Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 7
Sommersemester 2017
Version vom 29. Mai 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y \in L^2(\mathbb{P})$ reellwertige Zufallsvariablen mit positiven Varianzen, $\mathrm{V}(X), \mathrm{V}(Y) > 0$.

a) Zeigen Sie, dass für die Korrelation $\mathrm{Corr}(X, Y) \in [-1, 1]$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass reelle Zahlen $\hat{a}$, $\hat{b}$ existieren, mit

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[|Y - (aX + b)|^2\big] = \mathbb{E}\big[|Y - (\hat{a}X + \hat{b})|^2\big].$$

Berechnen Sie $\hat{a}$ und $\hat{b}$, sowie den Wert des Minimums $\mathbb{E}\big[|Y - (\hat{a}X + \hat{b})|^2\big]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ normalverteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

a) Zeigen Sie, dass $X \in L^p(\mathbb{P})$ für alle $p \in [1, \infty)$.

b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{E}[X^{2k+1}] = 0$ für $k \in \mathbb{N}$, falls $\mu = 0$.

c) Berechnen Sie die Momente $\mathbb{E}[X^{2k}]$ für $k \in \mathbb{N}$, falls $\mu = 0$.

Hinweis: Finden Sie eine Rekursionsformel über k.

d) Sei $Y = X^2 - 1$ und $\mu = 0$. Beweisen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind (obwohl sie unkorreliert sind).

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Anna und Bianca spielen ein Münzspiel. Beide starten mit Anfangskapital von n Euro, $n \in \mathbb{N}$. Eine (möglicherweise unfaire) Münze wird mehrmals geworfen. Die Wahrscheinlichkeit von „Kopf“ sei $p \in [0, 1]$. Bei Kopf erhält Anna 1€ von Bianca, bei Zahl gibt Anna Bianca 1€. Das Spiel endet, sobald eine der beiden pleite ist.
Zeigen Sie, dass das Spiel fast sicher in endlich vielen Schritten endet.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei eine Folge von Zufallsvariablen $X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben.

a) Wie ist die Menge $\mathcal{A}\big((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ der asymptotischen Ereignisse definiert?

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}\big((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ eine σ-Algebra ist.

c) Seien nun $\Omega_n = \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sind folgende Ereignisse asymptotisch oder nicht? Begründen Sie.

$$A_1 := \big\{X_1 < X_2\big\} \qquad A_2 := \big\{\liminf_{n\to\infty} X_n > 5\big\}$$
$$A_3 := \big\{\limsup_{n\to\infty} X_n < \infty\big\} \qquad A_4 := \big\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert }\big\}$$

d) Sei U eine auf $(0, 2\pi)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $X := \sin U$ und $Y := \cos U$ zwar unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

Abgabe: Mittwoch/Donnerstag, 7./8. Juni, 2017, in den Übungen.
Die Lösungen können *in festen Zweiergruppen* abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.