Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 4
Sommersemester 2017
Version vom 8. Mai 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)
In einem Land beträgt die Geburtenrate 730 Geburten pro 10 000 Einwohner und Jahr. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klinik mit Einzugsbereich von 28 000 Einwohnern an einem Tag mehr als sechs Geburten stattfinden ungefähr (gemäß Poisson'schen Grenzwertsatz)?

Zusatz: Vergleichen Sie die exakten und approximativen Resultate, zum Beispiel durch Plots mit variierenden Modellparametern (Anzahl der Geburten, Einzugsbereich der Klinik, ...). Es empfiehlt sich die Nutzung des Computers (Mathematica, Matlab, R, ...).

Aufgabe 2 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)
Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine Zufallsvariable und $\sigma(X) := \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\sigma(X)$ eine σ-Algebra über Ω ist.

b) Sei $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine $\sigma(X)$-messbare Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann eine messbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $Y(\omega) = h(X(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$.

c) **(Zusatz)** Sei nun $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ surjektiv und $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega'', \mathcal{F}'')$ weiterhin $\sigma(X)$-messbar, sodass für alle $y_1, y_2 \in \Omega''$, $y_1 \neq y_2$, eine „Trennmenge" $C \in \mathcal{F}''$ mit $y_1 \in C$ und $y_2 \notin C$ existiert.

Zeigen Sie, dass eine messbare Funktion $h : (\Omega', \mathcal{F}') \to (\Omega'', \mathcal{F}'')$ existiert, sodass $Y(\omega) = h(X(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ wie folgt rekursiv definiert:

$$F_0(x) = x \text{ für } 0 \leq x \leq 1, \qquad F_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F_n(3x) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}F_n(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{für } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie die Graphen von F_1, F_2 und F_3. Sie können dazu auch einen Computer verwenden.

b) Zeigen Sie, dass $|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \dfrac{1}{6 \cdot 2^n}$ für alle $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, und zeigen Sie, dass der Limes $F(x) := \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ für alle $x \in [0,1]$ existiert.

c) Beweisen Sie, dass $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ und $F : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige wachsende Funktion ist (d.h. F ist Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf $(\Omega, \mathcal{F}) = \big([0,1], \mathcal{B}([0,1])\big)$: $\mu([0,x]) = F(x)$).

d) Beweisen Sie, dass μ weder eine Zähldichte, noch eine Dichte besitzt.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie.

a) Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine messbare Abbildung. Dann ist $F(x) := \mathbb{P}[X \geq x]$ eine Verteilungsfunktion, d.h. F ist rechtsstetig und monoton wachsend, sowie $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für $A, B, C \in \mathcal{F}$ gilt: $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$ genau dann, wenn $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ und $\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[C]$ und $\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$.

c) Das Produkt zweier Verteilungsfunktionen ist wiederum eine Verteilungsfunktion.

d) Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sei $\mu(A) := |A|$ die Anzahl der Elemente von A. Dann ist μ ein σ-endliches Maß.

e) Für $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ messbar (d.h. eine Zufallsvariable) definiert $\mathbb{P}_X[B] := \mathbb{P}[X^{-1}(B)]$, mit $B \in \mathcal{F}'$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega', \mathcal{F}')$.

f) Sei $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Es existiert kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$.

g) Das Produkt (nicht das Tensorprodukt) zweier Zähldichten ist eine Zähldichte.

h) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die Zähldichte der konstanten Zufallsvariable $X(\omega) := c$ für alle $\omega \in \Omega$ lautet:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = c, \\ 0 & \text{für } x \neq c. \end{cases}$$

(Insbesondere nimmt X Werte in einem diskreten Maßraum an, sodass die *Zähldichte* von vorn herein wohldefiniert ist)

Abgabe: Montag, 15. Mai, 2017, **vor** der Vorlesung.
Die Lösungen können *in festen Zweiergruppen* abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.