Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 3
Sommersemester 2017
Version vom 30. April 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Beweisen Sie für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dass

$$\mathbb{P}\Big[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big] = \sum_{\ell=1}^{n}\Big((-1)^{\ell-1} \sum_{\{k_1,\dots,k_\ell\}\subseteq\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}[A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_\ell}]\Big),$$

wobei sich die inneren Summen über alle ℓ-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ erstrecken.

b) Zu einer Tanzstunde kommen n Paare. Um für Abwechslung zu sorgen, wird jeder Dame rein zufällig einer der Herren zugelost.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein ursprüngliches Paar miteinander tanzen wird?

(ii) Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

In einem Kreis vom Radius r werde „rein zufällig" eine Sehne ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Länge dieser Sehne größer als r? Untersuchen Sie folgende Zufallsbeschreibungen:

a) Die Sehne ist durch ihren Abstand vom Kreismittelpunkt und die entsprechende Richtung eindeutig festgelegt. Aus Symmetriegründen kann die Richtung fest gewählt werden, der Abstand sei auf $[0, r]$ gleichmäßig verteilt.

b) Die Sehne ist durch ihren Mittelpunkt eindeutig bestimmt. Die Lage des Mittelpunkts ist gleichmäßig in der Kreisscheibe verteilt.

c) Die Sehne ist durch ihre Endpunkte eindeutig bestimmt und aus Symmetriegründen wählen wir den einen Endpunkt fest. Der andere sei gleichmäßig auf dem Kreisrand verteilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

An einer Schule werden die Unterrichtsstunden in Biologie, Geographie, Englisch, Französisch, Geschichte und Mathematik von drei Lehrerinnen gehalten: Frau Meyer, Frau Wegener und Frau Teichert. Jede von ihnen lehrt in zwei Fächern.

Angenommen, Sie müssten raten, wer welches Fach unterrichtet. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mit Ihrem Tipp richtig liegen? Stellen Sie dazu ein geeignetes mathematisches Modell auf, indem sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konkret angeben. Argumentieren Sie präzise.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)

Wir betrachten den messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ der reellen Zahlen mit Borel-σ-Algebra.

a) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einfachem Würfeln die Augenzahl höchstens x ist?

b) *Unabhängig* vom Würfel aus a) wählen wir eine zufällige Zahl U aus dem Intervall $[0, 1]$ (gleichverteilt). Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe von U und der gewürfelten Augenzahl kleiner oder gleich x ist, für $x \in \mathbb{R}$?

Abgabe: Montag, 8. Mai, 2017, **vor** der Vorlesung.
Die Lösungen können $\boxed{\textit{in festen Zweiergruppen}}$ abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.