Mathematik für Informatiker I: Analysis

Aufgabenserie 3 zum 12.11.02

1. Für die Mengen M, N bezeichne M^N die Menge aller Abbildungen von N in M.
   (1) Bestimmen Sie die Mengen $\emptyset^M$ und $M^\emptyset$.
   (2) Wieviele Elemente enthält M^N, wenn M und N endlich sind?

2. Beweisen Sie folgende Behauptungen:
   (1) Die in $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ definierte Relation $(a, b) \sim (c, d) \iff a{\cdot}d = b{\cdot}c$ ist eine Äquivalenzrelation.
   (2) Die Vorschriften $(a, b) +_q (c, d) := (a{\cdot}d + b{\cdot}c, b{\cdot}d)$ und $(a, b) \cdot_q (c, d) := (a{\cdot}c, b{\cdot}d)$ sind auf den Klassen der obigen Relation wohldefiniert, d.h. die Klasse der rechten Seite ist jeweils unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der auf der linken Seite auftretenden Paare.

3. Stellen Sie in jedem der folgenden Fälle fest, für welche Zahlen $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ die angegebene Bedingung erfüllt ist.
   (1) $n^2 + 3n + 7 < (n + 1)^2$
   (2) $(1 + \frac{1}{n})^n > 2$
   (3) $n! < (\frac{n}{2})^n$

4. Beweisen Sie:
   (1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ für $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
   (2) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} \leq \frac{1}{12}$
   (Hinweis: technische Hilfsmittel sind hier nicht zugelassen).

5.* Geben Sie jeweils eine nichtleere Menge A und eine Relation $R \subseteq A \times A$ mit den folgenden Eigenschaften an:
   (1) R ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv,
   (2) R symmetrisch, nicht reflexiv und nicht transitiv,
   (3) R ist reflexiv, transitiv und nicht symmetrisch,
   (4) R ist irreflexiv, antisymmetrisch und transitiv,
   (5) R ist reflexiv, transitiv und nicht antisymmetrisch.