Une formule de Plancherel pour l'algèbre de Hecke d'un groupe réductif p-adique

Volker Heiermann
Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin
D-10099 Berlin
e-mail: heierman@mathematik.hu-berlin.de

Résumé: Nous montrons un théorème de Paley-Wiener matriciel pour l'algèbre de Hecke d'un groupe réductif p-adique. La preuve est basée sur une analogue de la formule de Plancherel.

Fixons un corps local non archimédien F. Soit G l'ensemble des points F-rationnels d'un groupe réductif connexe $\underline{G}$ défini sur F. Fixons un sous-groupe ouvert compact K maximal spécial de G. On munit tout sous-groupe algébrique fermé H de G de la mesure de Haar invariante à gauche pour laquelle $\mathrm{mes}(H\cap K)=1$. Lorsque M est un sous-groupe de Lévi de G (ou plus précisément l'ensemble des points F-rationnels d'un facteur de Lévi d'un sous-groupe parabolique de $\underline{G}$ défini sur F), notons $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ le groupe des caractères non ramifiés de M (défini en 1.2). C'est une variété algébrique complexe isomorphe à $(\mathbb{C}^\times)^r$, où r désigne la dimension du tore déployé maximal dans le centre de M. Pour une représentation cuspidale irréductible (σ,E) de M, on notera $\mathcal{O}_\sigma=\{\sigma\otimes\chi|\chi\in\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)\}$ son *orbite inertielle.* L'application $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)\to\mathcal{O}_\sigma$, $\chi\mapsto\sigma\otimes\chi$, définit de façon naturelle une structure de variété algébrique complexe sur $\mathcal{O}_\sigma$. Une fonction complexe φ sur $\mathcal{O}_\sigma$ sera dite polynomiale (resp. rationnelle), si la fonction $\chi\mapsto\varphi(\sigma\otimes\chi)$ est polynomiale (resp. rationnelle) sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$.

Lorsque P est un sous-groupe parabolique de Lévi M, on désigne par i_P^G le foncteur de l'induction parabolique unitaire. Si M et K sont en bonne position relative, on définit l'espace $i_{P\cap K}^K E$ des applications $f:K\to E$ invariantes à droite par un sous-groupe ouvert et vérifiant $f(muk)=\sigma(m)f(k)$ pour tout $m\in M\cap K, u\in U\cap K$ et $k\in K$. La restriction $i_P^GE\to i_{P\cap K}^KE$ est un isomorphisme, et l'espace $i_{P\cap K}^KE$ ne change pas si on remplace σ par un élément de son orbite inertielle $\mathcal{O}_\sigma$. Toutes les représentations $i_P^G\sigma'$, $\sigma'\in\mathcal{O}_\sigma$, se réalisent donc dans le même espace $i_{P\cap K}^KE$. Pour deux sous-groupes paraboliques $P=MU$ et $P'=MU'$, on définit l'opérateur d'entrelacement $J_{P'|P}(\sigma')$ pour σ' dans un certain ouvert Zariski dense de $\mathcal{O}_\sigma$. C'est une application linéaire de $i_{P\cap K}^KE$ dans $i_{P'\cap K}^KE$ qui vérifie $J_{P'|P}(\sigma')(i_P^G\sigma')(g)=(i_{P'}^G\sigma')(g)J_{P'|P}(\sigma')$ pour tout $g\in G$, $\sigma'\in\mathcal{O}_\sigma$. On a $<(J_{P'|P}(\sigma')v)(g),e^\vee>=\int_{U\cap U'\backslash U'}<v(u'g),e^\vee>du'$ pour $v\in i_{P\cap K}^KE$ et $e^\vee\in E^\vee$, si l'intégrale à droite est convergente. L'application $\mathcal{O}_\sigma\to\mathrm{Hom}(i_{P\cap K}^KE,i_{P'\cap K}^KE),\sigma'\mapsto$

$J_{P'|P}(\sigma')$, est rationnelle (i.e. l'application $\sigma' \mapsto < J_{P'|P}(\sigma')v, v^\vee >$ est une fonction rationnelle pour tout $v \in i_{P\cap K}^K E$ et tout $v^\vee \in i_{P'\cap K}^K E^\vee$, et on peut choisir un dénominateur qui ne dépend ni de v ni de $v^\vee$.)

Fixons un tore déployé maximal A_0 de G par rapport auquel K est en bonne position et notons $W^G := W(G, A_0)$ le groupe de Weyl défini relatif à ce tore. Si M est semi-standard (i.e. $M \supseteq A_0$) et que $w \in W^G$, on dispose d'un isomorphisme $\lambda(w) : i_P^G E \to i_{wP}^G wE, v \mapsto v_w, v_w(g) := v(w^{-1}g)$, entre les représentations $i_P^G\sigma$ et $i_{wP}^G(w\sigma)$.

Notons $C_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions complexes lisses à support compact sur G. Il est bien connu que l'on peut associer à tout élément f de $C_c^\infty(G)$ un endomorphisme $(i_P^G\sigma)(f)$ de l'espace vectoriel $i_P^G E$ que nous noterons $\widehat{f}^G(P, \sigma)$. Notre but est le résultat suivant:

(0.1) Théorème: *Étant donné pour chaque (classe d'équivalence d'une) représentation cuspidale irréductible (σ, E_σ) d'un sous-groupe de Lévi semi-standard M de G, et tout sous-groupe parabolique P de Lévi M, un endomorphisme $\varphi_{P,\sigma}$ de l'espace vectoriel $i_{P\cap K}^K E_\sigma$ tels que la famille $\{\varphi_{P,\sigma}\}_{(P,\sigma)}$ vérifie les propriétés suivantes:*

1) Pour tout (P, σ), l'application $\varphi_{P,\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to End(i_{P\cap K}^K E_\sigma)$, $\sigma' \mapsto \varphi_{P,\sigma'}$, est polynomiale sur l'orbite inertielle $\mathcal{O}$ de σ;

2) Il existe un sous-groupe ouvert compact de G par lequel toute composante $\varphi_{P,\sigma}$ est invariante à gauche et à droite;

3) Pour tout (P, σ) et tout $w \in W^G$, on a $\lambda(w) \circ \varphi_{P,\sigma} = \varphi_{wPw^{-1},w\sigma} \circ \lambda(w)$;

4) Pour tout (P, σ) et tout (P', σ), on a $J_{P'|P}(\sigma) \circ \varphi_{P,\sigma} = \varphi_{P',\sigma} \circ J_{P'|P}(\sigma)$;

alors il existe une fonction f dans $C_c^\infty(G)$, telle que $\varphi_{P,\sigma} = \widehat{f}^G(P, \sigma)$ pour tout (P, σ).

Réciproquement, il est bien connu que, pour f dans $C_c^\infty(G)$, la famille $\{\widehat{f}^G(P, \sigma)\}_{(P,\sigma)}$ vérifie les propriétés 1) - 4) du théorème 0.1.

La propriété 2) équivaut à dire que $\varphi_{P,\sigma}$ est dans l'image de l'application canonique $i_P^G E \otimes i_P^G E^\vee \hookrightarrow \mathrm{End}(i_P^G E)$ et qu'il n'existe qu'un nombre fini de $(P, \mathcal{O})$ avec $\varphi_{P,\mathcal{O}} \neq 0$ (cf. [W] théorème VIII.1.2).

Notre démonstration de ce théorème est basée sur une analogue de la formule de Plancherel de Harish-Chandra. Elle a donc l'avantage d'expliciter la fonction f du théorème. La preuve utilise le résultat suivant qui sera prouvé dans la partie B:

(0.2) Proposition: *Soit $\{\varphi_{P,\mathcal{O}}\}_{(P,\mathcal{O})}$ comme dans le théorème. Pour tout $(P, \mathcal{O})$, il existe une application polynomiale $\xi_{P,\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to i_{\overline{P}\cap K}^K E_\mathcal{O} \otimes i_{P\cap K}^K E_\mathcal{O}^\vee$ (où $E_\mathcal{O} := E_\sigma$ pour un $\sigma \in \mathcal{O}$), telle que*

$$\varphi_{P,\mathcal{O}}(\sigma) = \sum_{w\in W; w\,\mathcal{O}=\mathcal{O}} (J_{P|\overline{wP}}(\sigma) \circ \lambda(w)) \otimes (J_{P|wP}(\sigma^\vee) \circ \lambda(w))\ \xi_{P,\mathcal{O}}(w^{-1}\sigma),$$

pour tout $\sigma \in \mathcal{O}$.

(Ici on a identifié $\varphi_{P,\mathcal{O}}(\sigma) \in \mathrm{End}(i_{P\cap K}^K E)$ à un élément de $i_{P\cap K}^K E \otimes i_{P\cap K}^K E^\vee$.)

Plus précisément, choisissons $\xi_{P,\mathcal{O}}$ et posons $\zeta_{P,\mathcal{O}}(\sigma) = (J_{\overline{P}|P}(\sigma)^{-1} \otimes 1)\xi_{P,\mathcal{O}}(\sigma)$. Pour $\sigma \in \mathcal{O}$, notons $E_{P,\sigma}^G$ l'application linéaire qui associe à un élément $v \otimes v^\vee$ de $i_{P\cap K}^K E_\mathcal{O} \otimes$

$i_{P\cap K}^K E_{\mathcal{O}}^\vee$ la fonction $g \mapsto < (i_P^G \sigma)(g)v, v^\vee >$, $g \in G$. Fixons $\sigma \in \mathcal{O}$. Avec $\varphi = \varphi_{P,\mathcal{O}}$, posons

$$f_\varphi(g) = \int_{\mathrm{Re}(\chi)=\mu>>_P 0} E_{P,\sigma\otimes\chi}^G(\zeta_{P,\mathcal{O}}(\sigma\otimes\chi))(g^{-1})\ dIm(\chi),$$

pour $g \in G$. (La partie réelle d'un caractère non ramifié étant définie dans 1.2, la notation $\mu >>_P 0$ est justifiée par le fait que l'on peut trouver μ dans la chambre de Weyl de P tel que les pôles χ de la fonction dans l'intégrale vérifient $< \alpha^\vee, \mathrm{Re}(\chi) > < < \alpha^\vee, \mu >$ pour toute racine α positive pour P. Grâce au théorème des résidus, la valeur de l'intégrale ne dépend alors pas du choix de μ vérifiant cette condition.)

On montrera (cf. A.3.1-2):

1) La fonction $f_{\varphi_{P,\mathcal{O}}}$ ne dépend que de $\varphi_{P,\mathcal{O}}$;

2) La fonction $f_{\varphi_{P,\mathcal{O}}}$ appartient à $C_c^\infty(G)$;

Notons $[\mathcal{O}] = \{w\sigma | \sigma \in \mathcal{O}, w \in W^G\}$ la classe inertielle de $\mathcal{O}$ et M le sous-groupe de Lévi semi-standard sous-jacent à $\mathcal{O}$. Posons $f_{\varphi_{[\mathcal{O}]}} = c([\mathcal{O}]) \sum_{(P',\mathcal{O}')} f_{\varphi_{P',\mathcal{O}'}}$, où $c([\mathcal{O}])$ est une constante précisée dans 3.2, la somme portant sur les couples $(P', \mathcal{O}')$ formés d'une orbite inertielle $\mathcal{O}' = w\,\mathcal{O}$, $w \in W^G$, et d'un sous-groupe parabolique de Lévi wMw^{-1}. Alors on a par ailleurs

3) $\widehat{f_{\varphi_{[\mathcal{O}]}}}(P, \sigma) = 0$ si $\sigma \notin [\mathcal{O}]$;

4) $\widehat{f_{\varphi_{[\mathcal{O}]}}}(P, \sigma) = \varphi_{P,\sigma}$ si $\sigma \in [\mathcal{O}]$;

5) $\int_G f_{\varphi_{[\mathcal{O}]}}(g)\ \overline{f_{\varphi_{[\mathcal{O}']}}(g)} dg = 0$ si $[\mathcal{O}] \neq [\mathcal{O}']$;

6) La fonction $f_\varphi = \sum_{[\mathcal{O}]} f_{\varphi_{[\mathcal{O}]}}$ vérifie $\varphi_{P,\sigma} = \widehat{f}(P, \sigma)$ pour tout (P, σ).

Cet article est divisé en deux parties. Dans la partie A, nous prouvons tous les résultats annoncés dans l'introduction à l'exception de la proposition 0.2. Sa preuve est le contenu de la partie B. Les deux parties peuvent être lues indépendamment, seules certaines définitions et notations introduites dans la section A.1 seront utilisées sans rappel dans la partie B.

Remarquons que J.N. Bernstein a annoncé une preuve du théorème 0.1 par une méthode differente de la nôtre.

L'essentiel de ce travail a été réalisé, lorsque l'auteur séjournait à l'Université Paris 7 au sein de l'équipe "Théorie des Groupes". Ce séjour a été financé par une bourse Feodor Lynen de la fondation Alexander von Humboldt en correspondance avec M.-F. Vignéras. Cette bourse comprenait une participation financière de l'Université Paris 7 venant du réseau "Géométrie arithmétique algébrique" soutenu par le programme "Formation et Mobilité des Chercheurs" de l'Union Européenne. Mon tuteur auprès de la fondation Alexander von Humboldt était E.-W. Zink.

Mes remerciements vont par ailleurs tout particulièrement à J.-L. Waldspurger à qui je dois l'idée pour ce travail et qui m'a bien accompagné durant sa réalisation.

A. Une analogue de la formule de Plancherel

1. On garde les notations et définitions de l'introduction. On notera q le cardinal du corps résiduel de F, v_F la valuation discrète de F normalisée telle que $v_F(F^\times) = \mathbb{Z}$ et $||_F$ la valeur absolue, donnée par $|x|_F = q^{-v_F(x)}$ pour x dans $F^\times$.

Les définitions et notations qui seront introduites dans la suite pour le groupe réductif G et munies du symbôle G seront ensuite utilisées pour tout groupe réductif M, en remplaçant G par M, sans que cela soit dit explicitement.

1.1 Notons A_G le tore déployé maximal dans le centre de G et G^{der} le groupe dérivé de G. Posons $X^*(G) = \text{Hom}_F(G, \mathbb{G}_m)$ et $X_*(S) = \text{Hom}_F(\mathbb{G}_m, S)$ lorsque S est un tore.

1.1.1 Posons $a_0^* = X^*(A_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $a_G^* = X^*(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $a_0^{G*} = X^*(A_0 \cap G^{\text{der}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On a une décomposition $a_0^* = a_G^* \oplus a_0^{G*}$. Lorsque S est un tore déployé dans A_0, on notera $\Sigma(S)$ l'ensemble des racines pour l'action adjointe de S dans l'algèbre de Lie de G. Soit (P, M) un couple parabolique semi-standard, i.e. P est un sous-groupe parabolique de G, M un facteur de Lévi de P, et on a $M \supseteq A_0$. L'ensemble $\Sigma(A_M)$ est l'ensemble des projections non nulles dans a_M^* d'éléments de $\Sigma(A_0)$ suivant la décomposition $a_0^* = a_M^* \oplus a_0^{M*}$. On notera $\Sigma(P)$ l'ensemble des racines pour l'action adjointe de A_M dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de P.

1.1.2 On fixera pour la suite un couple parabolique semi-standard (P_0, M_0) avec P_0 minimal. On a alors $M_0 = Z_G(A_0)$ et $A_{M_0} = A_0$. L'ensemble $\Sigma(A_0)$ est un système de racines dans a_0^{G*}. Remarquons que ce système de racines peut ne pas être réduit. Les éléments de $\Sigma(P_0)$ s'identifient aux racines positives dans $\Sigma(A_0)$ pour un certain ordre sur a_0^{G*}. La base de $\Sigma(A_0)$ correspondant à cet ordre sera noté Δ. Un couple parabolique (P, M) sera dit standard, s'il est semi-standard et $P \supseteq P_0$. On a une bijection $\Omega \mapsto (P_\Omega, M_\Omega)$ entre les sous-ensembles de Δ et les couples paraboliques standards, les racines dans $\Sigma(A_0)$ de restriction triviale à A_{M_Ω} étant les combinaisons linéaires de Ω.

1.1.3 Posons $a_0 = X_*(A_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $a_G = X_*(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $a_0^G = X_*(A_0 \cap G^{\text{der}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Les espaces a_0 et a_0^* sont duaux, l'orthogonal de a_G dans a_0^* est a_0^{G*} et celui de a_0^G est a_G^*.

1.1.4 Si M est un sous-groupe de Lévi semi-standard, il existe une notion de coracine $\alpha^\vee$ associée à une racine $\alpha \in \Sigma(A_M)$. C'est un élément de a_M. On en déduit, pour tout sous-groupe parabolique P de Lévi M, une notion de chambre de Weyl dans a_M^* qui est l'ensemble des éléments positifs pour P.

1.1.5 On définit une application $H_0 : M_0 \to \text{Hom}(X^*(M_0), \mathbb{R}) \simeq a_0$ par $< \chi, H_0(m) > = v_F(\chi(m))$. Soit (P, M) un couple parabolique semi-standard. Un élément $a \in A_M$ sera dit positif pour P, si $< \alpha, H_0(m) > \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P)$. On dira qu'il est strictement positif, si l'on a l'inégalité stricte pour tout $\alpha \in \Sigma(P)$.

1.2 La restriction $X^*(G) \to X^*(A_G)$ induit un isomorphisme $X^*(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to a_G^*$. Le groupe $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(G)$ des caractères non ramifiés de G est par définition l'image de l'homomorphisme $a_{G,\mathbb{C}}^* = a_G^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ qui associe à $\lambda = \alpha \otimes s$ le caractère χ_λ tel que $\chi_\lambda(g) = |\alpha(g)|_F^s$. Son noyau est de la forme $\frac{2\pi i}{\log q} R_G$, où R_G désigne un réseau de rang maximal dans $X^*(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. L'homomorphisme munit $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(G)$ d'une structure de variété algébrique complexe isomorphe à $(\mathbb{C}^\times)^r$ avec r =rang de A_G. Sa restriction à a_G^* induit un isomorphisme avec le sous-groupe des caractères réels à valeurs > 0. La partie réelle d'un caractère non ramifié χ, noté $\mathrm{Re}(\chi)$, est l'unique élément λ de a_G^* qui vérifie $\chi_\lambda = |\chi|$. On notera $\mathfrak{X}_{\mathrm{im}}^{\mathrm{nr}}(G)$ le sous-groupe de $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(G)$ formé des χ avec $\mathrm{Re}(\chi) = 0$.

1.2.1 On munit $\mathfrak{X}_{\mathrm{im}}^{\mathrm{nr}}(A_G)$ de la mesure de Haar de masse totale 1, et $\mathfrak{X}_{\mathrm{im}}^{\mathrm{nr}}(G)$ de la mesure de Haar pour laquelle la restriction $\mathfrak{X}_{\mathrm{im}}^{\mathrm{nr}}(G) \to \mathfrak{X}_{\mathrm{im}}^{\mathrm{nr}}(A_G)$ préserve localement les mesures.

1.2.2 Soit (P, M) un couple parabolique semi-standard. Si r est une fonction rationnelle sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ dont les pôles χ_λ se trouvent sur un nombre fini d'hyperplans modulo $\frac{2\pi i}{\log q} R_G$ de la forme $< \lambda, \alpha^\vee >= c$ avec $\alpha \in \Sigma(P)$, il résulte du théorème des résidus que l'intégrale $\int_{\mathfrak{X}_{\mathrm{im}}^{\mathrm{nr}}(M)} r(\chi_0 \chi) d\chi$ reste constante, si χ_0 varie dans l'ouvert de $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ défini par les inégalités $< \mathrm{Re}(\chi), \alpha^\vee >< < \mathrm{Re}(\chi_0), \alpha^\vee >$, χ parcourant les pôles de r, $\alpha \in \Sigma(P)$.

On écrira plus simplement $\int_{\mathrm{Re}(\chi)=\mu >>_P 0} r(\chi) d(Im(\chi))$ pour la valeur de cette intégrale.

L'expression $\int_{\mathrm{Re}(\chi)=\mu <<_P 0} r(\chi) d(Im(\chi))$ aura la signification évidente.

1.2.3 Proposition: *Soient D un ouvert de a_G^* et ψ une fonction holomorphe dans l'ouvert de $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(G)$ formé des points χ avec $\mathrm{Re}(\chi) \in D$. Fixons $\mu \in D$.*

Alors, pour tout $\chi_0 \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(G)$, $\mathrm{Re}(\chi_0) = \mu$, on a

$$\sum_{a \in A_G \cap K \backslash A_G} \chi_0^{-1}(a) \int_{\mathrm{Re}(\chi)=\mu} \psi(\chi)\chi(a) dIm(\chi) \ = \sum_{\chi} \psi(\chi\chi_0),$$

la somme portant sur les élément de $\mathfrak{X}_{\mathrm{im}}^{\mathrm{nr}}(G)$ de restriction triviale à A_G.

1.3 Fixons un sous-groupe de Lévi semi-standard M de G. Notons $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques P de G de la forme $P = MU$. Fixons une représentation irréductible cuspidale (σ, E) de M. Soient $P, P' \in \mathcal{P}(M)$. Les points, où l'application rationnelle $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M) \to \mathrm{Hom}(i_{P\cap K}^K E, i_{P'\cap K}^K E)$, $\chi_\lambda \mapsto J_{P'|P}(\sigma \otimes \chi_\lambda)$, a un pôle ou bien où $J_{P'|P}(\sigma \otimes \chi_\lambda)$ n'est pas inversible, se trouvent sur un nombre fini de hyperplans modulo $\frac{2\pi i}{\log q} R_M$ de la forme $< \alpha^\vee, \lambda >= c$ avec $\alpha \in \Sigma(P') \cap \Sigma(\overline{P})$. Soit $P'' \in \mathcal{P}(M)$. Il existe une fonction rationnelle $j_{P|P'|P''}$ sur l'orbite inertielle $\mathcal{O}$ de σ, telle que $J_{P|P'}(\sigma \otimes \chi) J_{P'|P''}(\sigma \otimes$

$\chi) = j_{P|P'|P''}(\sigma \otimes \chi) J_{P|P''}(\sigma \otimes \chi)$ pour tout χ. Si $P'' = P$, on écrira plus simplement $j_{P|P'} = j_{P|P'|P''}$. L'égalité $j_{P|P'|P''}(\sigma \otimes \chi) = 1$ vaut si $d(P|P'') = d(P|P') + d(P'|P'')$, $d(P|P'')$ désignant le nombre d'hyperplans séparant les chambres de Weyl de a_M^* correspondant à P et P'' respectivement.

D'autres résultats sur les opérateurs d'entrelacement se trouvent dans [W].

1.3.1 Le théorème suivant qui se montre avec les méthodes de [W] traduites dans le cas d'une représentation cuspidale irréductible est un résultat clé pour la suite:

Soit (P', M') un couple parabolique semi-standard. Posons $W(M, M') = W^{M'} \backslash \{w \in W^G | \; wMw^{-1} \subseteq M'\}$ et identifions ses éléments à certains éléments de W^G. Les formules qui suivent seront essentiellement indépendantes du choix d'une telle identification. Pour $w \in W(M, M')$, définissons $P'_w, \widetilde{P}'_w \in \mathcal{P}(M)$ par $P'_w = (w^{-1}M'w \cap P)w^{-1}U'w$ et $\widetilde{P}'_w = (w^{-1}M'w \cap P)w^{-1}\overline{U'}w$.

On associe par ailleurs à M' comme dans [W] une constante $\gamma(G|M')$.

Pour $v \in i_{P\cap K}^K E$, $v^\vee \in i_{P\cap K}^K E^\vee$, $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ et $a \in A_{M'}$, posons $c_{P'|P}(\sigma \otimes \chi, w)(v \otimes v^\vee)(a) =< i_{wP\cap M'}^{M'}(w(\sigma \otimes \chi))(a)(\lambda(w) J_{P'_w|P}(\sigma \otimes \chi)v)_{|M'}, \; (\lambda(w) J_{\widetilde{P}'_w|P}(\sigma^\vee \otimes \chi^{-1})v^\vee)_{|M'} >_{M'}$.

Théorème: *Soient $v \in i_{P\cap K}^K E$ et $v^\vee \in i_{P\cap K}^K E^\vee$. Il existe $t > 0$, de sorte que pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ et tout $a \in A_{M'}$ tel que $< \alpha, H_0(a) > > t$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P')$, on ait*

$$< i_P^G(\sigma \otimes \chi)(a)v, v^\vee >= \gamma(G|M')^{-1} \delta_{P'}^{1/2}(a) \sum_{w \in W(M,M')} c_{P'|P}(\sigma \otimes \chi, w)(v \otimes v^\vee)(a).$$

1.3.2 Le résultat suivant sera utile lors des applications du théorème 1.3.1.

Lemme: *Soit $w \in W(M, M')$. On a*

$$J_{P'_w|P}(\sigma') J_{\overline{P}|P}(\sigma')^{-1} = j_{P'_w|\overline{P}}(\sigma')^{-1} J_{P'_w|\overline{P}}(\sigma')$$

en tout point σ' de l'orbite inertielle de σ en lequel ces opérateurs sont définis.

Preuve: Par la formule du produit (cf. [W] p. 55), on a

$$J_{P'_w|\overline{P}}(\sigma') J_{\overline{P}|P}(\sigma') = j_{P'_w|\overline{P}}(\sigma') J_{P'_w|P}(\sigma').$$

$\square$

1.4. Soient (π, V) et (π', V') deux représentations irréductibles cuspidales de G. Supposons que les restrictions à A_G de leurs caractères centraux coïncident. Pour $v \in V$, $v^\vee \in V^\vee$, $v' \in V'$ et $v'^\vee \in V'^\vee$, posons

$$I(v, v^\vee, v', v'^\vee) = \int_{A_G \backslash G} < \pi(g)v, v^\vee > < v', \pi'^\vee(g)v'^\vee > dg.$$

Théorème: *i) Si* $\pi \not\simeq \pi'$, *alors* $I(v, v^\vee, v', v'^\vee) = 0$ *pour tous* v, $v^\vee$, v' *et* $v'^\vee$.

ii) Si $(\pi, V) = (\pi', V')$, *il existe un réel* $d(\pi) > 0$, *appelé le degré formel de* π, *tel que* $I(v, v^\vee, v', v'^\vee) = d(\pi)^{-1} < v, v'^\vee >< v', v^\vee >$ *pour tous* v, $v^\vee$, v' *et* $v'^\vee$.

Preuve: (cf. [C] proposition 5.2.4)

Le degré formel de π ne change pas si on remplace π par un élément de son orbite inertielle $\mathcal{O}$. On peut donc poser $d(\mathcal{O}) := d(\pi)$.

2. Fixons un couple parabolique standard (P, M) de G et une représentation cuspidale unitaire irréductible (σ, E) de M. Notons $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle de σ. Soit $\xi : \mathcal{O} \to i_{\overline{P}\cap K}^K E \otimes i_{P\cap K}^K E^\vee$ une application polynomiale. Posons $\zeta(\sigma') = (J_{\overline{P}|P}(\sigma')^{-1} \otimes 1)\xi(\sigma')$ pour tout $\sigma' \in \mathcal{O}$ et

$$f_\zeta(g) = \int_{\mathrm{Re}(\chi)=\mu>>_P 0} E_{P,\sigma\otimes\chi}^G(\zeta(\sigma\otimes\chi))(g^{-1})d(Im(\chi)).$$

2.1 Proposition: *La fonction* f_ζ *appartient à* $C_c^\infty(G)$.

Preuve: D'après 1.2.2 et 1.3, la fonction f_ζ est bien définie. Il est clair qu'elle est lisse. Il reste donc à montrer que son support est compact.

Par la décomposition de Cartan, on a

$$G = KM_0^+K \quad \text{avec} \quad M_0^+ = \{m \in M_0 |\ \forall\alpha \in \Delta\ < \alpha, H_0(m) > \geq 0\}.$$

Par ailleurs, $KmK = Km'K$ si et seulement si $H_0(m) = H_0(m')$. Posons $A_0^+ = A_0 \cap M_0^+$. Il existe un sous-ensemble compact C de A_0^+ tel que $M_0^+ = CA_0^+$. Par un argument de C-lisseté, il suffit de montrer que, pour tout $v \in i_{\overline{P}\cap K}^K E$, tout $v^\vee \in i_{P\cap K}^K E^\vee$ et toute fonction polynomiale p sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$, la fonction sur A_0^+ définie par

$$a \mapsto \int_{Re(\chi)=\mu>>_P 0} p(\chi) < i_P^G(\sigma\otimes\chi)(a)J_{\overline{P}|P}(\sigma\otimes\chi)^{-1}v, v^\vee > d(Im(\chi)) \qquad (*)$$

est à support compact.

Supposons d'abord G semi-simple. Alors Δ est une base de a_0^*. Pour $\Theta \subseteq \Delta$ et $t', t \geq 0$, posons $A_0^+(\Theta, t, t') = \{a \in A_0^+ |\ < \alpha, H_0(a) > \leq t\ \forall\alpha \in \Theta$ et $< \alpha, H_0(a) > > t'\ \forall\alpha \in \Delta - \Theta\}$, et $A_0^+(\Theta, t) := A_0^+(\Theta, t, t)$.

On va montrer l'existence d'une fonction $(\Theta, t) \mapsto f(\Theta, t)$, $\Theta \subset \Delta$, $t \geq 0$, telle que la fonction (*) soit nulle en tout $a \in A_0^+(\Theta, t, f(\Theta, t))$. Ceci implique la proposition dans le cas semi-simple: Comme $A_0^+ = \bigcup_{\Theta\subseteq\Delta} A_0^+(\Theta, t)$ pour tout $t \geq 0$, il suffit d'en déduire que, pour tout $\Theta \subseteq \Delta$ et tout $t \geq 0$, la restriction de (*) à $A_0^+(\Theta, t)$ est à support compact.

Effectuons une récurrence décroissante sur $\Theta \subseteq \Delta$. Comme Δ est une base de a_0^*, $A_0^+(\Delta, t)$ est compact pour tout $t \geq 0$. Soit $\Theta \subset \Delta$. Si (*) est non nulle en $a \in A_0^+(\Theta, t)$, alors $\Theta' = \{\alpha \in \Delta | < \alpha, H_0(a) > \leq f(\Theta,t)\}$ contient proprement Θ. Par suite, $a \in \bigcup_{\Theta' \supset \Theta} A_0^+(\Theta', f(\Theta,t))$. Or, par hypothèse de récurrence, la restriction de l'application (*) à cette réunion est à support compact.

Fixons $\Theta \subset \Delta$, $t \geq 0$ et montrons l'existence de $f(\Theta,t)$. Posons $(P', M') = (P_\Theta, M_\Theta)$. Comme dans [W], on déduit de la formule de Casselman (1.3.1), qu'il existe $t_0 \geq t$, tel que, pour tout $a \in A_0^+(\Theta, t, t_0)$, on ait

$$\begin{aligned}&< i_P^G(\sigma \otimes \chi)(a) J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi)^{-1} v, v^\vee > \\ &= \gamma(G|M')^{-1} \delta_{P'}^{1/2}(a) \sum_{w \in W(M,M')} c_{P'|P}(\sigma \otimes \chi, w)(J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi)^{-1} v \otimes v^\vee)(a).\end{aligned}$$

En particulier, le coefficient matriciel est nul, si $W(M, M') = \emptyset$.

L'étude de (*) se ramène donc à celle de

$$a \mapsto \int_{\mathrm{Re}(\chi) = \mu >>_P 0} p(\chi)\ c_{P'|P}(\sigma \otimes \chi, w)(J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi)^{-1} v \otimes v^\vee)(a) d(Im(\chi)) \qquad (**)$$

pour tout $w \in W(M, M')$. Fixons $w \in W(M, M')$.

Il existe un compact $C_\Theta \subset A_0$, $C_\Theta^{-1} \subset A_0^+$, tel que tout élément de A_0^+ puisse s'écrire sous la forme $a = a_\Theta a' c_a$ avec $a_\Theta \in A_{M'}$, $a' \in A_0 \cap M'^{\mathrm{der}}$ et $c_a \in C_\Theta$. On a $< \alpha, H_0(a') > \leq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Theta$, et l'ensemble des $H_0(a')$ avec $a \in A_0^+(\Theta, t)$ est fini. En particulier, $a \in A_0^+(\Theta, t, t')$ implique $a_\Theta \in A_\Theta \cap A_0^+(\Theta, t, t')$.

Pour $a \in A_0^+$, notons r_a la fonction rationnelle $\chi \mapsto p(\chi) c_{P'|P}(\sigma \otimes \chi, w)(J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi)^{-1} v \otimes v^\vee)(a' c_a)$ définie sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$. Par un argument de lisseté, on déduit de la finitude de l'ensemble des $H_0(a')$, $a \in A_0^+(\Theta, t)$, la finitude de l'ensemble des fonctions r_a, $a \in A_0^+(\Theta, t)$.

Par ce qui précède et après avoir effectué le changement de base $\chi \mapsto w^{-1}\chi$, l'étude de (**) se ramène à celle de

$$a \mapsto \int_{\mathrm{Re}(\chi) = w\mu} \chi(a_\Theta) r_a(w^{-1}\chi) d(Im(\chi)), \qquad (***)$$

où μ a été choisi suffisamment positif dans la chambre de Weyl de P dans a_M^*.

On déduit de 1.3 et de 1.3.2 que les pôles χ_λ des fonctions rationnelles $\chi \mapsto r_a(w^{-1}\chi)$, $a \in A_0^+(\Theta, t)$, (qui sont en nombre fini) se trouvent sur un nombre fini de hyperplans modulo $\frac{2\pi i}{\log q} R_{wMw^{-1}}$ de la forme $< \alpha^\vee, \lambda >= c$ avec $\alpha \in \Sigma(wPw^{-1}) \cap \Sigma(wP'_w w^{-1})$.

A l'aide de la décomposition $a_{wMw^{-1}}^* = a_{M'}^* \oplus a_{wMw^{-1}}^{M'*}$, on définit $\chi_{\mu'} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(wMw^{-1})$ pour $\mu' \in a_{M'}^*$. Supposons μ' dans la chambre de Weyl positive de P' dans $a_{M'}^*$. Soit $\alpha \in \Sigma(wPw^{-1}) \cap \Sigma(wP'_w w^{-1})$. Alors, ou $\alpha \in \Sigma(wPw^{-1} \cap M')$ ou $\alpha_{|A_{M'}} \in \Sigma(P')$. Dans le premier cas, $< \mu', \alpha^\vee >= 0$, alors que $< \mu', \alpha^\vee > > 0$ dans le deuxième. L'intégrale dans (***) ne change donc pas de valeur pour $a \in A_0^+(\Theta, t)$, si on remplace $w\mu$ par $w\mu + \mu'$ avec μ' dans la chambre de Weyl positive de P' dans $a_{M'}^*$.

L'ensemble des fonctions rationnelles $\chi \mapsto r_a(w^{-1}\chi)$, $a \in A_0^+(\Theta, t)$, étant fini, on peut choisir $t_w \geq t_0$ tel que, pour tout $a \in A_0^+(\Theta, t, t_w)$, $\chi \mapsto \chi(a_\Theta)$ soit à décroissance rapide par rapport à $\chi \mapsto r_a(w^{-1}\chi)$, lorsque $\mathrm{Re}(\chi_{|A_{M'}})$ devient très positif dans la chambre de Weyl de P' dans $a^*_{M'}$.

Comme, pour $a \in A_0^+(\Theta, t, t_w)$, l'intégrale dans (***) reste invariante si on remplace $w\mu$ par $w\mu + \mu'$, $\mu' >_{P'} 0$, et que la fonction à l'intérieur de l'intégrale converge vers 0 lorsque μ' devient très positif dans la chambre de Weyl de P', (***) est nulle en tout $a \in A_0^+(\Theta, t, t_w)$.

On pourra alors prendre pour $f(\Theta, t)$ le plus grand des t_w.

Considérons maintenant le cas d'un groupe réductif qui n'est pas semi-simple. On a $A_0 = A_G(A_0 \cap G^{\mathrm{der}})C'$ avec C' compact. Les morphismes de restriction donnent lieu à une suite exacte $0 \to \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(G) \times X \to \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M) \to \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M \cap G^{\mathrm{der}}) \to 0$, où X désigne un sous-ensemble fini de $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(M)$ formé de caractères de restriction triviale à $A_G(M \cap G^{\mathrm{der}})$. On identifie $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(G)$ à un sous-groupe de $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(M)$ au moyen de ce morphisme. On a donc un isomorphisme $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(M)/(\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(G) \times X) \to \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(M \cap G^{\mathrm{der}})$.

Choisissons μ suffisamment positif dans la chambre de Weyl de P dans a^*_M et tel que $< \mu, H >= 0$ pour $H \in a_G$. Par ce qui précède et un argument de lisseté, l'étude de (*) se ramène à celle de

$$\begin{aligned}\int_{\chi_\mu \, \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(M \cap G^{\mathrm{der}})} \int_{\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(G) \times X} & p(\chi'\chi_G)\chi_G(a_G) \\ & < i_P^G(\sigma \otimes \chi'\chi_G)(a') J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi'\chi_G)^{-1} v, v^\vee > d(Im(\chi_G)) d(Im(\chi'))\end{aligned} \qquad (\#)$$

pour (a_G, a') dans $A_G \times (A_0^+ \cap G^{\mathrm{der}})$. Il reste donc à montrer l'existence de compacts C_G et C_0 de A_G et $A_0^+ \cap G^{\mathrm{der}}$ respectivement, tels que (#) soit nul si $(a_G, a') \notin C_G \times C_0$.

Remarquons d'abord que, si $a' \in A_0^+ \cap G^{\mathrm{der}}$,

$$\begin{aligned}& < i_P^G(\sigma \otimes \chi'\chi_G)(a') J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi'\chi_G)^{-1} v, v^\vee > \\ = & < i^{G^{\mathrm{der}}}_{P \cap G^{\mathrm{der}}}(\sigma \otimes \chi')(a') J_{\overline{P} \cap G^{\mathrm{der}}|P \cap G^{\mathrm{der}}}(\sigma \otimes \chi')^{-1} v_{|G^{\mathrm{der}}}, v^\vee_{|G^{\mathrm{der}}} >,\end{aligned}$$

et que l'on peut remplacer ci-dessus $\int_{\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(G) \times X}$ par $|X| \int_{\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(G)}$. Comme $\chi' \mapsto \int_{\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(G)} p(\chi' \chi_G)\, \chi_G(a_G)\, d(Im(\chi_G))$ est une application polynomiale sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M \cap G^{\mathrm{der}})$ et que $M \cap G^{\mathrm{der}}$ est un sous-groupe de Lévi semi-standard du groupe semi-simple G^{der}, l'existence de C_0 résulte du cas semi-simple considéré précédemment. L'intégrale sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(G)$ portant sur une fonction polynomiale en χ_G, l'existence de C_G est immédiate. □

2.2 Lorsque f est un élément de $C_c^\infty(G)$ et que $P' = M'U'$ est un sous-groupe parabolique de G, posons

$$f_{P'}(m') = \delta_{P'}(m')^{1/2} \int_{U'} f(m'u')du' \quad \text{pour } m' \in M'.$$

2.2.1 Lemme: *On a* $f_{P'} \in C_c^\infty(M')$.

2.2.2 Lemme: *Soit (π, V) une représentation lisse de G et $v \in V$. Si $P' = M'U'$ est un sous-groupe parabolique et H un sous-groupe ouvert compact de G qui laisse v invariant et qui admet une décomposition d'Iwahori $H = (U' \cap H)(M' \cap H)(\overline{U'} \cap H)$ par rapport au couple parabolique (P', M'), alors on a*

$$\int_{U' \cap H} \pi(u'a)v du' = \frac{mes(U' \cap H)}{mes(H)} \int_H \pi(ha)vdh.$$

pour tout $a \in A_{M'}$ strictement positif pour P'. En particulier, l'élément de V égal à cette intégrale est invariant par H.

2.2.3 Lemme: *Soit (P', M') un couple parabolique semi-standard, et supposons* $\dim M' \leq \dim M$. *Alors on a*

(i) $(f_\zeta)_{P'} = 0$ si M' et M ne sont pas conjugués;

(ii)

$$\gamma(G|M)(f_\zeta)_{P'}(m') = \sum_{w \in W(M,M)} \int_{\mathrm{Re}(w\chi) = \mu_w >>_{P'} 0}$$
$$E^M_{M, w(\sigma \otimes \chi)}((\lambda(w) J_{P'_w|\overline{P}}(\sigma \otimes \chi) \otimes \lambda(w) J_{P'_w|P}(\sigma^\vee \otimes \chi^{-1}))\xi(\chi))(m'^{-1}) \ dIm(\chi)$$

si $M' = M$.

Preuve: Comme ξ est une combinaison linéaire d'applications de la forme $\chi \mapsto p(\chi) v \otimes v^\vee$, il suffit de montrer la proposition dans le cas où ξ est une telle fonction.

Soit H un sous-groupe ouvert compact de K, admettant une décomposition d'Iwahori relative à (P', M') et laissant v et $v^\vee$ invariant. Soit $a \in A_{M'}$ strictement positif pour P'. Posons $U'_0 = H \cap U'$. On a $U' = \bigcup_{l=0}^\infty a^{-l} U'_0 a^l$. Par suite,

$$\begin{aligned}
&\delta_{P'}(m')^{-1/2}(f_\zeta)_{P'}(m') \\
&= \int_{U'} f_\zeta(m'u')du' \\
&= \lim_{l \to \infty} \int_{a^{-l}U'_0 a^l} \int_{\mathrm{Re}(\chi) = \mu >>_P 0} E^G_{P, \sigma \otimes \chi}(\zeta(\sigma \otimes \chi))(u'^{-1} m'^{-1}) dIm(\chi) \\
&= \lim_{l \to \infty} \delta_{P'}(a^l)^{-1} \int_{U'_0} \int_{\mathrm{Re}(\chi) = \mu >>_P 0} p(\chi) \\
&\quad < i^G_P(\sigma \otimes \chi)(a^l) J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi)^{-1} i^G_{\overline{P}}(\sigma \otimes \chi)(m'^{-1})v, i^G_P(\sigma^\vee \otimes \chi^{-1})(u'a^l)v^\vee > dIm(\chi) du'.
\end{aligned}$$

En posant $v_{m'} = i^G_{\overline{P}}(\sigma \otimes \chi)(m'^{-1})v$ et $v_l^\vee = \int_{U'_0} i^G_P(\sigma^\vee \otimes \chi^{-1})(u'a^l)v^\vee du'$, ceci devient à l'aide du théorème de Fubini égal à

$$\lim_{l \to \infty} \delta_{P'}(a)^{-l} \int_{\mathrm{Re}(\chi) = \mu >>_P 0} p(\chi) < i^G_P(\sigma \otimes \chi)(a^l) J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi)^{-1} v_{m'}, v_l^\vee > dIm(\chi).$$

Il résulte du lemme 2.2.2 que $v_l^\vee$ reste dans un espace de dimension finie pour $l >> 0$. On peut donc appliquer la formule de Casselman, et on trouve

$$\begin{aligned}&< i_P^G(\sigma\otimes\chi)(a^l)J_{\overline{P}|P}(\sigma\otimes\chi)^{-1}v_{m'}, v_l^\vee >\\ =&\gamma(G|M')^{-1}\delta_{P'}(a^l)^{1/2}\sum_{w\in W(M,M')} c_{P'|P}(\sigma\otimes\chi, w)(J_{\overline{P}|P}(\sigma\otimes\chi)^{-1}v_{m'}\otimes v_l^\vee)(a^l)\end{aligned}$$

pour l assez grand.

Le (i) de la proposition en résulte aussitôt. Supposons dans la suite $M' = M$.

Observons que

$$\begin{aligned}&(\lambda(w)J_{\widetilde{P}'_w|P}(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})v_l^\vee)(1)\\ =&\int_{U'_0}(J_{\widetilde{P}'_w|P}(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})i_P^G(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})(u'a^l)v^\vee)(w^{-1})du'\\ =&\int_{U'_0}(J_{\widetilde{P}'_w|P}(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})v^\vee)(w^{-1}u'a^l)du'\\ =&\delta_{P'}(a^l)^{1/2}w(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})(a^l)\int_{a^{-l}U'_0a^l}(J_{\widetilde{P}'_w|P}(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})v^\vee)(w^{-1}u')du'.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}&\delta_{P'}(m')^{-1/2}(f_\zeta)_{P'}(m')\\ =&\gamma(G|M')^{-1}\lim_{l\to\infty}\sum_{w\in W(M,M)}\int_{\mathrm{Re}(\chi)=\mu>>_P 0}p(\chi)\\ &< (\lambda(w)J_{P'_w|P}(\sigma\otimes\chi)J_{\overline{P}|P}(\sigma\otimes\chi)^{-1}v_{m'})(1),\\ &\qquad\int_{a^{-l}U'_0a^l}(J_{\widetilde{P}'_w|P}(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})v^\vee)(w^{-1}u')du' > dIm(\chi).\end{aligned}$$

Fixons $w\in W(M,M)$ et calculons la limite correspondante. Il résulte de 1.3 et de 1.3.2 que les pôles χ_λ de la fonction dans l'intégrale sont sur un nombre fini de hyperplans modulo $\frac{2\pi i}{\log q}R_M$ de la forme $<\lambda,\alpha^\vee>= c$ avec $\alpha\in\Sigma(P)\cap\Sigma(P'_w)$. On peut donc remplacer ci-dessus $\mu >>_P 0$ par $\mu_w >>_{P'_w} 0$. Or, alors $\lim_{l\to\infty}\int_{a^{-l}U'_0a^l}(J_{\widetilde{P}'_w|P}(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})v^\vee)(w^{-1}u')du' = (\lambda(w)J_{P'_w|\widetilde{P}'_w}(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})J_{\widetilde{P}'_w|P}(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})v^\vee)(1)$. En appliquant 1.3.2 et la formule de produit pour les opérateurs d'entrelacement, on en déduit que le terme correspondant à w dans la somme ci-dessus est égal à

$$\int_{\mathrm{Re}(\chi)=\mu_w>>_{P'_w}0}p(\chi)< (\lambda(w)J_{P'_w|\overline{P}}(\sigma\otimes\chi)v_{m'})(1), (\lambda(w)J_{P'_w|P}(\sigma^\vee\otimes\chi^{-1})v^\vee)(1) > dIm(\chi),$$

d'où la formule (ii). $\square$

2.3 Proposition: *Soit (σ', E') une représentation irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Lévi semi-standard M' de dimension inférieure ou égale à celle de M. Soit $P' \in \mathcal{P}(M')$. Alors on a*

(i) $\widehat{f}_\zeta(\sigma', P') = 0$ si M' et M ne sont pas conjugués;

(ii)

$$\begin{aligned}&\gamma(G|M)\widehat{f}_\zeta(\sigma', P')\\ &= d(\sigma')^{-1} \sum_{w \in W(M,M), \sigma' \in w\,\mathcal{O}} (J_{P'|\overline{wP}}(\sigma')\lambda(w) \otimes J_{P'|wP}(\sigma'^\vee)\lambda(w))\xi(w^{-1}\sigma')\end{aligned}$$

si $M' = M$.

Pour la preuve de cette proposition, on utilisera les deux lemmes suivants, où λ et ρ désignent respectivement l'action par translations à gauche et à droite de G sur $C_c^\infty(G)$.

2.3.1 Lemme: *Soit (σ', E') une représentation cuspidale de M', $P' \in \mathcal{P}(M')$. Alors on a $\widehat{f}_\zeta^G(\sigma', P')(g, h) = (\lambda(g)\rho(h)f_\zeta)\widehat{_{P'}}^{M'}(\sigma', M')$.*

Preuve: Il suffit de combiner les lemmes VII.1.2 et VII.1.1 de [W]. □

2.3.2 Lemme: *On a $(\lambda(g)\rho(h)f_\zeta) = f_{\zeta'}$, où $\zeta'(\chi) = (i_P^G(\sigma \otimes \chi) \otimes i_P^G(\sigma^\vee \otimes \chi^{-1}))(g, h)$ $\zeta(\chi)$.*

Preuve: (de la proposition) Comme ξ est une combinaison linéaire d'applications de la forme $\chi \mapsto p(\sigma \otimes \chi)\ v \otimes v^\vee$ avec p fonction polynomiale sur $\mathcal{O}$, il suffit de montrer la proposition dans le cas où ξ est une telle fonction.

La partie (i) de la proposition est une conséquence immédiate des lemmes 2.2.3 (i) et 2.3.1.

Supposons $M' = M$. A l'aide de 2.2.3 (ii), on trouve avec $e' \in E'$ et $e'^\vee \in E'^\vee$,

$$\begin{aligned}&\gamma(G|M) < (f_\zeta)\widehat{_{P'}}^M(\sigma', M)e', e'^\vee >\\ &= \sum_{w \in W(M,M)} \int_M \int_{\mathrm{Re}(w\chi)=\mu_w >>_{P'} 0} p(\sigma \otimes \chi)\\ &\quad < (\lambda(w)J_{P'_w|\overline{P}}(\sigma \otimes \chi)v)(1), w(\sigma \otimes \chi)^\vee(m)(\lambda(w)J_{P'_w|P}(\sigma^\vee \otimes \chi^{-1})v^\vee)(1) > dIm(\chi)\\ &\quad < \sigma'(m)e', e'^\vee > dm\\ &= \sum_{w \in W(M,M)} \int_{A_M \backslash M} < \sigma'(m)e', e'^\vee > \int_{A_M \cap K \backslash A_M} \int_{\mathrm{Re}(w\chi)=-\mu_w <<_{P'} 0} p(\sigma \otimes \chi^{-1})\\ &\quad < (\lambda(w)J_{P'_w|\overline{P}}(\sigma \otimes \chi^{-1})v)(1), w(\sigma \otimes \chi^{-1})^\vee(m)(\lambda(w)J_{P'_w|P}(\sigma^\vee \otimes \chi)v^\vee)(1) >\\ &\qquad\qquad \chi_{\sigma'}(a)w(\chi\chi_\sigma^{-1})(a)(\int_{A_M \cap K} (\chi_{\sigma'}(w\chi_\sigma)^{-1})(\epsilon_a)d\epsilon_a)\ dIm(\chi)\ da\ dm.\end{aligned}$$

Comme $A_M \cap K$ est compact de mesure 1, l'intégrale sur $A_M \cap K$ n'est non nulle que si $\chi_{\sigma'|A_M \cap K} = w\chi_{\sigma|A_M\cap K}$, et sa valeur est alors 1. Dans ce cas, $\chi_{\sigma'}(w\chi_\sigma)^{-1}$ est la restriction à A_M d'un certain élément $w\chi_w$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$.

A l'aide de la théorie de Fourier sur un tore (cf. 1.2.3), on trouve alors

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{w \in W(M,M)} \sum_{\chi \in \ker(\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(M) \to \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{im}}(A_M))} p(\sigma \otimes \chi_w \chi) \int_{A_M \backslash M} < \sigma'(m')e', e'^{\vee} > \\
&\quad < (\lambda(w) J_{P'_w|\overline{P}}(\sigma \otimes \chi_w \chi)v)(1), \\
&\qquad\qquad w(\sigma \otimes \chi_w\chi)^{\vee}(m)(\lambda(w)J_{P'_w|P}(\sigma^{\vee} \otimes \chi_w^{-1}\chi^{-1})v^{\vee})(1) > dm \\
&= d(\sigma')^{-1} \sum_{w \in W(M,M), w^{-1}\sigma' \in \mathcal{O}} p(w^{-1}\sigma') < (\lambda(w) J_{P'_w|\overline{P}}(w^{-1}\sigma')v)(1), e'^{\vee} > \\
&\qquad\qquad\qquad < e', (\lambda(w)J_{P'_w|P}(w^{-1}\sigma'^{\vee})v^{\vee})(1) >
\end{aligned}
$$

par 1.4, si $\mathrm{Re}(w\chi_w) <_{P'} -\mu_w$ pour tout w. Comme les deux applications sont rationnelles sur l'orbite inertielle de σ', on a l'égalité partout.

A l'aide des lemmes 2.2.1, 2.2.3, 2.3.1, et 2.3.2, on en déduit le résultat énoncé. □

2.4 Proposition: *Soit $\mathcal{O}'$ une orbite inertielle définie relative à un sous-groupe de Lévi semi-standard de G. Supposons que $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}$ ne soient pas conjuguées. Soit ζ' une application rationnelle sur $\mathcal{O}'$ vérifiant les propriétés analogues à celles de ζ relatives à $\mathcal{O}'$.*

Alors on a

$$\int_G f_\zeta(g)\ \overline{f_{\zeta'}(g)}\ dg = 0.$$

Preuve: Les arguments dans la démonstration de la proposition VII.2.2 dans [W] se généralisent, après avoir remarqué que pour tout $v \in i^K_{P\cap K}E$ et tout $v^{\vee} \in i^K_{P\cap K}E^{\vee}$ il existe $v_1 \in i^K_{P\cap K}E$ et $v_1^{\vee} \in i^K_{P\cap K}E^{\vee}$, tels que $\overline{< i^G_P(\sigma\otimes\chi)(g)v, v^{\vee} >} = < i^G_P(\sigma\otimes\overline{\chi}^{-1})(g^{-1})v_1, v_1^{\vee} >$ pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ et tout $g \in G$.

□

2.4.1 Corollaire: *Soit (σ', E') une représentation irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Lévi M' de G. Supposons que σ' ne soit conjuguée à aucun élément de $\mathcal{O}$.*

Alors on a $\widehat{f_\zeta}(\sigma', P') = 0$.

Preuve: (cf. Corollaire VII.2.3 dans [W].) □

3. Notons Θ l'ensemble des couples $(P, \mathcal{O})$ formés d'un sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ et de l'orbite inertielle d'une représentation irréductible cuspidale de

M. Notons $\mathcal{H}(\Theta)$ l'ensemble des familles $\varphi = \{\varphi_{P,\mathcal{O}}\}_{(P,\mathcal{O})\in\Theta}$ dont les composantes sont des applications polynomiales qui vérifient les conditions 1) - 4) du théorème 0.1.

3.1 Soit $\varphi \in \mathcal{H}(\Theta)$. Choisissons pour tout couple $(P,\mathcal{O})$ une application polynomiale $\xi_{P,\mathcal{O}}$ vérifiant les conclusions de la proposition 0.2 relatives à $\varphi_{P,\mathcal{O}}$. Notons $\zeta_{P,\mathcal{O}}$ l'application rationnelle donnée par $\zeta_{P,\mathcal{O}}(\sigma) = (J_{\overline{P}|P}(\sigma)^{-1}\otimes 1)\xi_{P,\mathcal{O}}(\sigma)$ pour $\sigma\in\mathcal{O}$.

3.1.1 Proposition: *Soient $(P,\mathcal{O})$, $(P',\mathcal{O}')$ dans Θ et $\sigma'\in\mathcal{O}'$.*
Alors

$$\widehat{f_{\zeta_{P,\mathcal{O}}}}(P',\sigma') = \gamma(G|M')^{-1}d(\sigma')^{-1}\begin{cases}\varphi_{P',\mathcal{O}'}(\sigma'), & \textit{si } \mathcal{O}' \textit{ et } \mathcal{O} \textit{ sont conjugués;}\\ 0, & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Preuve: Le corollaire 2.4.1 prouve que $\widehat{f_{\zeta_{P,\mathcal{O}}}}(P',\sigma') = 0$ si $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}$ ne sont pas conjugués.

Si $\sigma'\in\mathcal{O}$ et $P = P'$, l'égalité $\widehat{f_{\zeta_{P,\mathcal{O}}}}(P',\sigma') = \gamma(G|M')^{-1}d(\sigma')^{-1}\varphi_{P',\mathcal{O}'}(\sigma')$ résulte immédiatement des propositions 2.3 (ii) et 0.2.

Si $P\neq P'$, celle-ci se déduit de l'identité $(J_{P'|P}(\sigma')\otimes J_{P|P'}(\sigma'^{\vee})^{-1})\varphi_{P,\sigma'} = \varphi_{P',\sigma'}$.

Si finalement $\sigma'\in w\,\mathcal{O}$, $w\in W^G$, l'identité $(\lambda(w)\otimes\lambda(w))\widehat{f_{\zeta_{P,\mathcal{O}}}}(w^{-1}P',w^{-1}\sigma') = \widehat{f_{\zeta_{P,\mathcal{O}}}}(P',\sigma')$ et ce que l'on vient de prouver dans le cas $\sigma'\in\mathcal{O}$ impliquent que $\widehat{f_{\zeta_{P,\mathcal{O}}}}(P',\sigma') = \varphi_{P',\mathcal{O}'}(\sigma')$. □

3.1.2 Corollaire: *La fonction $f_{\zeta_{P,\mathcal{O}}}$ ne dépend pas du choix de $\xi_{P,\mathcal{O}}$.*

Preuve: Ceci résulte de la proposition 3.1.1, puisque l'ensemble des transformées de Fourier $\{f_{\zeta_{P,\mathcal{O}}}(P',\sigma')\}_{(P',\sigma')}$ détermine la fonction $f_{\zeta_{P,\mathcal{O}}}$ (cf. [BZ] proposition 2.12). □

On pourra donc écrire $f_{\varphi_{P,\mathcal{O}}}$ à la place de $f_{\zeta_{P,\mathcal{O}}}$.

3.1.3 Corollaire: *L'égalité $f_{\varphi_{P,\mathcal{O}}} = f_{\varphi_{P',\mathcal{O}'}}$ vaut si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont conjugués.*

Preuve: La preuve est analogue à celle du corollaire 3.1.2. □

3.2 Lorsque $(P = MU,\mathcal{O})\in\Theta$, posons $[\mathcal{O}] = \{w\sigma|w\in W^G,\sigma\in\mathcal{O}\}$, $W(M,\mathcal{O}) = \{w\in W(M,M)|w\,\mathcal{O} = \mathcal{O}\}$, $c([\mathcal{O}]) = |\mathcal{P}(M)|^{-1}|W^M||W^G|^{-1}|W(M,\mathcal{O})|\ \gamma(G|M)d(\mathcal{O})$ et $f_{\varphi_{[\mathcal{O}]}} = c([\mathcal{O}])\sum_{(P',\mathcal{O}')\in\Theta,\ \mathcal{O}'\subseteq[\mathcal{O}]} f_{\varphi_{P',\mathcal{O}'}}$.

Il résulte de 3.1.1 que la fonction $f_{\varphi_{[\mathcal{O}]}}$ vérifie les propriétés 3) et 4) énoncées dans l'introduction. La propriété 5) est une conséquence directe de 2.4.

Après avoir rappelé qu'il est montré dans [BZ] qu'un élément de $C_c^\infty(G)$ est déterminé par ses transformées de Fourier, on s'aperçoit que l'on a montré le résultat suivant:

Théorème: *Soit φ dans $\mathcal{H}(\Theta)$. La fonction*

$$f_\varphi = \sum_{(P,\mathcal{O})\in\Theta} c([\mathcal{O}]) f_{\varphi_{P,\mathcal{O}}},$$

est l'unique élément de $C_c^\infty(G)$ qui vérifie $\widehat{f}_\varphi(P,\sigma) = \varphi_{P,\mathcal{O}}(\sigma)$ pour tout $(P,\mathcal{O}) \in \Theta$, $\sigma \in \mathcal{O}$.

3.2.2 Corollaire: *Pour que φ soit un élément de $\mathcal{H}(\Theta)$, il faut et il suffit qu'il existe f dans $C_c^\infty(G)$, telle que $\varphi_{P,\mathcal{O}}(\sigma) = \widehat{f}(P,\sigma)$ pour tout $(P,\mathcal{O}) \in \Theta$, $\sigma \in \mathcal{O}$.*

B. Une relation polynomiale

1.1 Si (π, V) est une représentation lisse de G et $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G, notons π_P la représentation lisse de M dans le module de Jacquet V_P de V. Lorsque U_1 est un sous-groupe ouvert compact de U, écrivons $V(U_1)$ pour l'ensemble des éléments $v \in V$ tels que $\int_{U_1} \pi(u)v du = 0$. Le noyau $V(U)$ de la projection canonique $j_P : V \to V_P$ est la réunion des $V(U_1)$, U_1 parcourant les sous-groupes ouverts compacts de U.

L'ensemble des éléments de V invariants pour l'action par un sous-groupe ouvert H de G sera noté V^H.

1.2 Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation irréductible cuspidale de M. Rappelons que les fonctions rationnelles $j_{\overline{P}|P}$, $P \in \mathcal{P}(M)$, sont toutes égales à une même fonction, notée j, et que tout point $W(M,M)$-régulier de $\mathcal{O}$ est régulier pour j.

Un élément σ de $\mathcal{O}$ sera dit *en position générale* s'il vérifie les deux propriétés suivantes:
(i) le caractère central de σ est $W(M,M)$-régulier;
(ii) $j(\sigma) \neq 0$.

Fixons $\sigma \in \mathcal{O}$. L'ensemble des $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ avec $\sigma \otimes \chi$ en position générale est Zariski dense dans $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$. Deux applications rationnelles sur $\mathcal{O}$ sont donc égales dès qu'elles coïncident sur l'ensemble des points en position générale.

1.3 Proposition: *Soient (σ, E) une représentation irréductible cuspidale de M et $P' \in \mathcal{P}(M)$. Supposons σ en position générale. Alors l'application*

$$i_{P'}^G E \longrightarrow \bigoplus_{w\in W(M,M)} wE, \qquad v \mapsto \bigoplus_{w\in W(M,M)} ((J_{P|wP'}(w\sigma)\lambda(w))v)(1)$$

se factorise par $(i_{P'}^G E)_P$. Elle induit un isomorphisme

$$(i_{P'}^G \sigma)_P \longrightarrow \bigoplus_{w\in W(M,M)} w\sigma.$$

Preuve: Le résultat énoncé relatif au module de Jacquet faible dans [W] au cours de la preuve de V.1.1 se généralise sans problème. □

2. Soit B l'anneau des fonctions régulières d'une variété algébrique affine complexe. La notion d'une B-famille de représentations admissibles a été définie dans [BD]. Le résultat suivant a été montré par Casselman [C] dans le cas d'une représentation admissible. Sa preuve se généralise au cas d'une B-famille de représentations admissibles.

Proposition: *Soient (π_B, V_B) une B-famille de représentations admissibles de G, $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard, et H un sous-groupe ouvert compact de G admettant une décomposition d'Iwahori par rapport à (P, M).*

Alors il existe un sous-groupe ouvert compact U_1 de U tel que $V_B^H \cap V_B(U) \subseteq V_B(U_1)$. Les espaces $(V_B^H)_a := \pi_B(1_{HaH})V_B$ avec $a \in A_M$ positif pour P et vérifiant $aU_1a^{-1} \subseteq H \cap U$ sont tous égaux à un même espace, noté $S_P^H(V_B)$. Le foncteur de Jacquet induit un isomorphisme $S_P^H(V_B) \to (V_B)_P^{H\cap M}$ de B-modules.

3. Fixons un couple parabolique semi-standard (P, M) et une représentation irréductible cuspidale (σ, E) de M. Choisissons un sous-groupe ouvert compact H de G admettant une décomposition d'Iwahori par rapport à tout couple parabolique semi-standard. (On peut en trouver aussi petit que l'on veut.)

Notons $B = B_M$ l'anneau des fonctions régulières sur la variété algébrique $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$. Comme dans [W], on déduit de (σ, E) les B-familles de représentations admissibles (σ_B, E_B) et $(\pi_B, V_B) = (i_P^G\sigma_B, i_P^G E_B)$ de M et G respectivement. La classe d'isomorphie de (σ_B, E_B) et (π_B, V_B) ne change pas si on remplace σ par un élément de sa classe inertielle. On pourra donc écrire $i_P^G E_{\mathcal{O},B}$, si on ne veut distinguer aucun élément de $\mathcal{O}$.

3.1 Pour $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$, notons E_χ et V_χ respectivement les espaces des représentations $\sigma \otimes \chi$ et $i_P^G(\sigma \otimes \chi)$. On dispose de morphismes de spécialisation $\mathrm{sp}_\chi : E_B \to E_\chi$ et $\mathrm{sp}_\chi : V_B \to V_\chi$ qui commutent avec l'action du groupe. Ainsi, toute application polynomiale sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ à valeurs dans E ou $i_{P\cap K}^K E$ correspond à un élément de E_B ou V_B, et vice versa. On écrira également $E_{\sigma'}$, $V_{\sigma'}$ et $\mathrm{sp}_{\sigma'}$ si on ne veut distinguer aucun élément de $\mathcal{O}$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions:

Lemme: *Soit $P' \in \mathcal{P}(M)$. L'égalité $\mathrm{sp}_\chi(S_{P'}^H(V_B)) = S_{P'}^H(V_\chi)$ vaut pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$.*

3.2 Pour $b \in B$, notons $b^\vee$ l'élément de B qui vérifie $b^\vee(\chi) = b(\chi^{-1})$. On désignera par $E_{B^\vee}^\vee$ l'espace $E_B^\vee$ muni de la structure de B-module pour laquelle la multiplication scalaire $B \times E_B^\vee \to E_B^\vee$ est donnée par $(b, e_B^\vee) \mapsto b^\vee e_B^\vee$. Le produit de dualité $<,>$ sur $E \times E^\vee$ induit par extension des scalaires une forme B-linéaire M-équivariante $<,>_B$ sur $E_B \times E_{B^\vee}^\vee$. On en déduit une forme bilinéaire G-équivariante $<,>_B$ sur $V_B \times V_{B^\vee}^\vee$. Pour $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$, $\mathrm{sp}_\chi(<,>_B)$ induit alors par passage au quotient le produit de dualité entre V_χ et $V_{\chi^{-1}}^\vee$.

Proposition: *Soit $P' \in \mathcal{P}(M)$. Les B-modules $S_{P'}^H(V_B)$ et $S_{\overline{P'}}^H(V_{B^\vee}^\vee)$ sont libres de type fini et en dualité par $<,>_B$.*

Preuve: En complétant une base de $E^{H\cap M}$ en une base de E, on voit que $E_B^{H\cap M}$ est un B-module libre de rang égal à la dimension de $E^{H\cap M}$. On sait que $(V_B)_{P'}^{H\cap M}$ possède une filtration finie dont les sous-quotients sont des B-modules libres isomorphes à $E_B^{H\cap M}$. On en déduit que $(V_B)_{P'}^{H\cap M}$ est libre de même rang que les espaces $(V_\chi)_{P'}^{H\cap M}$ ou $(V_{\chi^{-1}}^\vee)_{P'}^{H\cap M}$, $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$. Il en est de même pour $(V_B)_{\overline{P'}}^{H\cap M}$.

Fixons des bases $\{v_i\}_{i\in I}$ et $\{v_i^\vee\}_{i\in I}$ de $S_{P'}^H(V_B)$ et $S_{\overline{P'}}^H(V_{B^\vee}^\vee)$. Il suffit de montrer que la matrice $(< v_i, v_j^\vee >_B)_{i,j}$ est inversible, i.e. que son déterminant d appartient à $B^\times$. Or, dans le cas contraire d serait contenu dans un idéal maximal m_χ de B correspondant à un point χ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$. En spécialisant en χ, il en résulterait que la forme bilinéaire $\mathrm{sp}_\chi(<,>_B)$ restreinte à $S_{P'}^H(V_\chi) \times S_{\overline{P'}}^H(V_{\chi^{-1}}^\vee)$ serait dégénérée. Ceci est faux (cf. [C] théorème 4.2.4). $\square$

3.3 Notons $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle de σ. Rappelons que toute représentation lisse E' de M admet une décomposition $E' = E'(\mathcal{O}) \oplus E'(\mathrm{hors}\, \mathcal{O})$, telle que tout sous-quotient de $E'(\mathcal{O})$ soit dans $\mathcal{O}$ et qu'aucun sous-quotient de $E'(\mathrm{hors}\, \mathcal{O})$ ne le soit.

Pour $P' \in \mathcal{P}(M)$, notons $S_{P'}^H(V_B)(\mathcal{O})$ le sous-B-module de $S_{P'}^H(V_B)$, formé des éléments à image dans $(V_B)_{P'}^{H\cap M}(\mathcal{O})$. Définissons de façon analogue $S_{\overline{P'}}^H(V_{B^\vee}^\vee)(\mathcal{O}^\vee)$, $S_{P'}^H(V_\chi)$ $(\mathrm{hors}\, \mathcal{O})$ etc.

3.3.1 Lemme: *Les espaces $S_{P'}^H(V_B)(\mathcal{O})$ et $S_{\overline{P'}}^H(V_{B^\vee}^\vee)(\mathrm{hors}\, \mathcal{O}^\vee)$ sont orthogonaux.*

Preuve: Soient $v \in S_{P'}^H(V_B)(\mathcal{O})$ et $v^\vee \in S_{\overline{P'}}^H(V_{B^\vee}^\vee)(\mathrm{hors}\, \mathcal{O}^\vee)$. Il suffit de montrer que $\mathrm{sp}_{\sigma'}(< v, v^\vee >_B) = 0$, si $\sigma' \in \mathcal{O}$ est en position générale. Fixons un tel σ'. On est donc ramené à montrer que $< v, v^\vee >= 0$ pour $v \in S_{P'}^H(V_{\sigma'})(\mathcal{O})$ et $v^\vee \in S_{\overline{P'}}^H(V_{\sigma'^\vee}^\vee)(\mathrm{hors}\, \mathcal{O}^\vee)$. Rappelons (cf. [C] paragraphe 4) qu'il existe un produit bilinéaire M-équivariant $<,>_{P'}$ sur $j_{P'}(V_{\sigma'}) \times j_{\overline{P'}}(V_{\sigma'^\vee}^\vee)$ tel que

$$< v, v^\vee >=< j_{P'}(v), j_{\overline{P'}}(v^\vee) >_{P'} .$$

Comme $j_{P'}(V_{\sigma'}) \simeq \bigoplus_{w\in W(M,M)} wE_{\sigma'}$ et que $j_{\overline{P'}}(V_{\sigma'^\vee}^\vee) \simeq \bigoplus_{w\in W(M,M)} wE_{\sigma'^\vee}^\vee$ par choix de σ', il suffit de considérer le cas $j_{P'}(v) \in wE_{\sigma'}$ et $j_{\overline{P'}}(v^\vee) \in w'E_{\sigma'^\vee}^\vee$. On a nécessairement $w \neq w'$. Les espaces wE_σ et $w'E_{\sigma'}$ n'ont donc pas d'entrelacement, d'où $< j_{P'}(v), j_{\overline{P'}}(v^\vee) >_{P'}= 0$. $\square$

3.3.2 Corollaire: *Les B-modules libres $S_{P'}^H(V_B)(\mathcal{O})$ et $S_{\overline{P'}}^H(V_{B^\vee}^\vee)(\mathcal{O}^\vee)$ sont en dualité par $<,>_B$.*

Preuve: Il suffit de rappeler que $S_{P'}^H(V_B) = S_{P'}^H(V_B)(\mathcal{O}) \oplus S_{P'}^H(V_B)(\text{hors}\,\mathcal{O})$. $\square$

3.4 On suppose dans cette section que $E^{H\cap M} \neq 0$.

3.4.1 Lemme: *Soit $P' \in \mathcal{P}(M)$. Tout sous-quotient non nul V' de V_B en tant que G-module vérifie $V'_{P'}(\mathcal{O}) \neq 0$.*

Preuve: D'après [BD] proposition 2.8, on a une injection

$$V' \to \bigoplus_{P''\in\mathcal{P}(M)} i_{P''}^G(V'_{P''}(\mathcal{O})).$$

Par suite, $V'_{P''}(\mathcal{O}) \neq 0$ pour au moins un $P'' \in \mathcal{P}(M)$. Ceci équivaut à dire qu'il existe $\sigma'' \in \mathcal{O}$ avec

$$0 \neq \mathrm{Hom}_M(V'_{P''}, \sigma'') = \mathrm{Hom}_G(V', i_{P''}^G\sigma'').$$

Déduisons-en $\sigma' \in \mathcal{O}$ avec $\mathrm{Hom}_M(V'_{P'}, \sigma') \neq 0$: Par itération, on se ramène à P'' et P' adjacents. Il faut distinguer deux cas:

Si $wP'' \neq P'$ ou $w\sigma'' \notin \mathcal{O}$ pour tout $w \in W(M,M)$, l'opérateur d'entrelacement $J_{P'|P''}(\sigma'')$ est bien défini et inversible, d'où par composition un élément non nul de $\mathrm{Hom}_G(V', i_{P'}^G\sigma'') = \mathrm{Hom}_M(V'_{P'}, \sigma'')$.

Dans le cas contraire, choisissons $w \in W(M,M)$ et $\sigma' \in \mathcal{O}$ avec $i_{wP''}^G(w\sigma'') = i_{P'}^G\sigma'$. En composant avec $\lambda(w)$, on trouve donc un élément non nul de $\mathrm{Hom}_G(V', i_{P'}^G\sigma')$.

Ceci prouve bien que $V'_{P'}(\mathcal{O}) \neq 0$. $\square$

3.4.2 Proposition: *Tout sous-G-module V' de V_B est engendré par $V' \cap S_{P'}(V_B^H)(\mathcal{O})$.*

Preuve: Notons V'' le sous-G-module engendré par cet ensemble. On a l'égalité ${V''_{P'}}^{H\cap M}(\mathcal{O}) = {V'_{P'}}^{H\cap M}(\mathcal{O})$, d'où $(V'/V'')_{P'}^{H\cap M}(\mathcal{O}) = 0$ par exactitude du foncteur de Jacquet. Par choix de H, on déduit de 3.4.1 que $V' = V''$. $\square$

4. Rappelons que les ensembles Θ et $\mathcal{H}(\Theta)$ ont été définis en A.3. On dira qu'un élément φ de $\mathcal{H}(\Theta)$ a la propriété $(\mathcal{P})$ en $(P,\mathcal{O})$, si $\varphi_{P,\mathcal{O}}$ vérifie les conclusions de la proposition 0.2. On dira également que $\varphi_{P,\mathcal{O}}$ a la propriété $(\mathcal{P})$.

Fixons pour tout $(P,\mathcal{O}) \in \Theta$ un sous-groupe ouvert compact distingué $H = H(\mathcal{O})$ de K admettant une décomposition d'Iwahori par rapport à tout couple parabolique semi-standard et tel que tout élément de $\mathcal{O}$ admette des invariants par rapport à $H \cap M$. On peut par ailleurs supposer $H(\mathcal{O}') = H$ si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont conjugués, ce que l'on fera désormais.

Pour $(P', \mathcal{O}') \in \Theta$, $\mathcal{O}'$ conjugué à $\mathcal{O}$, on peut donc parler, grâce à 3.3.2, de la projection $\varphi_{P,\mathcal{O}}^{H,P',\mathcal{O}'}$ de $i_P^G E_{\mathcal{O},B}$ sur $S_{P'}^H(i_P^G E_{\mathcal{O},B})(\mathcal{O}')$ de noyau égal à l'intersection des noyaux des éléments de $S_{\overline{P'}}^H(i_P^G E_{\mathcal{O}^\vee,B^\vee})(\mathcal{O}'^\vee)$. Si $(P', \mathcal{O}') = (P, \mathcal{O})$, on écrira plus simplement $\varphi_{P,\mathcal{O}}^H$.

4.1 Soit $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$, $H = H(\mathcal{O})$. Rappelons que tout élément φ_B de $E_{\mathcal{O},B} \otimes_B E_{\mathcal{O}^\vee,B^\vee}$ ou de $i_P^G E_{\mathcal{O},B} \otimes_B i_P^G E_{\mathcal{O}^\vee,B^\vee}$ correspond par l'application de spécialisation sp_χ à une application polynomiale sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ à valeurs respectivement dans $E_{\mathcal{O}} \otimes E_{\mathcal{O}^\vee}$ ou dans $i_{P\cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P\cap K}^K E_{\mathcal{O}^\vee}$, et vice versa. On écrira $\varphi_B(\sigma) = \mathrm{sp}_\sigma \varphi_B$.

4.1.1 Lemme: *Soient $P'' \in \mathcal{P}(M)$, $\sigma \in \mathcal{O}$ et $w \in W^G$. Supposons σ en position générale. Alors on trouve pour $(P', \mathcal{O}') \in \Theta$, $\mathcal{O}'$ conjugué à $\mathcal{O}$,*
(i) $J_{P''|P}(\sigma)(S_{P'}^H(i_P^G E_\sigma)(\mathcal{O}')) = S_{P'}^H(i_{P''}^G E_\sigma)(\mathcal{O}')$;
(ii) $\lambda(w)(S_{P'}^H(i_P^G E_\sigma)(\mathcal{O}')) = S_{P'}^H(i_{wP}^G w E_\sigma)(\mathcal{O}')$.

Preuve: Utilisant la définition de $S_{P'}^H$, on constate facilement que les inclusions "$\subseteq$" sont vraies si on enlève "$(\mathcal{O}')$". On vérifie alors la relation "$\subseteq$" par un calcul direct à l'aide de l'isomorphisme de la proposition 1.3, où on applique la formule de produit pour les opérateurs d'entrelacement. L'inclusion inverse en résulte par symétrie, puisque les opérateurs considérés sont bijectifs. $\square$

4.1.2 Lemme: *Avec les notations du lemme* 4.1.1, *on trouve*
(i) $J_{P''|P}(\sigma)\varphi_{P,\mathcal{O}}^{H,P',\mathcal{O}'}(\sigma) = \varphi_{P'',\mathcal{O}}^{H,P',\mathcal{O}'}(\sigma) J_{P''|P}(\sigma)$;
(ii) $\lambda(w)\varphi_{P,\mathcal{O}}^{H,P',\mathcal{O}'}(\sigma) = \varphi_{wP,w\,\mathcal{O}}^{H,P',\mathcal{O}'}(w\sigma)\lambda(w)$.

Preuve: Cela résulte essentiellement du lemme précédent et en appliquant la proposition 1.3. $\square$

4.2 Lemme: *Pour tout $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$, il existe un élément φ dans $\mathcal{H}(\Theta)$ avec $\varphi_{P,\mathcal{O}} = \varphi_{P,\mathcal{O}}^{H(\mathcal{O})}$.*

Preuve: Si $\mathcal{O}' = w\,\mathcal{O}\,w^{-1}$ avec $w \in W$, posons $\varphi_{P',\mathcal{O}'} = \varphi_{P',\mathcal{O}'}^{H,P,\mathcal{O}}$. Sinon $\varphi_{P',\mathcal{O}'} = 0$.
Les propriétés 1) et 2) du théorème 0.1 sont vérifiées par définition de $\varphi_{P',\mathcal{O}'}^{H,P,\mathcal{O}}$.
Les propriétés 3) et 4) résultent des égalités (i) et (ii) du lemme 4.1.2. $\square$

4.3 Posons $W(M, \mathcal{O}) = \{w \in W(M, M) | w\,\mathcal{O} = \mathcal{O}\}$.

Lemme: *Supposons: si on a un élément φ de $\mathcal{H}(\Theta)$ et $(P, \mathcal{O})$ vérifiant $\varphi_{P,\mathcal{O}} = \varphi_{P,\mathcal{O}}^H$ avec $H = H(\mathcal{O})$, alors cet élément vérifie ($\mathcal{P}$) en $(P, \mathcal{O})$.*
Alors la propriété ($\mathcal{P}$) est vérifiée pour tout φ de $\mathcal{H}(\Theta)$ en tout $(P, \mathcal{O})$.

Preuve: Fixons $(P,\mathcal{O})$. Posons $V_B \times V^\vee_{B^\vee} = i_P^G E_{\mathcal{O},B} \times i_P^G E_{\mathcal{O}^\vee,B^\vee}$. Montrons d'abord que tout élément φ de $\mathcal{H}(\Theta)$ qui vérifie $\varphi_{P,\mathcal{O}} \in S_P^H(V_B)(\mathcal{O}) \otimes_B S_{\overline{P}}^H(V^\vee_{B^\vee})(\mathcal{O}^\vee)$ a la propriété $(\mathcal{P})$ en $(P,\mathcal{O})$:

En effet, de 4.2 et de nos hypothèses, il résulte l'existence d'une application polynomiale $\xi_{P,\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$ telle que, pour $\sigma \in \mathcal{O}$,

$$\varphi^H_{P,\mathcal{O}}(\sigma) = \sum_{w \in W(M,\mathcal{O})} (J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w))\xi_{P,\mathcal{O}}(w^{-1}\sigma).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\varphi_{P,\mathcal{O}}(\sigma) =& \varphi_{P,\mathcal{O}}(\sigma)\varphi^H_{P,\mathcal{O}}(\sigma) \\ =& \sum_{w \in W(M,\mathcal{O})} (J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w))\varphi_{\overline{P},\mathcal{O}}(w^{-1}\sigma)\xi_{P,\mathcal{O}}(w^{-1}\sigma),\end{aligned}$$

le produit dans la première ligne désignant la composition dans l'algèbre $\mathrm{End}(i_P^G E_\sigma)$. Comme $\sigma \mapsto \varphi_{\overline{P},\mathcal{O}}(w^{-1}\sigma)$ est polynomiale, on a une relation du type voulu.

L'ensemble des éléments $\varphi_{P,\mathcal{O}}$ de $V_B \otimes V^\vee_{B^\vee}$ qui sont la composante en $(P,\mathcal{O})$ d'un élément de $\mathcal{H}(\Theta)$ est un sous-$G \times G$-module de $V_B \otimes V^\vee_{B^\vee}$. Le sous-ensemble formé des éléments $\varphi_{P,\mathcal{O}}$ qui vérifient par ailleurs la propriété $(\mathcal{P})$ en est un $G \times G$-sous-module. Par ce qui précède, ils ont la même intersection avec $S_P^H(V_B)(\mathcal{O}) \otimes S_{\overline{P}}^H(V^\vee_{B^\vee})(\mathcal{O}^\vee)$ qui est non nulle par 4.2. Il résulte alors de 3.4.2 appliqué au sous-groupe parabolique $P \times \overline{P}$ de $G \times G$ et à la représentation de $M \times M$ d'espace $E_{\mathcal{O},B} \otimes E_{\mathcal{O}^\vee,B^\vee} \simeq (E_\mathcal{O} \otimes E_{\mathcal{O}^\vee})_B$ que ces deux ensembles sont en fait égaux, d'où le lemme. $\square$

5. Pour terminer la preuve de la proposition 0.2, il reste à montrer que $\varphi^{H(\mathcal{O})}_{P,\mathcal{O}}$ a la propriété $(\mathcal{P})$ pour tout $(P,\mathcal{O}) \in \mathcal{H}(\Theta)$. Fixons $(P,\mathcal{O})$. Posons $E = E_\mathcal{O}$ et $H = H(\mathcal{O})$. On notera parfois, pour $\sigma \in \mathcal{O}$, par E_σ l'espace E s'il est muni de la représentation σ.

5.1 Lemme: *Soient σ dans $\mathcal{O}$, $P' \in \mathcal{P}(M)$ et v un élément de $(i^K_{P'\cap K}E)^H$ à support dans $(P' \cap K)H$. Soit $a \in A_M$ vérifiant les propriétés de la proposition du numéro 2 relatives à $\overline{P'}$ et $i^G_{P'}E_\sigma$.*

Alors $(i^G_{P'}\sigma)(1_{HaH})v$ est un élément non nul de $S^H_{\overline{P'}}(i^G_{P'}E_\sigma)$ à support dans $(P' \cap K)H$ dont la valeur en 1 est proportionelle à $\sigma(a)v(1)$.

Preuve: Notons v_σ l'élément de $i^G_{P'}E_\sigma$ dont la restriction à K est égal à v. Écrivons $P' = MU'$. Pour $k \in K$, on trouve

$$((i^G_{P'}\sigma)(1_{HaH})v)(k) = \frac{\mathrm{mes}(HaH)}{\mathrm{mes}(H)} \int_H (i^G_{P'}\sigma(ha)v)(k)dh = \frac{\mathrm{mes}(HaH)}{\mathrm{mes}(H)} \int_H v_\sigma(kha)dh.$$

Pour que $kha \in \mathrm{supp}(v_\sigma)$, il faut que $kh \in P'aHa^{-1} = P'a(H \cap \overline{U'})a^{-1}$. Comme a est positif pour $\overline{P'}$, $a(H \cap \overline{U'})a^{-1} \subseteq H \cap \overline{U'}$, d'où $k \in (P' \cap K)H$. La fonction $(i^G_{P'}\sigma)(1_{HaH})v$ est donc bien à support dans $(P' \cap K)H$.

Sa valeur en 1 est $\dfrac{\mathrm{mes}(HaH)}{\mathrm{mes}(H)}\displaystyle\int_H v_\sigma(ha)dh$. Après un calcul élémentaire qui utilise la décomposition de H par rapport à P' et $\overline{U'}$, on trouve la deuxième assertion du lemme. $\square$

5.2 Fixons une base $\{e_i\}_{i\in I}$ de $E^{H\cap M}$. Notons $\{e_i^\vee\}_{i\in I}$ la base duale de $(E^\vee)^{H\cap M}$, et v_i (resp. $v_i^\vee$) l'élément de $(i_{\overline{P}\cap K}^K E)^H$ (resp. $(i_{P\cap K}^K E^\vee)^H$) à support dans $(\overline{P}\cap K)H$ (resp. $(P\cap K)H$) vérifiant $v_i(1)=e_i$ (resp. $v_i^\vee(1)=e_i^\vee$).

5.2.1 Lemme: *Soit σ un point en position générale de $\mathcal{O}$. Alors $v_i\in S_P^H(i_{\overline{P}}^G E_\sigma)(\mathcal{O})$ et de plus, si $w\in W(M,M)$,*

$$((J_{P|\overline{wP}}(w\sigma)\lambda(w))v_i)(1)=c_i\begin{cases}0, & si\ w\neq 1;\\ e_i, & si\ w=1,\end{cases}$$

où c_i est une constante non nulle qui ne dépend pas du choix de σ.

Preuve: D'après le lemme 5.1, $v_i\in S_P^H(i_{\overline{P}}^G E_\sigma)$. Grâce à la proposition 1.3, il suffit alors de prouver la dernière assertion. Soit $w\in W(M,M)$. On a

$$((J_{P|\overline{wP}}(w\sigma)\lambda(w))v_i)(1)=\int_{U\cap wUw^{-1}} v_{i,\sigma}(w^{-1}u)du,$$

si cet opérateur d'entrelacement est défini par des intégrales convergentes. Par la décomposition de Bruhat, $w^{-1}u\in\overline{P}H$ seulement si $w=1$. Alors $\int_{U\cap wUw^{-1}} v_{i,\sigma}(u)du=\mathrm{mes}(H\cap U)e_i$. Le cas général s'en déduit par prolongement analytique. $\square$

5.3 Lemme: *Soit $\sigma\in\mathcal{O}$ en position générale. Les ensembles $\{(J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w))\, v_i\}_{w\in W(M,\mathcal{O}),i\in I}$ et $\{(J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w))v_i^\vee\}_{w\in W(M,\mathcal{O}),i\in I}$ forment des bases de $S_P^H(i_P^G E_\sigma)$ $(\mathcal{O})$ et $S_{\overline{P}}^H(i_P^G E_{\sigma^\vee}^\vee)(\mathcal{O}^\vee)$ respectivement. On a*

$$<(J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w))v_i,(J_{P|w'P}(\sigma^\vee)\lambda(w'))v_j^\vee>=c_{w,i}\delta_{w,w'}\delta_{i,j},$$

où $c_{w,i}$ est une constante non nulle qui ne dépend pas du choix de σ.

Preuve: On va utiliser l'isomorphisme de la proposition 1.3. Soit $w'\in W(M,\mathcal{O})$. On trouve

$$\begin{aligned}(J_{P|w'P}(w'\sigma)\lambda(w')J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w)v_i)(1)=&(J_{P|w'P}(w'\sigma)J_{w'P|\overline{w'wP}}(w'\sigma)\lambda(w'w)v_i)(1)\\ =&\,j_{P|w'P|\overline{w'wP}}(w'\sigma)(J_{P|\overline{w'wP}}(w'\sigma)\lambda(w'w)v_i)(1).\end{aligned}$$

Grâce à 5.2.1, ceci n'est non nul que si $w'=w^{-1}$, et alors $(J_{P|\overline{w'wP}}(w'\sigma)\lambda(w'w)v_i)(1)=c_ie_i\in w^{-1}E$. Par ailleurs, $j_{P|w^{-1}P|\overline{P}}(w^{-1}\sigma)=1$. On a donc bien une base de $S_P^H(i_P^G E_\sigma)$ $(\mathcal{O})$, puisque son image est une base de $\bigoplus_{w\in W(M,\mathcal{O})} wE_\sigma$.

Soient $w, w' \in W(M,\mathcal{O})$, $i,j \in I$. Alors

$$\begin{aligned}
< (J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w))v_i, (J_{P|w'P}(\sigma^\vee)\lambda(w'))v_j^\vee > &= < \lambda(w'^{-1})J_{w'P|P}(\sigma)J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w)v_i, v_j^\vee > \\
&= < J_{P|w'^{-1}P}(w'^{-1}\sigma)J_{w'^{-1}P|\overline{w'^{-1}wP}}(w'^{-1}\sigma)\lambda(w'^{-1}w)v_i, v_j^\vee > \\
&= j_{P|w'^{-1}|\overline{w'^{-1}wP}}(w'^{-1}\sigma) < J_{P|\overline{w'^{-1}wP}}(w'^{-1}\sigma)\lambda(w'^{-1}w)v_i, v_j^\vee > .
\end{aligned}$$

Le support de $v_j^\vee$ étant $(P\cap K)H$ et l'élément à gauche étant invariant par H, ceci n'est non nul que si $(J_{P|\overline{w'^{-1}wP}}(w'^{-1}\sigma)\lambda(w'^{-1}w)v_i)(1) \neq 0$. Par 5.2.1, ceci n'est possible que si $w = w'$. Dans ce cas $j_{P|w^{-1}P|\overline{P}}(w^{-1}\sigma) = 1$ et l'expression ci-dessus devient par 5.2.1

$$\int_{M\cap K}\int_{U\cap K}\int_{H\cap\overline{U}} c_i < (w^{-1}\sigma)(m)e_i, (w^{-1}\sigma^\vee)(m)e_j^\vee > d\bar{u}dudm = \mathrm{mes}(H\cap\overline{U})c_i\delta_{i,j},$$

d'où le lemme. $\square$

5.4 Posons $\xi_w(\sigma) = \sum_{i\in I} c_{w,i}^{-1} v_i \otimes v_i^\vee$ pour tout $\sigma \in \mathcal{O}$. On a donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{w\in W(M,\mathcal{O})} (J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w))\xi_w(w^{-1}\sigma) \\
= &\sum_{w\in W(M,\mathcal{O})} c_{w,i}^{-1}(J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w)v_i \otimes J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w)v_i^\vee).
\end{aligned}$$

On déduit de 5.3 que ceci est égal à $\varphi_{P,\mathcal{O}}^H(\sigma)$ pour σ en position générale. Par prolongement analytique, ces deux applications sont donc égales.

Lemme: *Posons $\xi(\sigma) = |W(M,\mathcal{O})|^{-1}\sum_{w\in W(M,\mathcal{O})} \xi_w(\sigma)$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{O}$, on a*

$$\varphi_{P,\mathcal{O}}^H(\sigma) = \sum_{w\in W(M,\mathcal{O})} (J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w))\ \xi(w^{-1}\sigma).$$

Preuve: En utilisant les règles de composition pour les opérateurs d'entrelacement, ainsi que les propriétés de $\varphi_{P,\mathcal{O}}^H$ relatives aux opérateurs d'entrelacement, on trouve en effet:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{w,w'\in W(M,\mathcal{O})} (J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w))\xi_{w'}(w^{-1}\sigma) \\
&= \sum_{w,w'\in W(M,\mathcal{O})} (J_{P|\overline{ww'P}}(\sigma)\lambda(ww') \otimes J_{P|ww'P}(\sigma^\vee)\lambda(ww'))\xi_{w'}(w'^{-1}w^{-1}\sigma) \\
&= \sum_{w\in W(M,\mathcal{O})} (J_{P|wP}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w)) \sum_{w'\in W(M,\mathcal{O})} j_{P|wP|\overline{ww'P}}(\sigma)^{-1} \\
&\qquad j_{P|wP|ww'P}(\sigma)^{-1}(J_{P|\overline{w'P}}(w^{-1}\sigma)\lambda(w') \otimes J_{P|w'P}(w^{-1}\sigma^\vee)\lambda(w'))\xi_{w'}(w'^{-1}w^{-1}\sigma) \\
&= \sum_{w\in W(M,\mathcal{O})} j_{P|wP}(\sigma)^{-1}(J_{P|wP}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w))\varphi^H_{P,\mathcal{O}}(w^{-1}\sigma) \\
&= |W(M,\mathcal{O})| \; \varphi^H_{P,\mathcal{O}}(\sigma)
\end{aligned}
$$

$\square$

Références bibliographiques:

[BD] *Le "centre" de Bernstein* - J.N. BERNSTEIN (rédigé par P.DELIGNE) dans Représentations des groupes réductifs sur un corps local, par J.N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, M.-F. Vignéras; Travaux en cours, Hermann, Paris 1984.

[BZ] *Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non archimedean field,* J. BERNSTEIN et A. ZELEVINSKY, Uspekhi Mat. Nauk. **31**, 3 (1976), 5-70.

[C] *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups* - W. CASSELMAN, non publié.

[W] *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques - d'après Harish-Chandra* , J.-L. WALDSPURGER, à paraître.