Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 5
Sommersemester 2017
Version vom 15. Mai 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
In der Umgebung von 10 Kernkraftwerken werden je 100 („mit Zurücklegen" ausgewählte) Personen auf eine bestimmte Krankheit hin untersucht, die im Bundesdurchschnitt bei 1% der Bevölkerung vorkommt. Es wird vereinbart, ein Kraftwerk als auffällig zu bezeichnen, falls unter den 100 Personen mindestens 3 dieses Krankheitsbild zeigen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein Kraftwerk auffällig wird, obwohl die Erkrankungswahrscheinlichkeit in der Umgebung aller 10 Kraftwerke gleich groß wie im Bundesdurchschnitt ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines auffällig wird, obwohl die Erkrankungswahrscheinlichkeit in der Umgebung aller Kraftwerke 2% beträgt?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Das Intervall $[0, 2]$ werde in zwei Teile zerlegt, indem in $[0, 1]$ zufällig (gemäß der Gleichverteilung) ein Punkt markiert wird. Sei X das Längenverhältnis ℓ_1/ℓ_2 der kürzeren Teilstrecke ℓ_1 zur längeren Teilstrecke ℓ_2.

Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X. Besitzt X eine Dichte? Falls ja, bestimmen Sie diese.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $U : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \big((0, 1), \mathcal{B}((0, 1))\big)$ eine gleichverteilte Zufallsvariable und $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ Verteilungsfunktion. Wir definieren die verallgemeinerte Inverse von F als $F^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$F^{-1}(\alpha) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\}$$

und schreiben auch $q_\alpha(F) := F^{-1}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

a) Sei $\alpha \in (0, 1)$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass die Ungleichung $\mathbb{P}[X < y] \leq \alpha \leq \mathbb{P}[X \leq y]$ durch $y = q_\alpha(F)$ gelöst wird. Ist dies die einzige Lösung? Begründen Sie.

b) Beweisen Sie, dass $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X(\omega) := F^{-1}(U(\omega))$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F ist.

c) Finden Sie eine Funktion $G : (0, 1) \to (0, \infty)$ derart, dass die Zufallsvariable $Y := G(U)$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ ist.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)
Eine Krankheit komme bei 1% der Bevölkerung vor. Ein diagnostisches Testverfahren spreche bei 98% der Kranken an und bei 15% der Gesunden.

Wie groß ist der prädiktive Wert des positiven Testresultats, d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällige Person tatsächlich krank, wenn der Test anspricht?

Abgabe: Montag, 22. Mai, 2017, **vor** der Vorlesung.
Die Lösungen können *in festen Zweiergruppen* abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.