Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 6
Sommersemester 2017
Version vom 22. Mai 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit gemeinsamer Dichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) Laut Aufgabe 4d) hat X die Dichte $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$f_{Y|X}(y|x) := \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & \text{falls } f_X(x) > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f_{Y|X}(\cdot|x)$ für $\mathbb{P}_X$-fast alle x eine Dichte ist.

b) Zeigen, Sie dass für beliebige $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ die Darstellung

$$\mathbb{P}[(X,Y) \in B] = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_x}(y) f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y \right) f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt, wobei $B_x := \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in B\}$ sei.

c) Sei nun $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $f_X(x) > 0$ und f_X stetig bei x ist. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\big[Y \le y \;\big|\; X \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]\big]$ und zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$F_{Y|X}(y|x) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{P}\big[Y \le y \;\big|\; X \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]\big]$$

existiert, sowie, dass $f_{Y|X}(y|x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_{Y|X}(y|x)$ gilt. (man nennt daher $f_{Y|X}$ die *bedingte Dichte*).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Seien X, Y unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Geben Sie die Verteilung von X an, falls $\mathbb{P}[X = k \mid X + Y = n] = \binom{n}{k} 2^{-n}$ für alle $0 \le k \le n$.

b) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable, d.h. für den Parameter $\lambda > 0$ ist die Dichte gegeben durch $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Bestimmen Sie für $t > 0$ die bedingte Verteilung

$$\mathbb{P}[X > s + t \mid X > t], \quad s \ge 0.$$

Was bedeutet dieses Ergebnis?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_n$.

a) Bestimmen Sie, möglichst explizit, die Verteilungsfunktionen F_M von $M := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ und F_m von $m := \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

b) Bestimmen Sie für den Fall, dass jedes X_i gleichverteilt auf $[0,1]$ ist, die Dichten von M und m. Sind M und m unabhängig?

c) Die Zeit bis zum Zerfall eines radioaktiven Atoms wird durch die Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(\lambda)$ beschrieben. Wie ist die Zeit bis zum ersten Atomzerfall in einer Probe aus N solchen Atomen verteilt?

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)

a) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie!

(i) Zwei Ereignisse A und B sind genau dann unabhängig, wenn A^c und B unabhängig sind.

(ii) Sei I eine beliebige Indexmenge. Die Ereignisse $(A_i)_{i\in I}$ sind genau dann unabhängig, wenn die Zufallsvariablen $(\mathbb{1}_{A_i})_{i\in I}$ unabhängig sind.

(iii) Zwei Ereignisse A, B (mit $\mathbb{P}[B] > 0$) sind genau dann unabhängig, wenn $\mathbb{P}[A \mid B] = \mathbb{P}[A]$.

b) Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ unabhängige Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Ereignisse eintritt, höchstens $\exp\left(-\sum_{k=1}^n \mathbb{P}[A_k]\right)$ beträgt.

c) Sei $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ eine endliche Familie von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie:

(i) Falls alle Y_i diskret, also von der Form $Y_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ mit abzählbaren Ω_i und $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$ sind, so sind die $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ genau dann unabhängig, wenn

$$\mathbb{P}[Y_i = \omega_i \text{ für } i = 1, \ldots, n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[Y_i = \omega_i] \quad \text{für alle } \omega_i \in \Omega_i.$$

(ii) Falls alle Y_i von der Form $Y_i : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sind, so sind die $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ genau dann unabhängig, wenn

$$\mathbb{P}[Y_i \leq c_i \text{ für } i = 1, \ldots, n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[Y_i \leq c_i] \quad \text{für alle } c_i \in \mathbb{R}.$$

(iii) Sei nun I eine beliebige Indexmenge. Wie müssten die Unabhängigkeitsaussagen aus (i) und (ii) für eine Familie $(Y_i)_{i\in I}$ von Zufallsvariablen lauten?

d) Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f_{(X,Y)}$. Zeigen Sie, dass dann X eine Dichte besitzt, und zwar $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, \cdot)\, \mathrm{d}\lambda$.

e) Bestimmen Sie die Verteilung einer Zufallsvariable Y auf $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$ (wobei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$), die im folgenden (diskreten) Sinne gedächtnislos ist:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : \quad \mathbb{P}[Y \geq m + n \mid Y \geq m] = \mathbb{P}[Y \geq n].$$

Abgabe: Montag, 29. Mai, 2017, **vor** der Vorlesung.
Die Lösungen können *in festen Zweiergruppen* abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.