den Kindern besprechen, dass die Lotkonstruktion auch durchgeführt werden kann, wenn die gegebene Gerade nicht mehr waagerecht ist. Man gewinnt dann eben die zur gegebenen Gerade senkrechte Gerade durch den gegebenen Punkt (Abb. 81b).

Die Konstruktion des Lotes wird in folgenden Schritten durchgeführt:
- Um den gegebenen Punkt wird ein Kreisbogen geschlagen, der die gegebene Gerade in zwei Punkten trifft.
- Auf der durch die Schnittpunkte bestimmten Strecke wird die Mittelsenkrechte errichtet.

Die Begründung der Konstruktion ergibt sich aus den genannten Symmetrieeigenschaften des Kreises: Die Mittelsenkrechte auf einer Kreissehne geht durch den Kreismittelpunkt.

Der Punkt, in welchem die Lotgerade die Ausgangsgerade trifft, heißt der *Lotfußpunkt*. Die *Länge des Lotes* ist die Länge der Strecke zwischen dem Ausgangspunkt und dem Lotfußpunkt. Manchmal wird auch diese Strecke als das *Lot* bezeichnet.

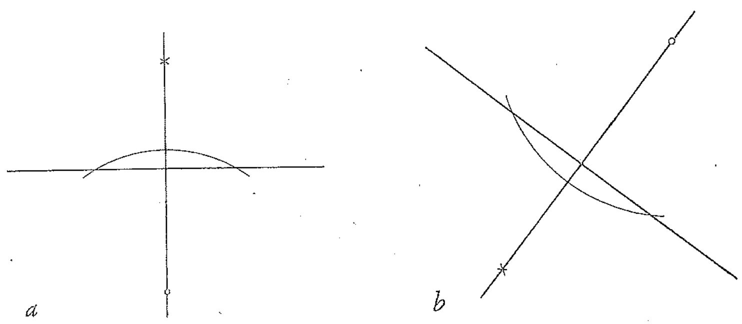


Abb. 81a – b: Die Konstruktion des Lotes.

1. Konstruiere in einem Kreis ein Quadrat und fälle vom Mittelpunkt die Lote auf die vier Seiten. Konstruiere so ein regelmäßiges Achteck.
2. Zeichne in einem Kreis ein regelmäßiges Sechseck und fälle vom Mittelpunkt die Lote auf die Seiten. Konstruiere so ein regelmäßiges Zwölfeck.
3. Konstruiere in einem Kreis ein regelmäßiges Sechseck. Hebe die drei Durchmesser hervor. Fälle von dem Endpunkt eines ersten Durchmessers das Lot auf den nächsten. Von dem erhaltenen Lotfußpunkt fälle das Lot auf den nächsten Durchmesser und so fort immer im gleichen Drehsinn. Beginne dann die Konstruktion von dem Endpunkt eines der anderen Durchmesser aus und so fort, bis von allen Endpunkten aus die Konstruktion durchgeführt worden ist. (Ist die Konstruktion fertig, so kann für eine weitere Zeichnung – zum Beispiel auf Kalenderblättern mit geometrischen Zeichnungen – das Geodreieck in der beschriebenen Art vorteilhaft verwendet werden.)
4. Führe dieselbe Konstruktion wie in der vorhergehenden Aufgabe für vier Durchmesser durch, deren Endpunkte ein regelmäßiges Achteck bilden.

5. Grundkonstruktion: Das Halbieren eines Winkels

Als zunächst letzte Konstruktion, die auf die Konstruktion der Mittelsenkrechten zurückzuführen ist, wird die Halbierung eines Winkels behandelt. Dazu sollten noch einmal die Symmetrieeigenschaften des Kreises und der einfachsten Kreisfiguren betrachtet werden: Wir hatten uns bewusst gemacht, dass alle Zentralen eines Kreises Symmetrieachsen für den Kreis sind. Wenn nun zwei Zentralen einen Winkel bilden, so gibt es zu dieser Figur zwei Symmetrieachsen, die rechtwinklig zueinander stehen. Sie sind zugleich Mittelsenkrechten der Sehnen zwischen den Kreispunkten der Zentrale. Diese Symmetrieverhältnisse werden von den Kindern – wie wir es oben beschrieben haben – ganz elementar erlebt.

Indem die vorangehende Figur noch einmal gründlich betrachtet wird, können die Kinder die Konstruktion der Winkelhalbierenden finden: Wir gehen zunächst von zwei vollen Geraden aus, die zwei Paare von jeweils gleichen Winkeln bilden. Die Schritte sind: Um den Schnittpunkt der

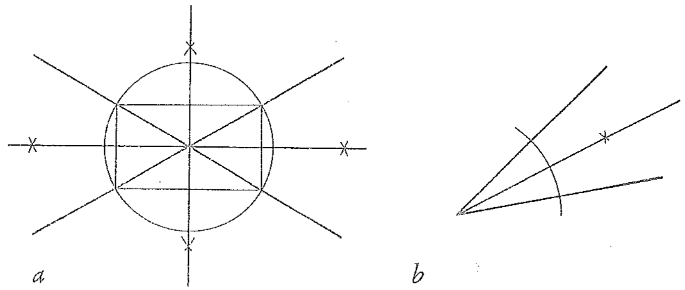


Abb. 82a – b: Die Konstruktion der Winkelhalbierenden.

Geraden – dem gemeinsamen Scheitel aller vier Winkel – wird ein Kreis mit beliebigem Radius geschlagen. Es entstehen vier Schnittpunkte. Sie bilden ein Rechteck, denn die Diagonalen sind gleich lang und halbieren sich wechselseitig.[36] Die Mittelsenkrechten auf den Rechteckseiten sind die beiden Winkelhalbierenden. Sie müssen senkrecht zueinander stehen, denn benachbarte Winkel der zwei Ausgangsgeraden ergeben zusammen 180°. Von jedem die Hälfte ergibt 90° (Abb. 82a).

Die Konstruktion ist auch für einen einzelnen Winkel aus zwei Halbgeraden durchzuführen und zu beschreiben. Diese Konstruktion ist als Fragment der vollen Figur zu betrachten (Abb. 82b).

Die folgende Figur zeigt eine Reihe von Geradenpaaren, die alle dieselben Winkelhalbierenden besitzen.

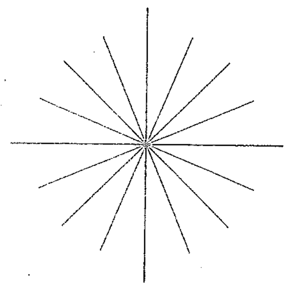


Abb. 83: Geradenpaare mit gleicher Winkelhalbierenden.

Der Zusammenhang zwischen der Winkelhalbierenden und der Mittelsenkrechten kann an einem Kreis demonstriert werden: Die *Winkelhalbierende* zweier Tangenten (durch den Kreismittelpunkt) ist die *Mittelsenkrechte* der Sehne, welche durch die zugehörige Sekante bestimmt wird.

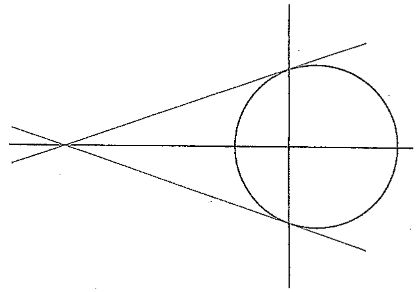


Abb. 84: Der Zusammenhang zwischen der Winkelhalbierenden und der Mittelsenkrechten am Kreis.

Aufgaben zum Halbieren eines Winkels

1. Konstruiere in einem Kreis ein Quadrat mit seinen Diagonalen. Halbiere im Kreismittelpunkt die Winkel der Diagonalen und konstruiere so ein regelmäßiges Achteck. Konstruiere so auch weitere Vielecke. Welche Vielecke könntest du jetzt konstruieren?
2. Konstruiere ein Rechteck mit den Seitenlängen 10 cm und 6 cm. Konstruiere die Winkelhalbierenden der vier Innenwinkel. Welche Figur entsteht in der Mitte?
3. Zeichne eine horizontale Gerade und markiere auf ihr im Abstand von etwa 12 cm zwei Punkte. Errichte in beiden Punkten die Senkrechten. Halbiere nun alle rechten Winkel. Halbiere die entstehenden Winkel noch zwei- oder dreimal, jedoch so, dass alle Winkel gleich groß sind. Betrachte die Figur der sich durchdringenden Geraden in den beiden Strahlenbüscheln. Färbe die entstehenden Vierecke schachbrettförmig ein. Manches Schöne kann daran beobachtet werden.

6. Grundkonstruktion: Das Übertragen einer Strecke

Wenn eine gegebene Strecke an einen anderen Ort übertragen werden soll, müssen ein Anfangspunkt und eine Richtung auf einer Geraden vorgegeben sein. Um die Aufgabe zu erfüllen, wird die gegebene Strecke in den Zirkel genommen und von dem neuen Anfangspunkt in der vorgegebenen Richtung auf der neuen Geraden abgetragen. Ist die Richtung nicht vorgegeben, so gibt es zwei Lösungen (Abb. 85).

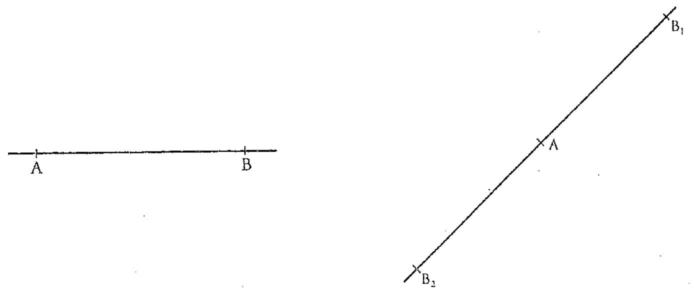


Abb. 85a – b: Das Übertragen einer Strecke.

7. Grundkonstruktion: Das Übertragen eines Winkels

Ein durch seine zwei Schenkel und den Scheitel vorgegebener Winkel ist oft so zu übertragen, dass der Scheitel in einen vorgegebenen Punkt und der eine Schenkel auf eine vorgegebene Gerade oder Halbgerade zu liegen kommt. Die Übertragung erfolgt mit Hilfe eines Zirkels:

- Um den Scheitel des gegebenen Winkels wird ein Kreisbogen durch beide Schenkel gezeichnet.
- Mit dem gleichen Radius wird um den neuen Scheitel ein Kreisbogen ausreichender Größe geschlagen.
- Nun wird die Entfernung der beiden Schnittpunkte auf den Schenkeln in den Zirkel gefasst und in der zweiten Zeichnung vom Schnittpunkt des Hilfskreises mit dem schon gegebenen Schenkel abgetragen. Ist eine Drehrichtung vorgegeben, so gibt es eine Lösung, im anderen Fall zwei (Abb. 86).

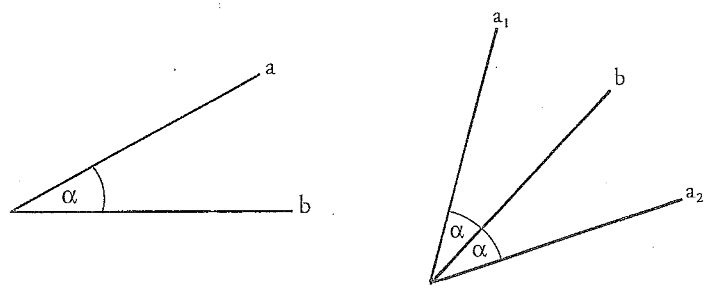


Abb. 86a – b: Das Übertragen eines Winkels.

In beiden vorangehenden Übertragungsaufgaben spielt die Unveränderlichkeit der starren, toten Körper eine wesentliche Rolle. Wenn Zirkel sich bei der Bewegung wie lebendige Organismen veränderten oder wie Flüssigkeiten und Gase Strömungsformen bildeten, wäre Geometrie in unserem Sinne nicht möglich. So hängen das Maß und damit die ganze Geometrie an der Eigenschaft der toten, starren Körper.[37]

8. Grundkonstruktion: Die Konstruktion der Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt

Auch wenn in der Regel für das Zeichnen von Parallelen die Parallelverschiebung von Dreiecken an Linealen angewandt wird, sollten die Kinder zunächst lernen, die Parallele zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt außerhalb von ihr mit Zirkel und Lineal durchzuführen.

Dazu wird durch den Punkt eine beliebige Hilfsgerade gezeichnet, welche die gegebene Gerade schneidet. Durch das Abtragen von einem der Winkel um den Schnittpunkt an entsprechender Stelle an dem vorgegebenen Punkt und der Hilfsgeraden entsteht die gesuchte Parallele (Abb. 87).

Ist dies geübt, so wird die Parallelverschiebung mit Dreieck und Lineal gezeigt. Auf ein geschicktes Anlagen des zu verschiebenden Dreieckes ist zu achten. Ist das Lineal nicht lang genug, so kann es auch seinerseits an dem schon verschobenen Dreieck selber weiter verschoben werden.

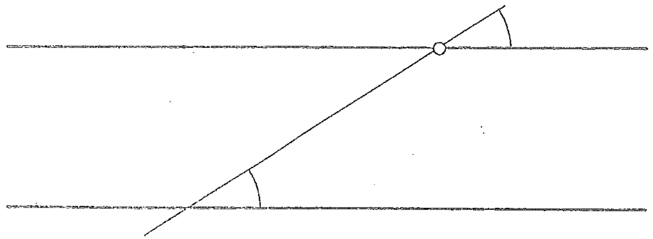


Abb. 87: Die Konstruktion einer Parallele.

Aufgaben zur Konstruktion von Parallelen

1. Zeichne von einem Punkt aus in beliebigen Richtungen zwei Strecken mit den Längen 10 cm und 5 cm. Ergänze die Figur durch Konstruktion der Parallelen zu einem Parallelogramm.
   Ergänzung: Konstruiere die Winkelhalbierenden von zwei benachbarten Winkeln. Konstruiere die beiden anderen Winkelhalbierenden als Parallelen. Welche Figur bilden die vier Winkelhalbierenden eines Parallelogramms? (Ein Rechteck)
2. Zeichne zwei sich schneidende Geraden und trage vom Schnittpunkt aus wiederholt gleiche Längen auf der ersten Geraden und (davon verschiedene) gleiche Längen auf der zweiten Geraden ab. Zeichne durch jeden Teilpunkt auf einer Geraden Parallelen zur anderen Geraden. Findest du weitere Parallelenscharen in der Figur? Zeichne einige geometrische Muster.

9. Grundkonstruktion: Die Konstruktion der Mittelparallele zu zwei parallelen Geraden

Sind zwei parallele Geraden gegeben, so kann die Mittelparallele leicht in folgender Weise gefunden werden: Es wird eine beliebige Hilfsgerade so gezeichnet, dass sie beide Parallelen schneidet. Die Strecke zwischen den Schnittpunkten wird halbiert und durch den Mittelpunkt die Parallele in der angegebenen Weise konstruiert (Abb. 88).

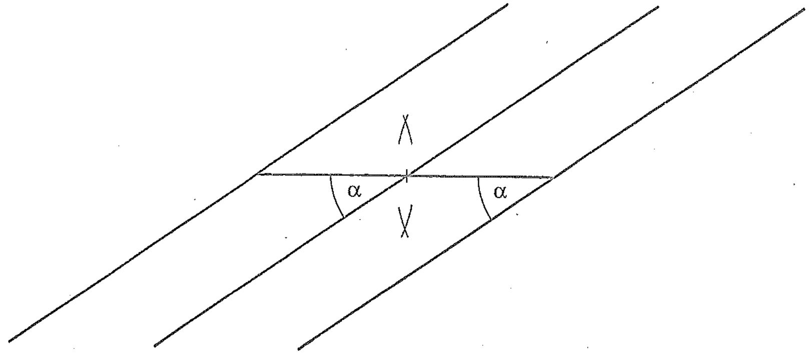


Abb. 88: Die Konstruktion der Mittelparallele.

Aufgaben zur Mittelparallele

1. Konstruiere ein Parallelogramm mit den Seitenlängen 8 cm und 6 cm. Konstruiere die Mittellinien.
2. Konstruiere in einem Quadrat die Mittellinien als Mittelparallelen der Seiten.

Winkel an Parallelen

Im Zusammenhang mit der Konstruktion von Parallelen sollte auch über die Winkel an Parallelen gesprochen werden. Wird eine Schar paralleler Geraden von einer Geraden geschnitten, so entstehen vielfach gleiche Winkel, die in besonderer Weise benannt werden (Abb. 89).

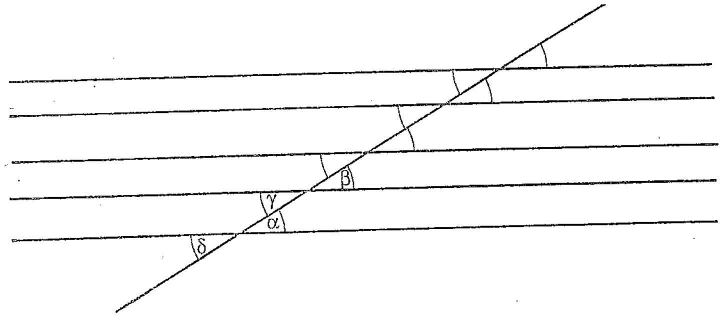


Abb. 89: Winkel an Parallelen.

Es ist $\alpha = \beta = \gamma = \delta$. α und β nennt man *Stufenwinkel*, α und γ sind *Wechsel- oder Z-Winkel*, α und δ in der schon bekannten Weise *Scheitelwinkel*.

Abschließende Übungen

Als Anwendung der Konstruktionen und zugleich als Zeichenübung können von den Kindern die unterschiedlichsten *vollständigen regelmäßigen Vielecke* in einem Kreis gezeichnet werden. Dazu wird jeder Eckpunkt eines Vielecks mit jedem anderen verbunden. Bei höheren Eckenzahlen gehen vielfach mehrere Linien durch einen Punkt und zeigen so die Genauigkeit der Arbeit.[38]

Die behandelten Grundkonstruktionen werden von den Kindern im Allgemeinen außerordentlich gerne aufgenommen. Von der Tätigkeit geht viel Ordnendes auf sie über. Während der Geometrieepochen wurde ich häufig von den Fachlehrern auf den guten Zustand der Klasse angesprochen. In der beginnenden Vorpubertät sind gerade solche Übungen mit ihrer Wirkung auf den seelischen Organismus der Kinder eine denkbar große Wohltat.[39]

Zur Fragestellung des pythagoreischen Lehrsatzes[40] kann durch eine kleine Schilderung hingeleitet werden, in der es darum geht, zu einer quadratischen Fläche zwei ebenfalls quadratische Flächen zu finden, deren Summe gleich der ursprünglichen Fläche ist. Es soll also ein Quadrat in zwei gleich große Quadrate umgewandelt werden.

Dazu zeichnet man ein Quadrat an die Tafel und fragt, wer es so zerlegen könne, dass man daraus wieder zwei gleich große Quadrate herstellen kann. Vielleicht kommen einige Kinder darauf, die Diagonalen einzuzeichnen und aus den vier rechtwinklig gleichschenkligen Teildreiecken die zwei gesuchten Quadrate zusammenzusetzen. Gut scheint es mir zu sein, die ganze Figur aus farbigen Pappen doppelt zur Verfügung zu haben: einmal das ursprüngliche Quadrat unzerschnitten und einmal farbig in die genannten Teildreiecke zerlegt. So kann man das Quadrat beliebig oft in die Teildreiecke zerlegen und wiederum zusammenfügen.

Die Kinder können nun mit Hilfe von Zirkel und Lineal die notwendigen Konstruktionen selber auf einem Karton durchführen, die Figur ausschneiden, mit ihr handelnd umgehen und sie schließlich in das Geometrieheft einkleben.

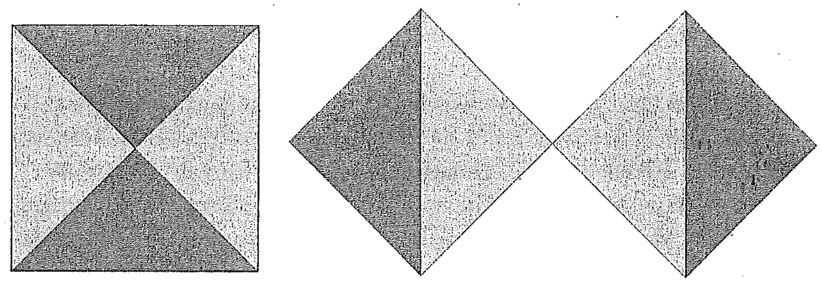


Abb. 90a – b: Der pythagoreische Lehrsatz in einfacher Form.

Durch alle möglichen phantasievollen Vergleiche kann man den Kindern die Bedeutung der Flächengleichheit des ursprünglichen Quadrates und der kleineren Quadrate verdeutlichen. Beispielsweise kann man auf Pizzastücke verweisen: Wer das große Stück erhält, wird gerade so satt wie derjenige, der die beiden kleineren erhält; oder man schildert Ackerflächen, auf denen Kartoffeln zu legen sind. Für beide Flächen werden gleich viel Saatkartoffeln benötigt, und man wird auch im Allgemeinen die gleiche Erntemenge erwarten dürfen. Rudolf Steiners humorvolle Anregung, Staub in der Vorstellung auf die Flächen blasen zu lassen, wird – auch wenn man dabei zum Beispiel an Mehlstaub denkt – die Kinder innerlich anhaltend beschäftigen. Gerade die Unmöglichkeit, das in der Vorstellung Machbare in der Wirklichkeit zu vollziehen, macht das Gedankenexperiment unvergesslich.[41]

Sind die Kinder mit der Umwandlung des Quadrates vertraut – was nicht allzu viel Zeit in Anspruch nimmt –, wird dem ganzen Sachverhalt eine andere Wendung gegeben: Statt des Quadrates stellt man eines der gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke in den Vordergrund, in welche das Quadrat durch die Diagonalen zerlegt wird. Nun kann man darauf hinweisen, dass bei einem rechtwinkligen Dreieck die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, *Katheten* genannt werden, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite *Hypotenuse*. Dann kann man den pythagoreischen Lehrsatz in der speziellen Form, in der er den Kindern nun begegnet ist, aussprechen:

Satz: *Bei einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.*

In Verbindung mit diesem wohl bekanntesten Satz der Mathematik kann man von Pythagoras erzählen.[42]

Nicht versäumt werden sollte, die Zerlegungsaufgabe auch umzukehren. Dazu zeichnet man ein nicht allzu großes Quadrat an die Tafel und fordert die Klasse auf, ein Quadrat anzugeben, das genau die *doppelte* Fläche besitzt. Möglicherweise gibt es Kinder, welche die Seitenlänge verdoppeln wollen. Indem man dies ausführt, wird sofort sichtbar, dass man die Quadratfläche *vervierfacht, nicht verdoppelt* hat. Die richtige Lösung hat dasjenige Kind gefunden, welches ein Quadrat über der Diagonalen des kleinen Quadrates errichtet. Man kann dies ebenfalls als einen Satz formulieren:

Satz: *Die Fläche eines Quadrates wird verdoppelt, wenn man über einer seiner Diagonalen ein Quadrat errichtet.*

Rückblick und Ausblick

Mit dem vorgeschlagenen Aufbau der Geometrie in der vierten und insbesondere in der fünften Klasse ist für alles Folgende eine vorbereitende Grundlage geschaffen. Sie ist noch keine logische Fundierung, sondern eine handelnde und vergleichend betrachtende Hinführung zur Geometrie. Mit ihr sollen schrittweise Erfahrungen zur Verfügung gestellt werden, auf die sich später ein Ordnen und Systematisieren richten kann. Wer in zu frühem Alter mit formalen Darstellungen beginnt, droht durch die Missachtung der Genese von Begriffen im Kind das aufkeimende Interesse an der Formenwelt zu verschütten.

Aufmerksam machen möchte ich noch einmal darauf, wie das durch Jahre im Formenzeichnen gepflegte Symmetrieerleben auch für die erste Geometrie von grundlegender Bedeutung ist. Mit ihm gelingt ein erstes Ordnen der Vierecksformen. Es ist für die Dreieckslehre hilfreich und spielt schließlich als Spiegelung für den abbildungsgeometrischen Aufbau der Geometrie eine fundamentale Rolle.[43] Wert wurde darauf gelegt, nicht nur Begriffe, erste Gesetzmäßigkeiten und Konstruktionen zu vermitteln, sondern sie auch in der Erzeugung ansprechender Figuren anwenden zu lassen, wie es der Altmeister des Geometrieunterrichts an Waldorfschulen, Hermann von Baravalle in seinem schönen Buch *Geometrie als Sprache der Formen* in großem Stil gezeigt hat.[44] Zur Geometrie gehören eben nicht nur die beweisbaren Gesetze, sondern auch die Vielfalt der Formen, in denen diese Gesetze wirksam sind.

Anmerkungen

1 E.A. Karl Stockmeyer, *Angaben Rudolf Steiners zum Lehrplan für die Waldorfschulen,* Manuskriptdruck, Stuttgart 1976.

2 Hermann von Baravalle, *Darstellende Geometrie nach dynamischer Methode,* Stuttgart ^{2}1982; ders., *Geometrie als Sprache der Formen,* Stuttgart ^{3}1980; Arnold Bernhard, *Vom Formenzeichnen zur Geometrie der Mittelstufe,* Stuttgart 1996; ders., *Geometrie für die 7. und 8. Klasse an Waldorfschulen,* Stuttgart 1993; Ernst Bühler u.a., *Lebendiges Denken durch Geometrie,* Stuttgart ^{4}1995; Alexander Strakosch, *Einführung in die Geometrie durch übende Anschauung,* Stuttgart 1962.

3 Vgl. hierzu Rudolf Steiner, *Erziehungskunst. Methodisch-Didaktisches,* Gesamtausgabe Bibl.-Nr. (= GA) 294, Dornach ^{6}1990, 7., 8. und 10. Vortrag.

4 Ebd., 7. Vortrag, sowie Rudolf Steiner, *Erziehungskunst. Seminarbesprechungen und Lehrplanvorträge,* GA 295, Dornach ^{4}1984, 10. Seminarstunde. Siehe dazu auch Ernst-Michael Kranich, *Pflanze und Kosmos,* Stuttgart ^{3}1997.

5 Vgl. Rudolf Steiner, *Erziehungskunst. Seminarbesprechungen und Lehrplanvorträge,* a.a.O. (Anm. 4), 4. Seminarstunde.

6 Vgl. hierzu *Rudolf Steiner zur Mathematik. Eine Sammlung von Zitaten aus dem Gesamtwerk,* 2 Bde., Stuttgart 1994, Z 54, 72, 92, 151, 158, 167, 170.

7 Rudolf Steiner, *Erziehungskunst. Methodisch-Didaktisches,* a.a.O. (Anm. 3), 10. Vortrag.

8 Der Name dieses Kindes aus meiner Klasse wurde geändert.

9 Siehe z.B. Jerome S. Bruner, *Studies in cognitive growth,* New York: Wiley 1966.

10 Vgl. *Rudolf Steiner zur Mathematik,* a.a.O. (Anm. 6), Z 47.

11 Vgl. Matthäus 27, 46; Markus 15,34; Lukas 23, 44.

12 Vgl. Anm. 10.

13 Im Sinne der projektiven Geometrie wird ein Winkel durch zwei unendlich ferne Punkte bestimmt. Indem wir von einem endlichen Punkt aus die Strahlen zu unendlich fernen Punkten denken, bilden sie in diesem Punkt einen Winkel.

14 Es scheint mir vertretbar, hier die Halbgeraden ohne weitergehende Behandlung einzuführen.

15 Der Durchmesser als geometrischer Begriff ist noch nicht eingeführt. Er dient hier als Hinweis für den Lehrer.

16 Vgl. Anm. 15, gilt entsprechend.

17 Vgl. Anm. 3.

18 Vgl. *Rudolf Steiner zur Mathematik,* a.a.O. (Anm. 6), Z 72.

19 Siehe ebd.

20 Ebd.

21 Nach Louis Locher-Ernst, *Raum und Gegenraum. Einführung in die neuere Geometrie,* Dornach ^{3}1988, 11. Kapitel.

22 Mathematisch ist es berechtigt, die Kreislinie als eine Menge von *Linienelementen* zu betrachten. Ein Linienelement besteht aus einer Geraden und einem auf ihr liegenden Punkt.

23 Hier ist sorgfältig darauf zu achten, dass eine Gerade nicht wirklich als Menge von Punkten definiert werden kann, sondern Träger unendlich vieler Punkte ist, wie der Punkt Träger unendlich vieler Geraden ist. Es besteht zwischen den Begriffen Strahlenbüschel und Punktreihe eine strenge Polarität im Sinne der projektiven Geometrie.

24 Die mathematisch exakte Einführung der unendlich fernen Elemente geschieht nach dem Waldorflehrplan erst in der zehnten Klasse. Hier kann vorbereitend auf diese Verhältnisse nur hingewiesen werden. Genaueres findet man z.B. bei Louis Locher-Ernst, *Raum und Gegenraum,* a.a.O. (Anm. 21).

25 Im Rahmen der projektiven Geometrie, die wir hier immer wieder als allgemeineren Hintergrund denken, hat dies einen wohl definierten Sinn, der aber an dieser Stelle noch nicht zu besprechen ist. Hier geht es darum, in elementarer Weise schon Grenzvorstellungen anzuregen.

26 Eine projektive Kennzeichnung von Strecken und Winkeln erscheint hier noch nicht hilfreich. Sie kann der Oberstufe vorbehalten bleiben.

27 Das von Rudolf Steiner im 12. Vortrag von *Erziehungskunst. Methodisch-Didaktisches* erwähnte Buch von Nikolaus Fialkowski, *Zeichnende Geometrie (Konstrukzions-Lehre)* erschien 1882 in der 3. Auflage in Wien und Leipzig.

28 Alexander Strakosch, a.a.O. (Anm. 2).

29 Louis Locher-Ernst, *Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis,* Dornach ^{2}1973. Der Text ist dem Aufsatz «Vom Sinn der mathematischen Schulung» entnommen.

30 Hier könnte etwas genauer über den Unterschied von Geraden und Strecken gesprochen werden. Ob die Unterscheidungen in den Bezeichnungen – Gerade AB und Strecke $\overline{AB}$ – schon eingeführt werden sollen, muss der Lehrer entscheiden.

31 Abstand und Entfernung möchte ich auf dieser Stufe noch nicht unterscheiden, da diese Unterscheidung umgangssprachlich nicht üblich und von der Sache her noch nicht erforderlich ist.

32 Bei der ersten und zweiten Aufgabe treten in elementarer Weise höhere Gesetzmäßigkeiten auf, die als logarithmische Spiralen in der Oberstufe wiederkehren. Man kann auch darauf hinweisen, dass die Natur in vielfältiger Art – z.B. bei Sonnenblumen oder Schneckenschalen – solche Spiralformen verwendet.

33 Nach meiner Auffassung dürfen Kinder mit solchen Konstruktionen vertraut gemacht werden, ehe sie beweisbar sind. Man sollte aber eine Zukunftserwartung wecken, indem man auf den späteren Beweis hinweist.

34 Zu späterer Gelegenheit können solche Konstruktionen als Aufgabe gegeben werden.

35 Auch hier ist auf einen späteren Beweis hinzuweisen.

36 Vgl. das Haus der Vierecke, S. 27 ff.

37 Dies wird betont, weil in höheren Geometrien – wie schon bei perspektivischen Konstruktionen – das Maß im gewöhnlichen Sinne nicht starr bleibt. Außerdem stellt sich die interessante Frage, welche Geometrien in Flüssigkeiten oder Gasen angemessen wären.

38 Vgl. Louis Locher-Ernst, *Mathematische Meditationen*, Winterthur/Dornach 1962.

39 Derartige geometrische Zeichnungen können nach Rücksprache mit einem Fachmann auch bei hysterischen Erscheinungen therapeutisch eingesetzt werden.

40 Vgl. die Darstellungen Rudolf Steiners im 10. Vortrag von *Erziehungskunst. Methodisch-Didaktisches*, a.a.O. (Anm. 3).

41 Rudolf Steiner, *Allgemeine Menschenkunde als Grundlage der Pädagogik*, GA 293, Dornach [9]1992, 14. Vortrag.

42 Rudolf Steiner spricht mehrfach und zum Teil ausführlich über Pythagoras. Insbesondere ist seine Darstellung in *Die Rätsel der Philosophie*, GA 18, Dornach [9]1985, zu erwähnen. Weitere Ausführungen finden sich in *Ursprungsimpulse der Geisteswissenschaft*, GA 96, Dornach [2]1989 (14.5.1906), *Weltenwunder, Seelenprüfungen und Geistesoffenbarungen*, GA 129, Dornach [6]1995 (20.8.1911), *Der Mensch im Lichte von Okkultismus, Theosophie und Philosophie*, GA 137, Dornach [5]1993 (6.6.1912) und *Die Wissenschaft vom Werden des Menschen*, GA 183, Dornach [2]1990 (1.9.1918). Siehe auch Ernst Bindel, *Pythagoras*, Stuttgart 1962.

43 Vgl. F. Bachmann, Der Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, in: *Grundlehren der mathematischen Wissenschaft*, Bd. 96, Berlin / Göttingen / Heidelberg 1959, sowie M. Jeger, Über die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie, in: *Elemente der Mathematik*, Band XIX, Nr. 1, S. 1 – 8 und Nr. 2, S. 29 – 35.

44 Hermann von Baravalle, a.a.O. (Anm. 2).

Register