Prüfungsvorbereitung[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Klausur, Sommersemester 2009

Beweisen Sie: Ist $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_n)$ eine Basis des Standardraumes K^n und sind die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ Eigenvektoren sowohl der Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$ als auch der Matrix $B \in \mathrm{M}(n; K)$, dann gilt $A \cdot B = B \cdot A$.

$A \in \mathrm{M}(n; \mathbb{R})$ sei eine Matrix und $\lambda \geq 0$ Eigenwert der Matrix A^2. Beweisen Sie, dass dann eine der Zahlen $\sqrt{\lambda}$ oder $-\sqrt{\lambda}$ Eigenwert von A ist.

Zeigen Sie: $A \in \mathrm{M}(n; K)$ ist genau dann regulär, wenn 0 kein Eigenwert der Matrix A ist.

$\varphi : V \to V$ sei Endomorphismus des K-Vektorraumes V und $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:

(1) Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von φ, so ist λ^k ein Eigenwert des Endomorphismus φ^k.

(2) Ist $\boldsymbol{x} \in V$ Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ, so ist $\boldsymbol{x}$ auch Eigenvektor von φ^k zum Eigenwert λ^k.

Wir betrachten die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(1) Ist $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$, so ist A halbeinfach.

(2) Für $(a-d)^2 + 4bc = 0$ existieren sowohl Matrizen A, die halbeinfach sind als auch solche, für die das nicht zutrifft.

Wir betrachten die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(1) Ist $(a-d)^2 + 4bc > 0$, so ist A diagonalisierbar.

(2) Ist $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$, so ist A halbeinfach.

$A \in \mathrm{M}(n; \mathbb{C})$ sei eine komplexe Matrix. Beweisen Sie:

Ist $\mathrm{rang}(A) = 1$, so gilt: Der einzige eventuell von 0 verschiedene Eigenwert der Matrix A ist die Spur $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

$A \in \mathrm{M}(n; \mathbb{C})$ sei eine komplexe Matrix. Beweisen Sie:

Falls A den Rang r hat, so besitzt A höchstens r von 0 verschiedene Eigenwerte (die mit der jeweiligen algebraischen Multiplizität gezählt werden).

A sei eine quadratische Matrix über $\mathbb{C}$. Beweisen Sie: Die Eigenwerte der Matrix A^2 sind genau die Quadrate der Eigenwerte von A.

---

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.61, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm