Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 13
Sommersemester 2017
Version vom 10. Juli 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ seien $X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilt (i.i.d.) und $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Im Folgenden seien $n := 100$ und $p := 1/2$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\big[|S_n - 50| \leq 15\big]$
(Computereinsatz gestattet. In diesem Fall bitte Programmcode abgeben).

b) Verwenden Sie den Zentralen Grenzwertsatz, um $\mathbb{P}\big[|S_n - 50| \leq 15\big]$ zu approximieren.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Ein Reißnagel kann auf die Spitze oder den Rücken fallen. Er falle auf die Spitze mit Wahrscheinlichkeit ϑ. Gesucht ist ein Schätzer für das unbekannte ϑ bei Beobachtung von n Würfen.

a) Stellen Sie ein geeignetes statistisches Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\})$ auf.

b) Geben Sie alle Likelihood-Funktionen $L_x(\vartheta)$, mit $x \in \mathcal{X}$ und $\vartheta \in \Theta$, an.

c) Bestimmen Sie alle Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta} \in \Theta$ für ϑ.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Eine physikalische Größe X sei normalverteilt mit unbekannten Parametern. Wir möchten den Erwartungswert m und die Varianz σ^2 schätzen. Dazu messen wir die gesuchte Größe n mal unabhängig von einander und betrachten das statistische Modell

$$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \{\mathbb{P}_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\})$$

mit $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und Produktmaß $\mathbb{P}_\vartheta = \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ für $\vartheta = (m, \sigma^2) \in \Theta := \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

a) Bestimmen Sie Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{m}_n$ für den Erwartungswert $m = \mathbb{E}_\vartheta[X]$.
Zeigen Sie, dass $(\hat{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine stark konsistente (siehe Skript) Folge von erwartungstreuen Schätzern ist.

b) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\sigma}_n^2$ für die Varianz $\sigma^2 = \mathrm{V}_\vartheta(X)$.
Zeigen Sie, dass $\hat{\sigma}_n^2$ jedoch nicht erwartungstreu ist.

c) Wir betrachten nun den alternativen Varianz-Schätzer

$$s_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{m}_n)^2,$$

für $x \in \mathcal{X}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass s_n^2 erwartungstreu ist.

Abgabe: Montag, 17. Juli 2017, vor der Vorlesung.
Die Lösungen können *in festen Zweiergruppen* abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.