Algebraische Stacks

(M. Roczen, Vortragsmanuskript, Sept. 94)

Inhalt:

0. Vorbemerkung

Die Konstruktion „feiner“ Modulräume ist in der Kategorie der Schemata (analytischen Räume) im allgemeinen nicht möglich. Das Problem liegt gewöhnlich darin, einen Quotienten nach einer Gruppenaktion zu finden. Man hilft sich mit einem Quotienten im Sinne der geometrischen Invariantentheorie, der allerdings nur einen „groben“ Modulraum liefert. Die adäquate Begriffsbildung für das erstere Problem führt auf die Kategorie der Stacks (= „Stapel“, „Schober“, entsprechend den „Orbifolds“ in der Topologie). Diese Kategorie ist so konstruiert, daß sie die der Schemata als volle Unterkategorie enthält und geometrische Quotienten stets existieren, wobei die meisten vertrauten technischen Begriffe erhalten bleiben.

Der Begriff „Stack“ wurde offenbar zuerst 1965 durch Mumford ([15]) benutzt und dann einige Jahre später ([5]) auch definiert.

Standardreferenzen sind Deligne - Mumford [5], §4 (fast ohne Beweise), sowie Artin [1], vgl. auch Giraud [8] (sehr technisch).

Hier soll eine leicht verständliche, für die Anwendung des Begriffs brauchbare Einführung unter Verzicht auf beweistechnische Details gegeben werden.

1. Gefaserte Gruppoide

$\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ seien eine Kategorien, $P : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Dem Objekt $U \in \mathcal{C}$ ordnen wir $\mathcal{S}(U) := P^{-1}(U)$ zu. Wir nennen P (oder einfach $\mathcal{S}$) ein gefasertes Gruppoid über $\mathcal{C}$, falls:

(1) Für alle $\varphi : U \to V \in \ Fl(\mathcal{C})$ gilt: Für alle $y \in \mathcal{S}(V)$ existiert ein $f : x \to y \in Fl(\mathcal{S})$ mit $P(f) = \varphi$.

(2) für ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dashed, "h"'] & \\ & z \\ y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{S}$ bezeichne

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, dashed, "\chi"'] & \\ & W \\ V \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

das Bild in $\mathcal{C}$. Dann gilt: Für alle $\chi : U \to V$ mit $\varphi \ = \ \psi \cdot \chi$ existiert genau ein $h : x \to y$ mit $f \ = \ g \cdot h$ und $P(h) \ = \ \chi$.

Dann nach (ii) f in (i) eindeutig bestimmt (wir wählen $g = id$).

Die Sprechweise „Gruppoid[1]“ wird gerechtfertigt durch die offensichtliche

1.1. Bemerkung:

Wenn wir $\mathcal{S}(U) \ = \ P^{-1}(U)$ mit den Morphismen versehen, die auf U die Identität induzieren, so ist diese Kategorie ein Gruppoid.

Man sieht ebenso

1.2. Bemerkung / Definition:

Urbilder von Isomorphismen in $\mathcal{C}$ bezüglich P sind Isomorphismen.

[1] Ein Gruppoid ist eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind.

Weiter gilt: Unter den Voraussetzungen von (i) in 1.1. ist x (bis auf kanonische Isomorphie) eindeutig bestimmt. Wir schreiben $x := \varphi^* y$ („inverses Bild“). Das bedeutet insbesondere, daß $\mathcal{S} \to \mathcal{C}$ eine „gefaserte Kategorie“ ist, vgl. Abschnitt 3.

Wir setzen von nun an voraus, daß $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie der Kategorie der Schemata, bzw. der Kategorie der S-Schemata (S ein festes Schema) ist. Die technische Definition für ein „Stack“ ist etwas abschreckend. Wir geben zunächst (mit den im Folgenden eingeführten Begriffen) eine

1.3.(vorläufige) Definition:

$\mathcal{C}$ sei eine Kategorie mit einer Grothendieck-Topologie. $P : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ heißt Stack[2], falls für jede Überdeckung $U \to V$ in $\mathcal{C}$ gilt:

Die kanonische Abbildung $\mathcal{S}(V) \to Des(U|V)$ (= Kategorie der Abstiegsdaten von $U \to V$) ist eine Äquivalenz von Kategorien.

1.4. Beispiele

erhalten wir, wenn wir $\mathcal{C} = (Sch)$ als die Kategorie der Schemata, $\mathcal{S}$ als die Kategorie der (quasi-) kohärenten Garben, bzw. der Vektorbündel im üblichen Sinne (d.h. bezüglich der Zariski-Topologie) oder (wie später erläutert) bezüglich der Etaltopologie, der fppf-Topologie, bzw. der fpqc-Topologie auf (Sch) wählen.

2. Grothendieck-Topologien

Wir beginnen damit, am Beispiel der Zariski-Topologie eines Schemas die Problemstellung zu erläutern:

Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ eine Menge offener Teilmengen von X, so heißt $\mathcal{U}$ ein Sieb („crible“), falls aus $U \subseteq U_i$, U offen stets folgt $U \in \mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ heißt überdeckendes Sieb, falls $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$ ist.

Den Zusammenhang mit der „Čechschen Betrachtungsweise“ erhält man so:

Einer Familie $\{U_i\}$ offener Teilmengen von X ordnet man ein Sieb zu mittels

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq X \mid U \; offen, \; \exists i \; : \; U \subseteq U_i\}$$

Eine für offene $U \subseteq X$ definierte Eigenschaft $P(U)$ heiß lokal, falls für alle offenen $U \subseteq X$ und alle überdeckenden Siebe $\mathcal{U}$ von U gilt

$$P(U) \; \Leftrightarrow \forall \; V \in \mathcal{U} : P(V).$$

[2] Abweichend von unserer Begriffsbildung wird anstelle eines gefaserten Gruppoids gelegentlich nur eine „gefaserte Kategorie“ betrachtet. Dann ist zwischen Stacks und Stacks von Gruppoiden zu unterscheiden. Auf diese für uns unnötige Allgemeinheit wird hier verzichtet.

Ist z.B. $f : X \to I\!R$ eine Abbildung, so ist „Stetigkeit“ eine lokale Eigenschaft. Die „$\mathcal{U}$-lokale Beschreibung“ einer Funktion f ist die Angabe einer Familie $(f_V)_{V \in \mathcal{U}}$ mit $f_{V'} = f_V|V'$ für $V' \subseteq V,\ V' \in \mathcal{U}$.

2.1. Definition:

$\mathcal{U}$ sei ein überdeckendes Sieb auf X. Ein $\mathcal{U}$-lokal gegebenes Vektorbündel $F_{\mathcal{U}}$ auf X ist eine Familie $(F_U)_{U \in \mathcal{U}}$, F_U Vektorbündel auf U, zusammen mit Isomorphismen $\rho_{U,V} : F_V \to F_U|V$ für $V \subseteq U$, so daß für $W \subseteq V \subseteq U$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F_W \arrow[d, "\rho_{V,W}"'] \arrow[dr, "\rho_{U,W}"] & \\ F_V|W \arrow[r, "\rho_{U,V}|W"'] & F_U|W \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

2.2. Bemerkung:

Für jedes Vektorbündel F auf X betrachten wir die Familie $F_{\mathcal{U}} := (F|U)_{U \in \mathcal{U}}$. Dann ist

$$F \longrightarrow F_{\mathcal{U}}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Die vorstehenden trivialen Konstruktionen werden nun für die Kategorie der Schemata auf natürliche Weise verallgemeinert („treu-flacher Abstieg“).

2.3. Definition / Bemerkung:

(i) Ein Schemamorphismus heißt treuflach, wenn er flach und surjektiv ist. Für die induzierten Morphismen lokaler Ringe bedeutet das Treuflachheit im üblichen Sinne[3]

(ii) B sei treuflache A-Algebra, $M \in mod(A)$, so gilt: M ist von endlichem Typ (bzw. von endlicher Darstellung, flach, lokal frei von endlichem Rang, umkehrbar) genau dann, wenn $M \otimes_A B$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Sei nun X ein Schema, $\mathcal{E}$ eine Klasse von X-Schemata, die bezüglich Faserprodukten (über X) abgeschlossen ist.

2.4. Definition:

(i) $\mathcal{U}$ heißt Sieb (bez. $\mathcal{E}$), falls für alle X-Morphismen $V \to U$ mit $V \in \mathcal{E}$ gilt: $V \in \mathcal{U}$.

[3] Wir erinnern daran, daß insbesondere endliche, flache Ringhomomorphismen treuflach sind.

(ii) Sei (U_i) eine Familie aus $\mathcal{E}$. Das durch (U_i) erzeugte Sieb besteht aus allen $V \in \mathcal{E}$, so daß für ein i ein X-Morphismus $V \to U_i$ existiert.

Es ist auch klar, was ein Sieb über $X \in \mathcal{E}$ ist:
Das ist eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq Ob(\mathcal{E}|X)$, so daß für $(\varphi : V \to U) \in \mathcal{U}$ und $(\psi : W \to V) \in \mathcal{E}$ gilt: $(\varphi \cdot \psi : W \to U) \in \mathcal{U}$.

In naheliegender Verallgemeinerung sagen wir nun

2.5. Definition:

Eine quasikohärente $\mathcal{U}$-lokale Modulgarbe E auf X besteht aus

(i) einer Familie $(E_U)_{U \in \mathcal{U}}$ von quasikohärenten Garben auf den Schemata U,

sowie

(ii) Isomorphismen

$$\rho_\varphi \ : E_V \longrightarrow \ \varphi^* E_U$$

für alle X-Morphismen

$$\varphi : V \longrightarrow U \in \mathcal{E},$$

so daß

(iii)
$$\begin{tikzcd}
E_W \arrow[dr, "\rho_{\varphi\cdot\psi}"] \arrow[dd, "\rho_\psi"'] & \\
& \psi^*\varphi^*E_U \\
\psi^*E_V \arrow[ur, "\psi^*\rho_\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist für beliebige X-Morphismen $\psi : W \to V$ in $\mathcal{E}$.

Offensichtlich ordnet man über die inversen Bilder („Einschränkungen“) jeder quasikohärenten Modulgarbe E auf X eine $\mathcal{U}$-lokale quasikohörente Modulgarbe $E_{\mathcal{U}}$ zu.

2.6. Satz[4]:

(U_i) sei endliche Familie flacher X-Schemata in $\mathcal{E}$ und X die Vereinigung der Bilder der $U_i \to X$. Weiter bezeichne $\mathcal{U}$ das durch (U_i) erzeugte Sieb (bezüglich $\mathcal{E}$). Dann ist der Funktor $E \mapsto E_{\mathcal{U}}$ eine Äquivalenz der Kategorie der quasikohärenten Modulgarben über X und der $\mathcal{U}$-lokalen quasikohärenten Modulgarben über X.

[4]Dieser Satz ist nicht trivial. Er ist z.B. eine Verallgemeinerung von Hilbert's Satz 90: ist k' Galoiserweiterung des Körpers k mit Gruppe G, so ist $H^1(G, k'^*) = 0$, vgl. auch [4], I-8 f

Wir verallgemeinern den Begriff der „Topologie“ auf dem Schema X nun folgendermaßen:

2.7. Definition:

Eine Grothendieck - Topologie auf $\mathcal{E}$ besteht aus einer Familie $(Cov(U))_{U \in Ob(\mathcal{E})}$, wobei $Cov(U)$ eine Menge von Sieben („überdeckende Siebe“) bezeichnet, so daß folgende Axiome erfüllt sind:

(i) Das durch die Identität id_U erzeugte Sieb liegt in $Cov(\mathcal{U})$.

(ii) $\mathcal{U} \in Cov(U), \ \varphi : V \to U \in Fl(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{U}_V \in Cov(V)$ (dabei ist $\mathcal{U}_V$ die „Einschränkung von $\mathcal{U}$ auf V“, gegeben durch alle $\psi : W \to V$ mit $(\varphi \cdot \psi : W \to U) \in \mathcal{U}$). Das besagt: „Einschränkungen überdeckender Siebe sind überdeckend“.

(iii) Sei $\mathcal{U} \in Cov(U)$ und $\mathcal{U}'$ ein Sieb über U, so daß für alle $(V \to U) \in \mathcal{U}$ gilt $\mathcal{U}'_V \in Cov(V)$, dann gilt: $\mathcal{U}' \in Cov(V)$ (d.h. „lokal überdeckende Siebe sind überdeckend“).

Eine Kategorie $\mathcal{E}$ mit einer Grothendiecktopologie $(Cov(U))_{U \in Ob(\mathcal{E})}$ heißt auch Situs.

2.8. Beispiele:

X sei ein Schema.

(0) Die Zariski - Topologie auf X bildet (offensichtlich) ein Situs.

(1) $\mathcal{E} = X_{et}$ sei das Situs aller Etalmorphismen $U \to X$: Ist $\mathcal{U}$ ein Sieb über U, so definieren wir $\mathcal{U} \in Cov(U)$, falls $\mathcal{U}$ erzeugt wird durch eine endliche Familie $(U_i \to U)$ in X_{et}, für die $\coprod U_i \to U$ surjektiv ist („Etaltopologie auf X“).

(2) $\mathcal{E} = X_{fpqc}$ sei das Situs aller treuflachen, quasikompakten Morphismen[5] $U \to X$: Ist $\mathcal{U}$ ein Sieb über U, so definieren wir $\mathcal{U} \in Cov(U)$, falls $\mathcal{U}$ erzeugt wird durch eine endliche Familie flacher Morphismen $(V_i \to U)$ in X_{fpqc}, für die $\coprod U_i \to U$ surjektiv ist.

(3) Die durch die treuflachen Morphismen von endlicher Darstellung gegebene fppf-Topologie[6] auf X, wie zuvor.

Rückblickend auf Grothendiecks Satz 2.6. geben wir nun die

2.9. Definition:

[5] fpqc = „fidelement plat et quasi compact“

[6] fppf = „fidelement plat et de presentation fini“

(i) Eine Prägarbe auf dem Situs $\mathcal{E}$ ist ein kontravarianter Funktor

$$F : \mathcal{E} \to (Ens).$$

(ii) Eine Prägarbe F auf $\mathcal{E}$ heißt Garbe, falls für alle $U \in \mathcal{E}$ und für jedes überdeckende Sieb $\mathcal{U} \in Cov(U)$ gilt:

$$F(U) \to \prod_{U_i \in \mathcal{U}} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{U_i, U_j \in \mathcal{U}} F(U_i \times_U U_j)$$

ist exakt[7].

Für technische Details (zu einer Prägarbe assoziierte Garbe, Tensorprodukte, Summen) vgl. etwa [2], ch. 2., [16]. Der Funktor der (sinngemäß definierten) „globalen Schnitte" ist linksexakt. Die Kategorie der Garben abelscher Gruppen hat in der Etaltopologie genügend viele Injektive. Über abgeleitete Funktoren des Funktors der „globalen Schnitte" erhalten wir die „Etalkohomologie" einer Garbe (vgl. loc. cit.).

3. Abstieg

Im allgemeinen stellt sich die Frage, ob eine Garbe auf einem Schema auch Garbe in einer gegebenen Grothendiecktopologie ist. Dafür brauchen wir die „théorie de descente".

Gegeben sei ein Funktor $P : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$. $\mathcal{S}$ heißt gefaserte Kategorie über $\mathcal{C}$, falls „ein inverses Bild existiert", d.h. für einen beliebigen Morphismus $f : S' \to S$ in $\mathcal{C}$ und für $E \in P^{-1}(S)$ ist ein wohlbestimmtes $E' := f^*E \in P^{-1}(S')$ gegeben, und es gilt $(f \cdot g)^* = g^* \cdot f^*$, soweit definiert[8].

Wir setzen in $\mathcal{C}$ stets die Existenz von Faserprodukten voraus.

3.1. Beispiel:

$\mathcal{C} = (Sch)$, $\mathcal{S} =$ Kategorie der Etalüberlagerungen; für $(\varphi : E \to S) \in Ob(\mathcal{S})$ wird $P(\varphi) := S$ und für $f : S' \to S \in Fl(\mathcal{C})$ wird $f^*E := E \times_S S'$ gesetzt.

Allgemein stellt sich das folgende

[7] Das läßt sich auch so sagen: Eine Prägarbe F ist Garbe, falls für jedes überdeckende Sieb $\mathcal{U}$ von U und jeden $\mathcal{U}$-lokalen Schnitt $(s_V)_{V \in \mathcal{U}}$ genau ein $s \in F(U)$ existiert mit $s|V = s_V$ für alle $(V \to U) \in \mathcal{U}$ („Abstiegseigenschaft").

[8] Genauer ist f^* als Funktor zu erklären; statt Gleichheit steht dann ein Isomorphismus von Funktoren (Einzelheiten z.B. in [13], 1.6 und in [9], Exp. 190, A).

3.2. Abstiegsproblem:

Gegeben sei ein Morphismus $f : U \to S$ in $\mathcal{C}$ und ein Objekt $E_U \in P^{-1}(U)$. Existiert ein $E \in P^{-1}(S)$ mit $E_U \cong f^*E$?

Eine notwendige Bedingung erhält man so: Mit $U^{(n)}$ bezeichnen wir stets das n-fache Faserprodukt von U über S; sei $p_i : U^{(2)} \to U$ die Projektion auf den i-ten Faktor, $p_{ij} : U^{(3)} \to U^{(2)}$ die Projektion auf deen (i, j)-ten Faktor, $d : U \to U^{(2)}$ die Diagonale. Dann impliziert die Existenz eines E (wie oben) eine sogenannte

3.3. Abstiegsvorschrift (Abstiegsdatum):

auf E_U bezüglich f. Dies ist ein $U^{(2)}$-Isomorphismus $\eta : p_1^*E_U \xrightarrow{\sim} p_2^*E_U$ mit

(i) $d^*(\eta) = id_{E_U}$

(ii) $p_{13}^*(\eta) = p_{32}^*(\eta) \cdot p_{21}^*(\eta)$ („Kozyklus - Bedingung“).

3.4. Definition:

Gegeben sei $f : U \to S$ (wie oben).

(i) f heißt Abstiegsmorphismus, falls für alle $E_1,\ E_2 \in P^{-1}(S)$ gilt:

$$Hom(E_1, E_2) \to Hom_U(f^*E_1, f^*E_2) \rightrightarrows Hom_{U^{(2)}}(g^*E_1, g^*E_2)$$

exakt ist, wobei g den Morphismus $g := f \cdot p_1 = f \cdot p_2$ bezeichnet.

(ii) f heißt strenger Abstiegsmorphismus, falls zu jeder Abstiegsvorschrift auf E_U bezüglich f ein $E \in P^{-1}(S)$ und ein Isomorphismus $E_U \xrightarrow{\sim} f^*E$ existieren, durch die diese induziert wird.

Die Bedingung besagt, daß ein E mit $E_U \cong f^*E$ eindeutig bestimmt ist. Es gelten z.B. die folgenden Sätze (cf. Grothendieck [9], Exp. 190):

3.5. Satz:

Die fpqc-Morphismen in (Sch) sind Abstiegsmorphismen bezüglich

$$Fl(Sch) \longrightarrow (Sch)$$

(„Projektion auf das Ziel“)[9]

3.6. Satz:

Die fpqc-Morphismen in (Sch) sind strenge Abstiegsmorphismen bezüglich $P : \mathcal{S} \to (Sch)$, wobei $\mathcal{S}$ die Kategorie der quasikohärenten Garben über (Sch) bezeichnet, P die Projektion auf das Basisschema.

[9]Um strenge Abstiegsmorphismen zu erhalten, kann man etwa die volle Unterkategorie der affinen Morphismen in $Fl(Sch)$ wählen, insbesondere auch die der Etalüberlagerungen, [13],1.6.3)

4. Definition algebraischer Stacks

Wir fixieren ein Schema S und die Kategorie $\mathcal{C} = ((Sch)|S)$. Wir betrachten gefaserte Gruppoide $P : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$.

4.1. Bemerkung:

$\mathcal{S} : \mathcal{C} \to (Ens)$ sei ein kontravarianter Funktor. Dann definiert $\mathcal{S}$ ein Gruppoid $P : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ mittels

$$Ob(\mathcal{S}) := \{(X, \xi) \mid X \in Ob(\mathcal{C}),\ \xi \in \mathcal{S}(X)\}$$

$$Fl(\mathcal{S}) := \{\varphi : (X, \xi) \to (Y, \eta) \mid (\varphi : X \to Y) \in Fl(\mathcal{C}),\ P(\varphi)(\eta) = \xi\}.$$

4.2. Beispiele für gefaserte Gruppoide:

(i) $X \in \mathcal{C}$, so definiert $Hom_S(-, X)$ nach 4.1. ein Gruppoid über $\mathcal{C}$ (als Kategorie ist dies gerade $P : ((Sch)|X) \to \mathcal{C}$, wobei P die Komposition mit dem Strukturmorphismus ist; wir identifizieren P mit X).

(ii) M_g bezeichne das Gruppoid der glatten Kurven vom Geschlecht g. Objekte sind glatte, eigentliche Schemamorphismen $\varphi : C \to T$, die als geometrische Fasern zusammenhängende Kurven vom Geschlecht g haben. Morphismen sind kartesische Diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & T'. \end{array}$$

(iii) Das Gruppoid $Bund_r(X)$ der Vektorbündel vom Rang r auf X $(X \in \mathcal{C})$: Objekte sind Paare (E, T), $T \in \mathcal{C}$, E ein Vektorbündel vom Rang r auf $X \times_S T$. Morphismen $(E, T) \to (E', T')$ sind Schemamorphismen $f : T \to T'$, zusammen mit einem Isomorphismus $E \xrightarrow{\sim} (Id_X \times f)^*(E')$.

Wir fixieren nun die Etaltopologie auf $\mathcal{C}$. Bei Bedarf[10] wird gewöhnlich nur der Fall betrachtet, daß S von endlichem Typ über einem Körper oder einem exzellenten Dedekindring ist.

Die durch Abschnitt 3. motivierte technische Fassung der Definition 1.3. lautet:

4.3. Definition:

Der Funktor $P : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ ist ein Stack, falls P ein gefasertes Gruppoid[11] ist, zusammen mit einer Grothendiecktopologie auf $\mathcal{C}$, so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

[10] Anwendung von Artin's Approximationsprinzipien

[11] vgl. (1), (2) aus 1.

(3) Für alle $X \in Ob(\mathcal{C})$ und alle $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{S}(X) = P^{-1}(X)$ ist

$$\begin{aligned} Isom_X(\xi_1, \xi_2) : ((Sch)|X) &\longrightarrow (Ens) \\ (f : Y \to X) &\mapsto \{Isomorphismen\ f^*\xi_1 \xrightarrow{\sim} f^*\xi_2\} \end{aligned}$$

eine Etalgarbe[12].

(4) Sei $(X_i \to X) \in Cov(X),\ X \in \mathcal{C}$ und $\xi_i \in \mathcal{S}(X_i)$, und seien

$$\varphi_{ij} : \xi_j|_{X_i \times_X X_j} \xrightarrow{\sim} \xi_i|_{X_i \times_X X_j}$$

Isomorphismen, die der Kozyklus - Bedingung genügen. Dann existiert ein $\xi \in \mathcal{S}(X)$ und es gibt Isomorphismen $\psi_i : \xi|_{X_i} \xrightarrow{\sim} \xi_i$ mit

$$\varphi_{ij} = (\psi_i|_{X_i \times_X X_j}) \cdot (\psi_j|_{X_i \times_X X_j})^{-1}$$

Insbesondere erhalten wir also: Ein kontravarianter Funktor $\mathcal{S} : ((Sch)|S) \to (Ens)$ ist genau dann ein Stack, wenn er eine Etalgarbe ist.

Die üblichen Begriffe „Morphismus", „Faserprodukt" lassen sich leicht für Stacks erklären:

4.4. Definition:

(i) $\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2$ seien Stacks über $\mathcal{C}$, d.h. gegeben seien $P_1 : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{C}$, $P_2 : \mathcal{S}_2 \to \mathcal{C}$. Ein Morphismus f von $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ ist ein Funktor $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ mit $P_2 \cdot f = P_1$.

(ii) f ist Äquivalenz von Kategorien genau dann, wenn f einen inversen Morphismus besitzt; f heißt dann Isomorphismus.

(iii) $f_1 : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}',\ f_2 : \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}'$ seien Morphismen von Stacks. Das Faserprodukt $\mathcal{S}_1 \times_{\mathcal{S}'} \mathcal{S}_2$ ist die folgende Kategorie: $Ob(\mathcal{S}_1 \times_{\mathcal{S}'} \mathcal{S}_2) := \{(\xi_1, \xi_2, \alpha)|\ \xi_i \in Ob(\mathcal{S}_i),\ P_1(\xi_1) = P_2(\xi_2),\ \alpha : f_1(\xi_1) \to f_2(\xi_2) \in Fl(\mathcal{S}'),\ P'(\alpha) = id\}$ ($P_i,\ P'$ die Projektionen auf $\mathcal{C}$)[13].

Morphismen sind auf naheliegende Weise zu definieren.

Es gilt auch in dieser Situation ein

4.5. Lemma von Yoneda:

Wird dem Stack $\mathcal{S}$ über $\mathcal{C} = ((Sch)|S)$ der Funktor

$$u : \ Hom(X, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{S}(X)$$

[12] Isomorphismen aus der Kategorie $\mathcal{S}(X)$, d.h. so, daß auf X die Identität induziert wird

[13] α soll also nicht notwendig die Identität sein, vgl. auch die Fußnote zu 4.5.

des Gruppoids $Hom(X, \mathcal{S})$ in das Gruppoid $\mathcal{S}(X)$ mit

$$(f : ((Sch)|X) \to \mathcal{S}) \;\mapsto\; u(f) \;:=\; f(id_X)$$

zugeordnet, so ist u eine Äquivalenz von Kategorien[14].

4.6. Definition:

$f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ sei Morphismus von Stacks. f heißt darstellbar, wenn für alle $Y \in ((Sch)|S)$ gilt:
Für alle Morphismen $Y \to \mathcal{S}_2$ ist $\mathcal{S}_1 \times_{\mathcal{S}_2} Y$ ein Schema (bezüglich der Yoneda-Einbettung).

Es gilt z.B.

4.7. Satz:
$\mathcal{S}$ sei ein Stack. Dann ist die Diagonale $\Delta : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ darstellbar genau dann, wenn jeder Morphismus $X \to \mathcal{S}$ für $X \in \mathcal{C}$ darstellbar ist.

Der zentrale Begriff ist nun die folgende Verschärfung von 4.3.

4.8. Definition:

Ein Stack $\mathcal{S}$ ist algebraisch, falls

(5) die Diagonale $\Delta : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ darstellbar, quasikompakt und separiert ist[15],

sowie

(6) ein Schema U und ein surjektiver Etalmorphismus $U \to \mathcal{S}$ („Atlas für $\mathcal{S}$“) existiert[16].

In den Beispielen (vgl. 4.2.) ist das Stack M_g für $g \geq 2$ algebraisch[17], während $Bund_r(X)$ nicht algebraisch ist[18].

4.9. Bemerkung:

Eigenschaften algebraischer Stacks werden nun über ihre Atlanten definiert[19], z.B.

---

[14] Ein S-Schema X wird wieder mit dem Funktor $Hom_S(-, X)$ identifiziert. Wir bemerken, daß die Menge $Hom(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ der Morphismen des Stacks $\mathcal{S}_1$ in das Stack $\mathcal{S}_2$ selbst eine Kategorie ist (sogar ein Gruppoid). Eine Präzisierung erfordert den Begriff der 2-Kategorie (vgl. [10], ch. 1). Das Analogon des Yoneda-Lemmas in diesem allgemeinen Sinn ist dann eine Aussage über die Einbettung einer beliebigen 2-Kategorie $\mathcal{K}$ in die 2-Kategorie aller 2-Funktoren von $\mathcal{K}$ in die „Kategorie aller Kategorien“.

[15] wegen der Darstellbarkeit über die entsprechenden Eigenschaften der Schemamorphismen zu definieren

[16] d.h. für alle Morphismen $Y \to \mathcal{S}$, so daß Y ein Schema ist, sind die Morphismen $U \times_{\mathcal{S}} Y \to Y$ surjektive Etalmorphismen in der Kategorie der Schemata.

[17] nach Deligne - Mumford [5]

[18] Vektorbündel $\neq 0$ haben unendliche Automorphismengruppen

[19] Man hat solche Eigenschaften zu wählen, die in der Etaltopologie stabil sind.

(i) Ein algebraisches Stack heißt $\mathcal{S}$ heißt (lokal) noethersch, falls ein Atlas $U \to \mathcal{S}$ existiert, für den U (lokal) noethersches Schema ist.

(ii) $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ sei Morphismus algebraischer Stacks. Dann heißt f von endlichem Typ (bzw. endlich), falls ein Atlas $h : U \to \mathcal{S}_1$ existiert, so daß $f \cdot h : U \to \mathcal{S}_2$ von endlichem Typ (bzw. endlich) ist.

Ein wichtiger Unterschied zur Kategorie der Schemata sind Separiertheitsbedingungen.

4.10. Definition:

Ein algebraisches Stack $\mathcal{S}$ heißt separiert, falls die Diagonale $\mathcal{S} \to \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ endlich ist.

Wir beschränken uns meist auf Stacks, die lokal noethersch und separiert sind.

Garben über $\mathcal{S}$ erklären wir lokal bezüglich ihrer Atlanten, genauer:

4.11. Definition:

Sei $\mathcal{S}$ ein algebraisches Stack, $\mathcal{U}$ bezeichne die Familie der Atlanten von $\mathcal{S}$.

Eine Garbe auf $\mathcal{S}$ ist eine Familie $(E_U)_{U \in \mathcal{U}}$ von Mengen, versehen mit Abbildungen $\rho_\varphi : E_V \xrightarrow{\sim} \varphi^* E_U$ für $\mathcal{S}$-Morphismen $\varphi : V \to U$, wobei U, V Atlanten von $\mathcal{S}$ sind, so daß die Verträglichkeitsbedingung 2.5. erfüllt ist.

$(E_U)_{U \in \mathcal{U}}$ heißt quasikohärente Garbe (kohärente Garbe, Vektorbündel), falls alle E_U quasikohärente Garben (kohärente Garben, Vektorbündel) sind.

Damit erhalten wir vertraute Begriffe: So hat z.B: ein algebraisches Stack $\mathcal{S}$ als Strukturgarbe die Garbe $\mathcal{O}_\mathcal{S} := (\mathcal{O}_U)_{U \in \mathcal{U}}$. Die Garbe der Differentialformen auf $\mathcal{S}$ ist durch $\Omega_{\mathcal{S}|S} := (\Omega_{U|S})_{U \in \mathcal{U}}$ erklärt[20].

Das Problem der Konstruktion von Quotienten nach einer „kategorialen Äquivalenzrelation“ in der Kategorie der Schemata wurde z.B. durch Grothendieck ([9], Exp. 212) untersucht. Ein algebraisches Stack ist gewissermaßen die Antwort auf die Frage nach der Existenz solcher Quotienten unter „vernünftigen“ Voraussetzungen.

Für die Formulierung des Folgenden müssen wir zunächst die Definition des Gruppoids (vgl. Fußnote zu 1.1.) erweitern:

R, U seien Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein Gruppoid in $\mathcal{C}$ ist ein Tripel (s, t, μ) von Morphismen

$$s, t : \ R \longrightarrow U, \qquad \mu : R \times_U R \longrightarrow R$$

(letzteres Produkt über s, t gebildet), so daß die nachfolgend erläuterten Axiome (G) erfüllt sind.

Wir betrachten zunächst einmal zwei Mengen R, U. Das Paar (U, R) erhält die Struktur einer Kategorie $\mathcal{K}$ durch Abbildungen $s, t : \ R \to U$ mit $s(A \to B) = B$

[20]Diese Definition ist sinnvoll, da für einen Morphismus $\varphi : V \to U$ von Atlanten über $\mathcal{S}$ stets φ etal ist, also einen kanonischen Isomorphismus $\Omega_{V|S} \xrightarrow{\sim} \varphi^* \Omega_{U|S}$ induziert.

(Projektion auf das Ziel), $t(A \to B) = A$ (Projektion auf die Quelle)[21] und $\mu : R \times_U R \to R$ (Komposition von Morphismen), für die die üblichen Axiome einer Kategorie erfüllt sind, die nun auch mittels kommutativer Diagramme in diesen Abbildungen formuliert werden können, z.B. mit einem geeigneten Diagramm

$$\begin{tikzcd}
R \times_U R \times_U R \arrow[r] \arrow[d] & R \times_U R \arrow[d, "\mu"'] \\
R \times_U R \arrow[r, "\mu"] & R
\end{tikzcd}$$

für die Assoziativität der Komposition, usw. Dabei muß auch die Existenz einer[22] Abbildung $D : U \longrightarrow R$ (Identitäten der Objekte) gefordert werden.

Die Eigenschaft von $\mathcal{K}$, Gruppoid (im bisherigen Sinne) zu sein, bedeutet dann: Es gibt eine[23] Abbildung $i : R \to R$, die jedem Morphismus seinen inversen zuordnet, und so daß

$$s \cdot i = t, \quad t \cdot i = s$$

ist, und für die die auf naheliegende Art gebildeten beiden Diagramme des Typs

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d] & R \times_U R \arrow[d, "\mu"'] \\
U \arrow[r, "D"] & R
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

Die damit gefundene Liste von Axiomen nennen wir (G).

Offensichtlich gilt: Ist in $\mathcal{C}$ auf obige Weise ein Gruppoid (U, R, s, t, μ) gegeben, so wird dadurch für alle $T \in \mathcal{C}$ auf den Paaren $(Hom(T, U), Hom(T, R))$ die Struktur einer Kategorie definiert; diese ist Gruppoid im bisherigen Sinne.

Im Sinne der Konstruktion von Moduli zweckmäßig ist nun die folgende

4.12. Beschreibung algebraischer Stacks:

[21]Hierbei ist $A \to B$ nichts weiter als die Bezeichnung für ein Element der Menge R.

[22]automatisch eindeutigen

[23]auch eindeutig bestimmte

Ein algebraisches Stack $\mathcal{S}$ ist gegeben durch ein Paar U, R von S-Schemata und S-Morphismen $s, t : R \to U$, sowie $\mu : R \times_U R \to R$ von dem mittels $s,\ t$ gebildeten Faserprodukt über U nach R, so daß

(i) $s,\ t$ etaliert, $(s,t) : R \to U \times_S U$ endlich, sowie

(ii) $s,\ t,\ \mu$ bilden ein Gruppoid in der Kategorie der S-Schemata.

$\mathcal{S}$ ist Stack[24] mit $\mathcal{S}(X) = (Hom(X,U), Hom(X,R), \ldots)$ als „Faser" in $X \in \mathcal{C}$. Wir sagen auch, $\mathcal{S}$ wird durch (U, R, s, t, μ) dargestellt und schreiben $\mathcal{S} := [U/R]$.

In Analogie zum Satz 2.6. gilt

4.13. Satz:

Die Kategorie der quasikohärenten Garben auf dem durch 4.12. beschriebenen Stack ist äquivalent zur Kategorie der Paare von kohärenten Garben E auf U, versehen mit Isomorphismen $s^*E \xrightarrow{\sim} t^*E$, die der Kozyklusbedingung genügen.

Zur Motivierung der Definition 4.12. erinnern wir an den Begriff der kategorialen Äquivalenzrelation:

Ein Paar $R \rightrightarrows U$ von Morphismen in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Äquivalenzrelation, falls für alle $T \in \mathcal{C}$ gilt: $Hom(T,R) \rightrightarrows Hom(T,U)$ ist Äquivalenzrelation in (Ens), d.h. die Abbildungen induzieren eine Äquivalenzrelation in der Menge $Hom(T,U)$.

Ein kategorialer Quotient ist ein Objekt $X = coker(R \rightrightarrows U)$ in $\mathcal{C}$; die Äquivalenzrelation heißt effektiv, falls dieser Quotient existiert und $R \cong U \times_X U$ ist. Sind die Morphismen $R \rightrightarrows U$ Etalmorphismen, so sprechen wir von einer Etaläquivalenzrelation.

Wir sehen also insbesondere, daß die Bedingung (ii) in 4.12. impliziert: $(s,\ t)$ bilden eine Etaläquivalenzrelation. Um zu verdeutlichen, was dies für $S = Spec\,\mathbb{C}$ heißt, zitieren wir ([11], 5.18)

4.14. Satz:

$R \rightrightarrows U$ sei Etaläquivalenzrelation in der Kategorie der Schemata lokal von endlichem Typ über $\mathbb{C}$, so daß $R \to U \times U$ eine Einbettung ist. Dann ist die induzierte Äquivalenzrelation $R^h \to U^h \times U^h$ in der Kategorie der analytischen Räume effektiv.

Einem Stack (wie in 4.12.) läßt sich folgendermaßen ein „grober Modulraum" zuordnen (vgl. [6]):

Zunächst nennen wir ein Stack $\mathcal{S}$ (separierten) algebraischen Raum, falls $(s,t) : R \to U \times_S U$ eine abgeschlossene Einbettung ist (dies ist unabhängig von der Wahl von (U, R, s, t, μ)).

Es gilt

4.15. Satz:

$\mathcal{S} := [U/R]$ sei noethersches algebraisches Stack, so existiert ein algebraischer Raum $\mathcal{M}$, sowie ein Morphismus $\mathcal{S} \to \mathcal{M}$ mit

[24] Einzelheiten der Zuordnung wie in [8], vgl. [17]

(i) $\mathcal{M}(k) = \mathcal{S}(k) = U(k)/R(k)$ (Quotient bezüglich der induzierten Äquivalenzrelation) für alle algebraisch abgeschlossenen Körper k;

(ii) $\mathcal{S} \to \mathcal{M}'$ sei Morphismus in einen algebraischen Raum $\mathcal{M}'$, so faktorisiert dieser eindeutig über $\mathcal{S} \to \mathcal{M}$.

Literatur

[1] Artin, M., Versal Deformations and Algebraic Stacks, Inventiones math. 27 (1974), 165 - 189

[2] Artin, M., Grothendieck Topologies, Mimeographed Notes, Harvard 1962

[3] Artin, M., Lascu, A., Boutot, J. F., Théorèmes de représenatabilité pour les espaces algebriques, SMS Montreal, 1970

[4] Deligne, P., SGA 4 1/2, Seminaire de Géométrie Algébrique du Bois - Marie, Springer Lecture Notes 569 (1977)

[5] Deligne, P., Mumford, D., The Irreducibility of the Space of Curves of given Genus, Publ. Math. IHES No 36 (1996), 75 - 109

[6] Faltings, G., Chai, Ch. L., Degeneration of Abelian Varieties, Springer Ergebnisse der Mathematik, 1990

[7] Fitzner, H. J., Kleinert, W., Kurke, H., Pfister, G., Roczen, M., Zink, Th., Modulprobleme in der algebraischen Geometrie III, Beitr. Algebra u. Geom. 7 (1978), 91 - 144

[8] Giraud, J., Cohomologie non abélienne, Springer Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179 (1971)

[9] Grothendieck, A., Fondaments de la géométrie Algébrique, Extr. du Sèm. Bourbaki 1957 - 1962

[10] Hakim, M., Topos anneles et schemas relatifs, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 64, Springer, 1972

[11] Knutson, D., Algebraic Spaces, Springer Lecture Notes in Mathematics 203 (1970)

[12] Kurke, H., Etalkohomologie, Vorlesungsskripte, HUB, Herbstsemester 1968 / 1969

[13] Kurke, H., Pfister, G., Roczen, M., Henselsche Ringe, DVW, Berlin 1975

[14] Milne, J. S., Etale Cohomology, Princeton University Press 1980

[15] Mumford, D., Picard Groups of Moduli Problems, in Schilling, O. F. G. (Herausg.), Arithmetical Algebraic Geometry, New York (1965), 33 - 81

[16] Tamme, G., Introduction to Etale Cohomology, Springer Universitext, 1994

[17] Vistoli, A., Intersection Theory on Algebraic Stacks and on their Moduli Spaces, Inventiones math. 97 (1989), 613 - 670