Mathematik für Informatiker I: Analysis

Aufgabenserie 2 zum 5.11.02

1. Beweisen Sie, dass die folgende Aussagenverbindung eine Identität ist, d.h. für beliebige Wahrheitswerte der Grundaussagen A, B den Wahrheitswert W annimmt:

   $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ („Kontraposition“)

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für natürliche Zahlen $n \geq 1$ die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

   (1) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

   (2) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Geben Sie alle Abbildungen $f : \{0,1\} \to \{0,1,2\}$ durch ihre Wertetafeln an. Welche dieser Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

4. M sei eine geordnete Menge.

   (1) Ist $x \in M$ obere Schranke für M, so ist x durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt und maximales Element in M.

   (2) Ist M vollständig geordnet, so ist ein maximales Element stets obere Schranke für M.

5.* Addition und natürliche Ordnung der Menge $\mathbb{N}$:
Wir erinnern zunächst an die Definitionen. $0 := \emptyset \in \mathbb{N}$, und für $n \in \mathbb{N}$ wird $n+1$ durch $n+1 := n \cup \{n\}$ definiert; so wird (entsprechend dem Induktionsaxiom) die gesamte Menge $\mathbb{N}$ erhalten. Weiter wird vereinbart:

   a) $n + k := n$ für $k = 0$ sowie $n + (k+1) := (n+k) + 1$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$ (*Addition auf* $\mathbb{N}$).

   b) $n < m$ falls $n \in m$ (*natürliche Ordnung auf* $\mathbb{N}$).

   Beweisen Sie für beliebige $m, n, k \in \mathbb{N}$:

   (1) $m = \{x \in \mathbb{N} \mid x < m\}$ (Hinweis: Definition)

   (2) $m < n \Rightarrow (m + 1 < n \quad \vee \quad m + 1 = n)$

   (3) $m < n \Rightarrow m + 1 < n + 1$

   (4) $m < n \Rightarrow m + k < n + k$ (Hinweis: vollständige Induktion)