Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 12
Sommersemester 2017
Version vom 3. Juli 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von reellwertigen Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit den Eigenschaften

$$X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X \quad \text{und} \quad Y_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Zufallsvariable Z_n definiert als $Z_n := X_n + Y_n$. Beweisen Sie, dass $Z_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2},$$

indem Sie den zentralen Grenzwertsatz auf eine Folge unabhängiger, identisch zum Parameter $\lambda = 1$ Poisson-verteilter Zufallsvariablen anwenden.

b) Zeigen Sie folgende Charakterisierung der schwachen Konvergenz von Poisson-Verteilungen: Sind $X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_n)$ für Parameter $\lambda_n > 0$ und X reellwertige Zufallsvariablen, so gilt:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad \text{genau dann, wenn} \quad \lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \text{ existiert und } X \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Wir beobachten eine fest vorgegebene Anzahl n von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ mit uns unbekanntem Erwartungswert $\mathbb{E}[X_1] =: \mu$ und existierender, bekannter Varianz $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1) > 0$. Sei $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ das empirische Mittel der X_i's. Für eine vorgegebene Zahl $\alpha \in (0,1)$ soll nun ein möglichst kleiner Teilbereich der reellen Achse identifiziert werden, der den unbekannten Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ mit einer statistischen Sicherheit von $(1-\alpha)\cdot 100\%$ überdeckt. Genauer sind reelle Zahlen $\varepsilon^+ \equiv \varepsilon^+(n,\sigma) > 0$ sowie $\varepsilon^- \equiv \varepsilon^-(n,\sigma) > 0$ gesucht, so dass approximativ (n sei groß) gilt

$$\mathbb{P}[\bar{X}_n - \varepsilon^- \le \mu \le \bar{X}_n + \varepsilon^+] \approx 1 - \alpha,$$

wobei ε^+ und ε^- möglichst klein gewählt werden sollen. Berechnen Sie ε^+ und ε^- unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes. Beachten Sie dabei, dass die zufälligen Intervallgrenzen $\bar{X}_n \pm \varepsilon^\pm$ für den unbekannten aber deterministischen Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ dabei nur von den beobachteten Daten (also den X_i's) und den bekannten Größen n und σ abhängen dürfen.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)

a) Zeigen Sie, dass für $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariablen $X_n, X, \bar{X}$, $n \in \mathbb{N}$ aus $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \bar{X}$ fast sichere Gleichheit, $X = \bar{X}$ $\mathbb{P}$-f.s., folgt.

b) Sei $X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_n)$ mit $\lambda_n := n$. Zeigen Sie direkt (also ohne den zentralen Grenzwertsatz zu verwenden), dass dann für $Z_n := \dfrac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{\sqrt{\mathbb{V}(X_n)}}$ schwache Konvergenz $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$ gilt.

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie.

c) Stochastische Konvergenz $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ impliziert $\mathbb{P}$-fast sichere Konvergenz.

d) L^p-Konvergenz ($p \geq 1$) impliziert stochastische Konvergenz.

e) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ impliziert $\mathbb{P}[X_n \in A] \to \mathbb{P}[X \in A]$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

f) Seien $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$. Wenn $\mu_n \to \mu$ und $\sigma_n \to \sigma$, so konvergiert $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Abgabe: Montag, 10. Juli 2017, vor der Vorlesung.
Die Lösungen können *in festen Zweiergruppen* abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.