Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 1
Sommersemester 2017
Version vom 11. April 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei Ω eine endliche Menge, also $|\Omega| = n$.
Zeigen Sie, dass die Potenzmenge 2^Ω eine σ-Algebra mit 2^n Elementen ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{E} := \{[a,b] \subset \mathbb{R} \mid a \leq b \text{ für } a,b \in \mathbb{Q}\}$ ein abzählbarer Erzeuger der borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$ ist.

c) Seien $\mathcal{H} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{F} := \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ ist abzählbar}\}$.
Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{F}$ gilt.
Hinweis: Für die Inklusion $\subset$ ist es hilfreich, zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Formulieren Sie die Konvergenzsätze von Lebesgue (dominierte Konvergenz) und Beppo Levi (monotone Konvergenz), sowie das Lemma von Fatou.

b) Finden Sie ein Beispiel einer punktweise konvergenten Folge integrierbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ integrierbar ist, aber $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ nicht gegen $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

c) Finden Sie ein Beispiel einer monoton wachsenden Folge messbarer Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, für die jedoch $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ nicht gegen $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) Die Vereinigung $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ zweier σ-Algebren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf einer gemeinsamen Grundmenge Ω ist wiederum eine σ-Algebra.

b) Jede stetige Funktion ist Borel-messbar.

c) Jede Lebesgue-Nullmenge ist abzählbar.

d) Die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Würfeln eine 6 zu bekommen, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch zu erhalten.

e) Jede monotone reellwertige Funktion ist auf einem kompakten Intervall Lebesgue-integrierbar.

f) Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist wiederum eine Nullmenge.

g) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines von zwei Ereignissen eintritt, ist gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

h) Jede integrierbare Funktion nimmt fast überall nur endliche Werte an.

Abgabe: Montag, 24.04.2017, **vor** der Vorlesung
Die Lösungen sind einzeln und auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihren Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.