Aufgabe 1

a) Es sind die Anzahlen n_p der Gruppe G zu bestimmen. Es gilt $|G| = 21 = 7 \cdot 3$. Nach dem 3. Satz von Sylow gilt, dass $n_p \equiv_p 1$ (1). Außerdem gilt nach diesem Satz, dass für einen p-Sylow-Untergruppe $H \leq G$ gilt, dass $n_p \mid |G/H| = \frac{|G|}{|H|}$(2) (nach Lagrange). Damit ist $n_7 \in \{1, 3, 7\}$. Nur 1 erfüllt (1), also ist $n_7 = 1$. Nach gleicher Argumentation gilt $n_3 \in \{1, 7\}$. Ist G zyklisch, so muss $n_3 = 1$ sein.

b) Es ist zu zeigen, dass die Gruppe G' mit $|G'| = 50 = 5^2 \cdot 2$ nicht einfach sein kann. Nun gilt nach (2), dass $n_5 \mid \frac{|G|}{|H|} = \frac{50}{25} = 2$ und damit nach (1), dass $n_5 = 1$. Nach dem 2. Satz von Sylow gilt, dass alle p-Sylowgruppen konjugiert sind. Gibt es wie hier nur eine 5-Sylowgruppe, so folgt daraus, dass $gHg^{-1} \in G \ \forall g \in G$. Also ist diese Gruppe H mit $|H| = 25$ Normalteiler. Die Gruppe G' kann also nicht einfach sein.

Aufgabe 2

a) Sei G eine Gruppe mit $|G| = 56 = 7 \cdot 2^3$. Es gilt nach dem 3. Satz von Sylow, dass $n_p \mid |G : H|$ (1) wenn H eine p-Sylow-Untergruppe ist. Damit ist $n_7 | \frac{|G|}{|H|} = \frac{56}{7} = 8$. Weiterhin gilt nach diesem Satz, dass $n_p \equiv_p 1$ (2). Damit ist $n_7 \in \{1, 8\}$. Ebenso gilt $n_2 \in \{1, 7\}$. Wäre einer der beiden tatsächlich 1, so wäre die entsprechende p-Sylowgruppe nach dem 2. Satz von Sylow ein Normalteiler und G damit nicht einfach. Es wird also angenommen, dass $n_7 = 8$ und $n_2 = 7$. Da die 7-Sylowgruppen die Ordnung 7 haben, sind sie zyklisch, denn nach dem Satz von Cauchy gibt es ein Element mit Ordnung 7, was dann alle anderen erzeugt. Da nach dem 2. Satz von Sylow die p-Sylowgruppen konjugiert sind, haben sie außer dem neutralen keine gemeinsamen Elemente. Damit ist die Anzahl der Elemente von G, die die Ordnung 7 haben genau $8 \cdot (7 - 1) = 48$. Es bleiben also nur 8 Elemente für die 2-Sylowgruppe. Damit ist $n_2 = 1$ im Widerspruch zur Annahme. G kann also nicht einfach sein.

b) Sei G eine Gruppe mit $|G| = 132 = 11 \cdot 3 \cdot 2^2$. Dann gilt wie oben $n_{11} \equiv_{11} 1$ und $n_{11} \mid \frac{|G|}{|H|} = 12$. Also ist $n_{11} \in \{1, 12\}$. Wäre $n_{11} = 1$, dann wäre die einzige 11-Sylowgruppe nach dem 2. Satz von Sylow ein Normalteiler von G. Andernfalls gibt es solcher 11-Sylowgruppen. Da 11 prim ist, ist jede dieser Gruppen zyklisch und da alle p-Sylowgruppen konjugiert zueinander sind, haben sie außer dem neutralen Element keine gemeinsamen Elemente. Es gibt also $12 \cdot (11 - 1) = 120$ Elemente mit der Ordnung 11. Bleiben noch 12 Elemente für die anderen beiden Sylowgruppen. Für n_3 gilt wie oben $n_3 | \frac{|G|}{|H|} = 44$. Zusammen mit $n_3 \equiv_3 1$ gilt $n_3 \in \{1, 4, 22\}$. Für $n_3 = 22$ sind nicht mehr genügend Elemente übrig und wäre $n_3 = 4$, so werden wie eben die verbleibenen Elemente augeteilt, sodass $4 \cdot (3 - 1) = 8$. Es bleiben also noch 4 Elemente. Diese ergeben genau eine 2-Sylowgruppe. Diese muss dann Normalteiler sein, also ist G nicht einfach.

Aufgabe 3

Sei $s \in D_{2n}$ wie immer eine Spiegelung und $r \in D_{2n}$ eine Drehung mit $s^2 = 1$ und $r^n = 1$. Da gefordert ist, dass n ungerade ist, gilt $2 \nmid n$. Damit haben die 2-Sylowgruppen die Ordnung 2. Die Menge der Elemente mit Ordnung 2 sind wie in der Übung gezeigt nur die Spiegelungen der Form sr^k mit $k = 0 \ldots n-1$. Diese erzeugen also genau die (zyklischen) Gruppen $\{e, sr^k\}$ der Ordnung 2 (die Rotation um $\frac{n}{2}$ ist bei ungeradem n ausgeschlossen). Die verbleibenen Elemente sind die Rotationen r^k. Alle Untergruppen, die von diesen erzeugt werden, sind zyklisch. Das gilt natürlich auch insbesondere für die p-Sylow-Untergruppen. Also sind alle p-Sylowgruppen zyklisch.

Aufgabe 4

a) Es gilt $|S_3| = 6 = 3 \cdot 2$. Damit gibt es 2-Sylowgruppen und 3-Sylowgruppen. Die mit Ordnung 2 sind genau die Gruppen der Transpositionen, also $\langle(12)\rangle, \langle(13)\rangle$ und $\langle(23)\rangle$. Die verbleibenden Elemente sind in der einzigen Untergruppe mit Ordnung 3, nämlich $\{id, (123), (321)\}$. Damit sind bereits alle p-Sylowgruppen gefunden.

b) Für S_4 gilt $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$. Die 3-Sylowgruppen haben die Ordnung 3. Da es nur 8 Elemente mit Ordnung 8 gibt und 2 jeweils die selbe Gruppe erzeugen, entstehen folgende Gruppen:

$$\{id, (123), (132)\}, \{id, (124), (142)\}, \{id, (134), (143)\}, \{id, (234), (243)\}$$

Es bleiben die 2-Sylowgruppen. Deren Anzahl n_2 teilt nach den Sätzen von Sylow 3. Da mehr als eine solcher Gruppen gefunden werden kann, muss $n_3 = 3$ gelten. Hier sind die Gruppen aufgezählt:

$$\{id, (12), (1324), (12)(34), (1423), (13)(24), (34), (14)(23)\}$$
$$\{id, (13), (1234), (13)(24), (1432), (12)(34), (24), (14)(23)\}$$
$$\{id, (14), (1243), (14)(23), (1342), (12)(34), (23), (13)(24)\}$$

Damit sind auch hier alle p-Sylowgruppen gefunden.