Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Todor Bilarev, Peter Frentrup

Blatt 8
Sommersemester 2017
Version vom 2. Juni 2017

Übungen zur Stochastik 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Berechnen Sie für die folgenden Zufallsvariablen jeweils den Erwartungswert und die Varianz (sofern diese existieren):

a) X_1, wobei X_1 diskret gleichverteilt auf $\{i^2 \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ für eine feste natürliche Zahl n ist.

b) $\exp(X_2)$, wobei $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt auf $\mathbb{R}$ mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ ist.

c) X_3, wobei eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte $f_{X_3}(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{s}{s^2 + (x-t)^2}$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

a) Seien $X_1, X_2, \ldots : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\{0,1\}, 2^{\{0,1\}})$ Zufallsvariablen. Weiterhin sei $p_n := \mathbb{P}[X_n = 1]$. Zeigen Sie, dass X_n genau dann in Wahrscheinlichkeit gegen die Nullfunktion konvergieren, wenn $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ gilt.

Für Zufallsvariablen $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ sei $\quad d(X,Y) := \mathbb{E}[\min\{|X - Y|, 1\}]$.

b) Zeigen Sie, dass d eine Metrik im Raum $L^0(\mathbb{P})$ aller reellen Zufallsvariablen ist, wobei Gleichheit zweier Zufallsvariablen X, Y in $L^0(\mathbb{P})$ fast sichere Gleichheit bedeutet, also $\mathbb{P}[X = Y] = 1$.

c) Seien $X, X_1, X_2, \ldots : (\Omega, \mathcal{F}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ genau dann, wenn $d(X_n, X) \to 0$.

Aufgabe 3 (3 Punkte + 2 Zusatzpunkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable aus $L^2(\mathbb{P})$, das heißt $X_i \in L^2(\mathbb{P})$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann ist die Kovarianzmatrix von X definiert als

$$\operatorname{Cov}(X, X) := \big(\operatorname{Cov}(X_i, X_j)\big)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor und $Y := AX + b$ eine $\mathbb{R}^m$-wertige Zufallsvariable.

a) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix von Y in Abhängigkeit von A, b und $\operatorname{Cov}(X, X)$.

b) Seien nun speziell die $X_k \sim \mathcal{N}(0,1)$, $1 \le k \le n$, unabhängig und standardnormalverteilt. Berechnen Sie den Mittelwertvektor $m := \mathbb{E}[Y]$ und die Kovarianzmatrix von Y.

c) **(Zusatz)** Bestimmen Sie die Verteilung von Y_j für $j \in \{1, \ldots, m\}$ für unabhängige normalverteilte $X_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$, $1 \le k \le n$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Verteilungsfunktion der Summe zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)

a) Berechnen Sie den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen.

b) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X. Zeigen Sie, dass folgende Formel für den Erwartungswert gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \big(1 - F_X(x)\big)\,dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)\,dx.$$

c) Seien $X, Y \in L^2(\mathbb{P})$ reellwertige Zufallsvariablen mit positiven Varianzen. Betrachten wir affine Transformationen $\tilde{X} := aX + b$ und $\tilde{Y} := cY + d$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, b \neq 0$. Unter welchen Bedingungen an a, b, c, d ist $\mathrm{Corr}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathrm{Corr}(X, Y)$?

d) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Markov-Ungleichung aus der Vorlesung: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable, $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion und a eine reelle Konstante mit $h(a) > 0$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{h(a)}.$$

e) Seien X und Y unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Summe, $\mathbb{P}[X + Y \leq z]$ für $z \in \mathbb{R}$.

f) Sei (X, Y) gleichverteilt auf einem Kreis mit Radius R. Bestimmen Sie die Dichte von X.

Abgabe: Montag, 12. Juni 2017, vor der Vorlesung.
Die Lösungen können *in festen Zweiergruppen* abgegeben werden. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten, da sie separat korrigiert werden. Auf jedes Blatt schreiben Sie bitte ihre Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppe.