SEMINARBERICHT 94-1
134 pages
MARTIN WEESE: Seminar zur Mengenlehre
Abstract: In diesem Seminarbericht werden ausgewählte Kapitel der Mengenlehre behandelt. Ziel ist dabei, dem Leser einige der grundlegenden Techniken zu vermitteln, die häufig bei der Anwendung der Mengenlehre benötigt werden. Im Mittelpunkt steht dabei Martin's Axiom. In einem einführenden Teil, der relativ knapp gehalten ist, wird ein axiomatischer Aufbau der Mengenlehre vorgestellt. Speziell wird dabei auf die transfinite Induktion sowie den Gebrauch von Klassen eingegangen. Es folgen grundlegende Eigenschaften der Ordinal- und Kardinalzahlen. Damit ist der einführende Teil abgeschlossen. In Kapitel 13 werden abgeschlossen-unbeschränkte und stationäre Mengen betrachtet. Im folgenden Kapitel werden verschiedene Klassen von Bäumen betrachtet, unter anderem auch die Souslin-Bäume. Es folgt ein Kapitel über Ramsey's Theorem sowie seine Verallgemeinerungen auf überabzählbare Kardinalzahlen. Die Betrachtungen werden in dem anschließenden Kapitel über die Baum-Eigenschaft fortgeführt. Es folgen in Kapitel 17 einige Aussagen, die sich mit Hilfe der Kontinuum-Hypothese zeigen lassen. Die beiden folgenden Kapitel zeigen an einigen Beispielen, welche Probleme sich aus dem Verzicht auf das Auswahlaxiom beim Aufbau der Mengenlehre ergeben. Es wird das Determiniertheitsaxiom betrachtet, das eine mögliche Alternative zum Auswahlaxiom darstellt. Das folgende Kapitel 20 zeigt an einem ausgewählten Beispiel, wie sich Martin's Axiom anwenden läßt. Dabei wird von einer Aussage ausgegangen, die zunächst unter Voraussetzung der Kontinuumhypothese gezeigt wird. Durch schrittweise Änderungen ergibt sich schließlich ein Beweis, der nur noch Martin's Axiom als Voraussetzung benötigt. Die folgenden drei Kapitel behandeln Anwendungen von Martin's Axiom. Es wird gezeigt, daß aus Martin's Axiom die Existenz verschiedener Klassen von Ultrafilter über den natürlichen Zahlen folgt. Weiterhin wird das Δ-Lemma gezeigt. Hierbei handelt es sich um eine kombinatorische Aussage, die im Zusammenhang mit Martin's Axiom oft benutzt wird. In Kapitel 24 wird auf das kombinatorische Prinzip $\diamondsuit$ eingegangen. Im abschließenden Kapitel 25 werden Mengenabbildungen sowie unabhängige Familien betrachtet.