Prof. Dr. Konrad Gröger

Wissenschaftlicher Werdegang

1953–1958	Studium der Mathematik an der Humboldt–Universität zu Berlin
1958–1960	Aspirant am Forschungsinstitut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften
1965–1970	wissenschaftlicher Mitarbeiter des Zentralinstituts für Physikalische Chemie der Akademie der Wissenschaften
1968	Promotion (Dr. rer. nat.) an der Humboldt–Universität zu Berlin
1970–1991	wissenschaftlicher Mitarbeiter des Karl-Weierstraß–Instituts der Akademie der Wissenschaften
1973	Promotion B an der Akademie der Wissenschaften der DDR
1990	Honorarprofessor für Analysis an der Humboldt-Universität zu Berlin
seit 1992	wissenschaftlicher Mitarbeiter des Instituts für Angewandte Analysis und Stochastik im Forschungsverbund Berlin e.V. (jetzt Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik)
seit 1993	Professor (C4) für Mathematik/Angewandte Analysis an der Humboldt–Universität zu Berlin

Projekt 1: **Elektro-Reaktions-Diffusionssysteme in Heterostrukturen**

Beteiligte Wissenschaftler: Prof. Dr. H. Gajewski, Priv.-Doz. Dr. R. Hünlich, Dr. A. Glitzky (alle Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik)

Es werden Gleichungen untersucht, die die Umverteilung elektrisch geladener Spezies in Heterostrukturen durch Diffusion und Reaktion unter Berücksichtigung ihrer elektrischen Wechselwirkung beschreiben. Bezeichnet man mit u_i, ζ_i die Konzentration und das elektrochemische Potential der i-ten Spezies ($i = 1, \ldots, m$), und mit v_0 das elektrostatische Potential, so lauten im einfachsten Fall die zu lösenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \operatorname{div}\,(d_i u_i \operatorname{grad} \zeta_i) + R_i = 0 \quad \text{in} \quad I\!R_+ \times \Omega,$$

$$d_i u_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu} + R_i^\Gamma = 0 \text{ auf } I\!R_+ \times \Gamma, \quad u_i(0) = u_i^0 \quad \text{in} \quad \Omega;$$

$$-\operatorname{div}\,(\varepsilon \operatorname{grad} v_0) = f + \sum_{i=1}^m q_i u_i \quad \text{in} \quad I\!R_i \times \Omega, \quad \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \tau v_0 = f^\Gamma \quad \text{auf} \quad I\!R_+ \times \Gamma.$$

Hierbei sind d_i, ε, τ, f und f^Γ ortsabhängige Materialdaten und R_i bzw. R_i^Γ Reaktionsraten im Volumen bzw. am Rand, für die vom Massenwirkungsgesetz ausgehende Ansätze gemacht werden. Der Zusammenhang zwischen Konzentrationen und Potentialen schließt als Spezialfall die Gleichungen $\zeta_i = \log \frac{u_i}{u_i^*} + q_i v_0$, $i = 1, \ldots, m$, ein, die der Boltzmann–Statistik entsprechen. Hier sind $u_1^*, \ldots, u_m^*$ ortsabhängige Bezugsdichten und $q_1, \ldots, q_m$ die konstanten spezifischen Ladungen der Spezies.

Bisher sind befriedigende Ergebnisse nur im räumlich zweidimensionalen Fall erreicht worden, weil a–priori–Abschätzungen für Lösungen skalarer elliptischer Probleme mit nichtglatten Daten, wie sie hier benötigt werden, nur in diesem Falle verfügbar sind.

Zunächst wird gezeigt, daß die freie Energie

$$F = \int_\Omega \left\{ \frac{\varepsilon}{2} |\text{grad}\, v_0|^2 + \sum_{i=1}^m \left(u_i (\log \frac{u_i}{u_i^*} - 1) + u_i^* \right) \right\} dx + \int_\Gamma \frac{\tau}{2} v_0^2 d\Gamma$$

entlang von Trajektorien des Systems monoton fällt. Ein neues Resultat ist eine Abschätzung der freien Energie nach oben durch die Dissipationsrate

$$D = \sum_{i=1}^m \left\{ \int_\Omega \left(d_i u_i |\text{grad}\, \zeta_i|^2 + R_i \zeta_i \right) dx + \int_\Gamma R_i^\Gamma \zeta_i d\Gamma \right\}$$

(siehe [8]). Das Gesamtproblem wird wie folgt behandelt: Zuerst löst man mittels einer impliziten Zeitdiskretisierung ein System, das aus dem Ausgangssystem durch eine Regularisierung hervorgeht. Mit Hilfe von Abschätzungen, die nicht von der Regularisierung abhängen, wird dann gezeigt, daß man von einer Lösung des regularisierten Systems zu einer des Ausgangssystems kommt. Für den Nachweis der Einzigkeit der Lösung sind weitere Regularitätsaussagen ausschlaggebend (siehe [7]).

Projekt 2: **Regularitäts- und Beschränktheitsaussagen für Lösungen von Randwertproblemen und Rand-Anfangswertproblemen bei nichtglatten Daten**

Beteiligte Wissenschaftler: Dr. sc. J. Rehberg (Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik), Prof. Dr. A. Pankov (Polytechnisches Institut Vinnitsa, Ukraine)

Randwertprobleme und Rand-Anfangswertprobleme, die reale Sachverhalte modellieren, enthalten häufig nichtglatte Daten, etwa unstetige Koeffizienten und sprunghafte Änderungen der Randbedingungen. Daher sollten grundlegende Aussagen über derartige Probleme von möglichst schwachen Anforderungen an die Daten ausgehen.

Für Evolutionsgleichungen zu nichtglatten und im allgemeinen nichtlinearen elliptischen Differentialoperatoren zweiter Ordnung ist in [1] unter relativ schwachen Voraussetzungen bewiesen worden, daß die Lösungen von Anfangswertaufgaben für ein $p > 2$ die Eigenschaften $u \in L^p(S; W^{1,p})$, $\frac{du}{dt} \in L^p(S; W^{-1,p})$ besitzen. Hierbei bezeichnet S ein vorgegebenes Zeitintervall, $W^{1,p}$ einen den Randbedingungen angepaßten Unterraum des Sobolev–Raums $W^{1,p}(\Omega)$ und $W^{-1,p}$ den zu $W^{1,p'}$ dualen Raum. Anstelle einer Anfangsbedingung kann auch die Fastperiodizität gefordert werden (vgl. [5]).

Ausgehend von den Resultaten in [1] kann man im Zweidimensionalen für eine große Klasse von Rand-Anfangswertaufgaben die zeitlich lokale Existenz von Lösungen garantieren, die Eigenschaften der Form $u \in L^q(S; W^{1,p})$, $\frac{du}{dt} \in L^q(S; W^{-1,p})$ besitzen. Für $p > 2$ und hinreichend große q sind derartige Lösungen Hölder–stetig. Angestrebt wird ein zeitlich lokales Existenz- und Einzigkeitsresultat, dessen Bedingungen einfach nachprüfbar sind und das allgemein genug ist, um Reaktions-Diffusionssysteme zu erfassen, wie sie etwa bei der Beschreibung von Chemotaxisprozessen auftreten. Dieses Resultat sollte in Verbindung mit möglichst einfachen a–priori–Abschätzungen auch die zeitlich globale Lösbarkeit garantieren. Dieses Ziel ist noch nicht erreicht. Es fehlt noch eine angemessene Einbeziehung der Glättungseigenschaften parabolischer Operatoren in die Überlegungen.

In [3] werden lineare Randwertprobleme der Form

$$\sum_{j,k=1}^{2} D_j(a_{jk} D_k u) + a_0 u = f \text{ in } \Omega, \ \sum_{j,k=1}^{2} \nu_j a_{jk} D_k u + bu = \varphi \text{ auf } \Gamma, \ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \backslash \Gamma;$$

behandelt, in [6] analoge nichtlineare Randwertprobleme. Unter der Voraussetzung, daß $f \log |f|$ und $\varphi \log |\varphi|$ über Ω bzw. Γ integrierbar sind, wird die Beschränkheit und Stetigkeit der Lösungen nachgewiesen. Hilfsmittel ist die Einführung einer neuen Klasse von Interpolationsräumen für Sobolev–Räume.

Publikationen

[1] Gröger, K.: $W^{1,p}$-estimates of solutions to evolution equations corresponding to nonsmooth second order elliptic differential operators. Nonlinear Analysis 18 (1992), 569-577.

[2] Gröger, K.; Rehberg, J.: Uniqueness for the two–dimensional semiconductor equations in case of high carrier densities. Math. Zeitschrift 213 (1993), 523-530.

[3] Gröger, K.: Boundedness and continuity of solutions to linear elliptic boundary value problems in two dimensions. Math. Ann. 298 (1994), 719-727 .

[4] Glitzky, A.; Gröger, K.; Hünlich, R.: Existence, uniqueness, and asymptotic behaviour of solutions to equations modelling transport of dopants in semiconductors. Bonner Mathematische Schriften 258 (1993), 49-78.

[5] Gröger, K.; Pankov, A.: $W^{1,p}$–regularity of almost periodic solutions to nonlinear parabolic equations (russian). Dokl. Akad. Nauk 344 (1995), 305-308.

[6] Gröger, K.: Boundedness and continuity of solutions to second order elliptic boundary value problems. Nonlinear Analysis 26 (1996), 539-549.

[7] Gajewski, H.; Gröger, K.: Reaction–diffusion processes of electrically charged species. Math. Nachr. 177 (1996), 109-130.

[8] Glitzky, A.; Gröger, K.; Hünlich, R.: Free energy and dissipation rate for reaction–diffusion processes of electrically charged species. Preprint des Weierstraß–Instituts für Angewandte Analysis und Stochastik 207 (1995). Erscheint in: Applicable Analysis.

Projekt 3: **Zeitabhängige Halbleitergleichungen gekoppelt mit den Maxwellgleichungen**

Beteiligte Wissenschaftler: Dr. F. Jochmann (DFG-Forschungsstipendium ab 1.1.1996)

Untersucht werden die zeitabhängigen Drift-Diffusionsgleichungen, die den Ladungstransport in Halbleitergleichungen beschreiben:

$$\partial_t \rho_k(t,x) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_k(t,x) - R(x, \rho_1(t,x), \rho_2(t,x)), \tag{0.1}$$

$$\mathbf{j}_k(t,x) = -D_k(x)\nabla\rho_k(t,x) - (-1)^k \mu_k(x)\rho_k(t,x)\mathbf{E}(t,x) \text{ für } k \in \{1,2\}, \tag{0.2}$$

$$\varepsilon(x)\partial_t \mathbf{E}(t,x) = \text{ curl } \mathbf{H}(t,x) + \mathbf{j}_2(t,x) - \mathbf{j}_1(t,x), \tag{0.3}$$

$$\mu(x)\partial_t \mathbf{H}(t,x) = - \text{ curl } \mathbf{E}(t,x), \tag{0.4}$$

$$\text{div } (\varepsilon(x)\mathbf{E}(t,x)) = \rho_1(t,x) - \rho_2(t,x) + C(x), \text{ div } (\mu(x)\mathbf{H}(t,x)) = 0. \tag{0.5}$$

Mit ρ_1, ρ_2 werden hier die Konzentrationen der Löcher bzw. Elektronen bezeichnet. Das elektromagnetische Feld $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ genügt den Maxwellschen Gleichungen 0.3-0.5. D_k, μ_k, ε und μ sind i.a. ortsabhängige Materialgrößen. Das obige System wird durch physikalisch motivierte gemischte Randbedingungen ergänzt. Zu den Drift-Diffusionsgleichungen, gekoppelt mit der Poisson-Gleichung, existieren bereits seit längerer Zeit umfangreiche analytische Resultate. Neu ist hier, daß die elliptische Poisson-Gleichung durch ein hyperbolisches System ersetzt wird, wodurch insbesondere Fragen der Regularität und Eindeutigkeit zum Teil erheblich komplizierter werden.

Bisher ist es gelungen, im räumlich dreidimensionalen Fall die globale Existenz schwacher Lösungen zu zeigen ([1], [2]). Ein befriedigendes Regularitäts- und Eindeutigkeitsresultat konnte bisher nur im räumlich zweidimensionalen Fall erzielt werden. Hierbei wird ein Regularitätsresultat für schwache Lösungen elliptischer Randwertprobleme mit gemischten Randbedingungen verwendet. Darüber hinaus werden die Langzeitasymptotik der Lösungen des Systems 0.1 - 0.3 und die Frage untersucht, ob die Lösungen der Drift-Diffusionsgleichungen, gekoppelt mit der Poisson-Gleichung, durch eine singuläre Störung des Systems 0.1 - 0.3 erhalten werden können.

Publikationen

[1] Jochmann, F.: Existence of weak solutions of the drift-diffusion model coupled with Maxwell's equations. J. Math. Anal. Appl. 204 (1996), 655-676.

[2] Jochmann, F.: Galerkin approximation of weak solutions of the drift-diffusion model for semiconductors coupled with Maxwell's equations. Math. Meth. Appl. Sci. Vol. 19 (1996), 1471-1488.

[3] Jochmann, F.: equations with mixed boundary conditions A compactness result for vector fields with divergence and curl in $L^q(\Omega)$ involving mixed boundary conditions. Applicable Analysis, 66 (1997), 189-203

Projekt 4: **Untersuchungen zu Modellen der Chemotaxis**

Beteiligte Wissenschaftler: Dipl.-Math. Katharina Post (Graduiertenkolleg am Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin), Prof. Herbert Gajewski, Dr. habil. Klaus Zacharias, Dr. sc. Rolf Hünlich (alle WIAS Berlin)

Gekoppelte Systeme der Art

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u - \operatorname{div}(u\chi\nabla v) + R_1(u, v) \text{ für } x \in \Omega,\, t > 0,\\ \gamma\frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta v + R_2(u, v) \text{ für } x \in \Omega,\, t > 0,\end{aligned}$$

ergänzt durch geeignete Rand-, Vorzeichen- und Anfangsbedingungen, beschreiben *Chemotaxis*, d. h. die Bewegung von Organismen, die die Tendenz haben, sich in Gebieten Ω dorthin zu bewegen, wo hohe Konzentrationen solcher Substanzen vorliegen, die von diesen Organismen selbst produziert werden. Dabei sind die $R_i\chi$ und γ gegeben.

Schwierigkeiten bei der Behandlung solcher Systeme werden insbesondere durch Cross-Diffusions-Terme der Art div $(u\chi\nabla v)$ und die Terme R_i verursacht. Strukturell ähnliche Systeme treten in der Theorie der Halbleitergleichungen und bei mechanischen Problemen auf. Ziel des Projektes ist es, entsprechende Zusammenhänge zu untersuchen und zu Verallgemeinerungen zu gelangen.