Marko Roczen

Thema: Singularitäten algebraischer Mannigfaltigkeiten, ihre Auflösungen und Deformationen

Deformationen und Auflösungen isolierter Singularitäten algebraischer Mannigfaltigkeiten stehen im Mittelpunkt des Interesses der modernen algebraischen Geometrie. Sie stellen eine Schnittstelle für das Zusammentreffen lokaler und globaler Probleme dar: Während beim Studium glatter, kompakter Varietäten Obstruktionen homologischer Art auftreten, sind bei der Untersuchung von isolierten Singularitäten alle Probleme (unter Verzicht auf Glattheit) auf die Umgebungen eines Punktes konzentriert. Die letztere Situation läßt sich mit den Methoden der kommutativen Algebra erfassen, während für die erstere Fragen algebraisch-topologischer Art eine entscheidende Rolle spielen. Besonders erfolgversprechend ist das Zusammenspiel beider: Das ist dann der Fall, wenn zusammen mit Singularitäten auch ihre Auflösungen, also wiederum glatte Mannigfaltigkeiten betrachtet werden.

Alternativ dazu können wir so vorgehen: Wir „entfalten“ eine Singularität in solche Punkte, die „weniger singulär“ oder sogar glatt sind. Seit der mittlerweile klassischen Beschreibung der semiuniversellen Familien isolierter Singularitäten ist diese Technik in der algebraischen Geometrie unverzichtbar geworden; heute zur Verfügung stehende Computeralgebrasysteme erlauben Untersuchungen für Fälle, die zuvor wegen ihrer Komplexität kaum Erfolgsaussichten boten.

Die zu behandelnden Fragen sind über die reine Mathematik hinaus auch in der theoretischen Physik von Interesse. Beide beiden Herangehensweisen sollen hier in jeweils einem Fall erläutert und innerhalb konkreter Aufgabenstellungen präzisiert werden.

I. Auflösungen von Singularitäten

X sei eine Calabi-Yau Varietät, d.h. eine d-dimensionale, kompakte komplexe Varietät mit $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$, $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ für $i = 1, \ldots, d-1$, die höchstens kanonische Singularitäten hat. Ist $f : \tilde{X} \to X$ eine krepante, projektive Auflösung, so wird von einem Mirror-Partner $\tilde{Y} \to Y$ von f erwartet, daß die Hodgezahlen die Eigenschaft

$$h^{p,q}(\tilde{X}) = h^{d-p,q}(\tilde{Y}), \quad 0 \leq p, q \leq d$$

haben. Die naheliegende Frage, ob die Zahlen $h^{p,q}(\tilde{X})$ von der Wahl der krepanten Auflösung unabhängig sind, wurde von Batyrev und Kontsevich positiv beantwortet (Batyrev, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 264 (1999)).

Es gibt Beispiele von Calabi-Yau Varietäten, die keine krepante Auflösung haben. Die Unabhängigkeit der Zahlen $h^{p,q}$ von der Wahl einer eventuell existierenden derartigen Auflösung rechtfertigt allerdings das folgende Herangehen: Wird von vornherein in der singulären Kategorie gearbeitet, so können dort sogenannte stringtheoretische Hodgezahlen mit geeigneten Korrekturtermen eingeführt werden, die Mirror-Identitäten erwarten lassen.

X sei nun eine Varietät, von der weder Glattheit noch Kompaktheit vorausgesetzt wird. Die Kohomologiegruppen $H_c^k(X,\mathbb{C})$ mit kompakten Trägern haben eine natürliche gemischte Hodgestruktur; dadurch läßt sich X ein Polynom $E(X;u,v) \in \mathbb{Z}[u,v]$ zuordnen:

$$E(X;u,v) := \sum_{0\leq p,q\leq d} e^{p,q}(X)u^p v^q, \quad e^{p,q}(X) := \sum_{0\leq k\leq 2d} h^{p,q}(H_c^k(X,\mathbb{C}))$$

Diese sogenannten E-Polynome enthalten Informationen über klassische Invarianten, etwa die topologische Eulercharakteristik $e(X) = E(X;1,1)$. Ist nun $\tilde{X} \to X$ Auflösung einer normalen Varietät mit höchstens log-terminalen Singularitäten, deren sämtliche exzeptionelle Divisoren D_i glatt sind ($i \in I = \{1,\ldots,r\}$) und sich normal schneiden, so wird durch

$$E_{str}(X;u,v) := \sum_{J\subseteq I} E(D_J^o;u,v) \prod_{j\in J} \frac{uv-1}{(uv)^{a_j+1}-1}$$

mit Diskrepanzen a_j und $D_J := \cap_{j\in J} D_j$ für $J \neq \emptyset$, $D_\emptyset := \tilde{X}$ sowie $D_J^o := D_J - \cup_{i\notin J} D_i$ eine stringtheoretische E-Funktion definiert. $E_{str}(X;u,v)$ ist unabhängig von der Wahl einer solchen Auflösung $\tilde{X}$. Wenn $\tilde{X} \to X$ krepant ist, so gilt

$$E_{str}(X;u,v) = E(\tilde{X};u,v),$$

im allgemeinen ist E_{str} jedoch nicht einmal rational. Obwohl (über $\mathbb{C}$) nach Hironaka stets eine Singularitätenauflösung mit glatten exzeptionellen Divisoren und normalen Schnitten existiert, läßt sich $E_{str}(X;u,v)$ ohne eine sehr explizite Kenntnis der Auflösung von X kaum bestimmen. Die rationale Zahl

$$e_{str}(X) := lim_{u,v\to 1} E_{str}(X;u,v) = \sum_{J\subseteq I} e(D_J^o) \prod_{j\in J} \frac{1}{a_j+1}$$

heißt stringtheoretische Eulerzahl von X und die natürliche Zahl

$$ind_{str}(X) := min\{q \mid e_{str}(X) = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ q > 0\}$$

stringtheoretischer Index von X. Nach einer Vermutung von Batyrev (1997) ist $ind_{str}(X)$ beschränkt durch eine Konstante, die nur von der Dimension d von X abhängt, sowie für $d = 3$ insbesondere $ind_{str}(X) \in \{1,2,3,4,6\}$, was in wenigen Beispielen bekannt war.

Sei X eine einfache, 3-dimensionale Hyperflächensingularität. Dann ist X absolut isoliert, und die durch Aufblasung von Punkten entstehende Auflösung ist gut bekannt (Giblin, J. London Math. Soc. 44 (1969), 523 - 530 und Roczen, Preprint

20, HUB (1981)). Damit ist es möglich, $E_{str}(X; u, v)$ und insbesondere $ind_{str}(X)$ zu bestimmen, wenn X eine der dreidimensionalen Singularitäten A_n, D_n, E_6, E_7 oder E_8 ist (D. I. Dais, M. Roczen, On the String-Theoretic Euler Number of 3-dimensional ADE-Singularities, in Vorbereitung). Wir erhalten $ind_{str}(X)$ aus einer endlichen Menge, d.h. die genannte Vermutung läßt sich (in diesem Fall) mit einem geringfügigen Zusatz aufrecht erhalten.

Aufgabe:

Studium von Klassen isolierter Singularitäten mit expliziter Beschreibung der Auflösungen, Bestimmung der stringtheoretischen E-Funktion und insbesondere Untersuchung von Schranken für den stringtheoretischen Index zur Überprüfung der Batyrev-Vermutung

II. Deformationen von Singularitäten

Wir betrachten Keime isolierter Hyperflächensingularitäten, d.h. Quotienten $k[[X_0, \ldots, X_n]]/(f)$ formaler Potenzreihenringe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper beliebiger Charakteristik. Besonders gut verstanden sind Singularitäten kleiner Modalität. Hyperflächensingularitäten der Modalität 0 sind genau die „einfachen“ Singularitäten, auch ADE-Singularitäten genannt; sie stehen am Anfang einer Reihe von Klassifikationsproblemen, lassen sich z.B. als Hyperflächensingularitäten von endlichem Darstellungstyp charakterisieren oder als absolut isolierte Cohen-Macaulay-Doppelpunkte. Obwohl viele ihrer Eigenschaften zu klassischen Resultaten der algebraischen Geometrie zählen, ist die vollständige Liste der Gleichungen (im Fall beliebiger Charakteristik) erst mit Arbeiten von M. Artin (1977), Kiyek, Steinke (1985), Greuel, Kröning (1990) gefunden worden, sowie die Äquivalenz der angegebenen Eigenschaften u.a. durch Knörrer (1987) und Greuel, Kröning (loc. cit.) beweisen worden.

Ist $char(k) = 0$, so sind die Gleichungen ADE quasihomogen und entsprechen bijektiv ihren Gewichten des gleichnamigen Typs. Einem Gewicht $w = (w_0, \ldots, w_n)$ entspricht die durch K. Saito untersuchte nichtnegative rationale Zahl Zahl $s(w) := n + 1 - 2\sum w_i$ (auch „Index“ der Singularität genannt).

Quasihomogene Polynome sind u.a. in der theoretischen Physik für die Klassifikation superkonformer Feldtheorien von Interesse. Im Fall $s = 3$ ist ein Algorithmus angegeben worden, der durch Anwendung von Methoden der Computeralgebra prinzipiell eine vollständige Liste der entsprechenden quasihomogenen Polynome geben sollte (Kreuzer, Skarke, Commun. Math. Phys. 150, 1992); Candelas, Lynker, Schimmrigk haben mit entsprechenden Polynomen etwa 6000 Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten im 4-dimensionalen gewichtet-projektiven Raum konstruiert.

Wir machen zunächst keine Einschränkungen über die Werte von s. Für Grundkörper beliebiger Charakteristik sind die ADE-Singularitäten durch dieselben Gewichte wie in der Charakteristik 0 gegeben, wenn anstelle von quasihomogenen

Polynomen semiquasihomogene (kurz sqh-) Potenzreihen betrachtet werden, das sind solche Reihen $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X^\nu$, in deren Träger nur Multiindizes vom Gewicht ≥ 1 vorkommen und deren Hauptteil aller Terme vom Gewicht 1 eine quasihomogene isolierte Singularität definiert.

In diesem Rahmen ist es möglich, die einfachen Singularitäten als diejenigen semiquasihomogenen zu charakterisieren, für die $s < 1$ ist. Der Fall $s = 1$ entspricht genau den Gewichten der) einfach elliptischen Singularitäten $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$; diese haben die Modalität 1 über $\mathbb{C}$; ihre Gleichungen konnten auch im Fall positiver Charakteristik bestimmt werden (Roczen, An. St. Univ. Ovidius Constantza, Vol 4, (1996), 159 - 168 und An. St. Univ. Ovidius Constantza, Vol 5, (1997), 99 - 104), vgl. Forschungsbericht des Instituts 1991 - 1996).

Nun ist die Frage naheliegend, wie die größeren Werte von s verteilt sind. Kleinster Häufungspunkt ist $s = 1$. Für $1 < s \leq \frac{7}{6}$ gibt es insgesamt 12 mögliche Werte von s, von denen einige mehreren wesentlich verschiedenen Gewichten entsprechen (Roczen, Semi-quasi-homogeneous Singularities with Triangle Weights in Positive Characteristics, erscheint in Sitzungsber. der Berliner Math. Gesellschaft, 2001). Für den darin enthaltenen Fall der 14 Dreiecksgewichte (entsprechend der Modalität 1 in Charakteristik 0) und $char(k) \neq 2, 3, 5, 7$ gibt es zu jedem der Gewichte genau 2 sqh-Isomorphieklassen, von denen eine nicht quasihomogen ist; die übrigen Fälle sind durch sqh-Polynome beschrieben, wobei Moduli auftreten können. Da dies ausschließlich positive Charakteristiken betrifft, können Resultate von Greuel, Hertling,Pfister (1995) aus dem komplex-analytischen Fall hier zunächst nicht verwendet werden.

Einige der erwähnten sqh-Polynome konnten durch Benutzung von Computeralgebrasystemen gefunden werden; darin scheint eine realistische Möglichkeit zur Weiterführung der Klassifikation zu liegen, obwohl die Komplexität der auftretenden Rechnungen auch hier enge Grenzen setzen dürfte.

Es läßt sich zeigen, daß s unendlich viele Häufungspunkte hat, der zweitkleinste ist $s = \frac{4}{3}$.

Aufgabe:

Studium der Invariante s

Auffinden der sqh-Potenzreihen wenigstens für Gewichte w mit $\frac{7}{6} < s(w) \leq \frac{4}{3}$

Untersuchung der Moduli insbesondere in positiver Charakteristik, wenn $1 < s(w) \leq \frac{4}{3}$ ist, wobei im Fall der Dreiecksgewichte w mit $1 < s(w) \leq \frac{7}{6}$ nur noch die Ausnahmecharakteristiken $2, 3, 5, 7$ zu betrachten sind.