Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Peter Frentrup

Stochastik-Praktikum
Wintersemester 2017/2018

Projektaufgaben Block 3

Aufgabe 1 (Geometrische Brown'sche Bewegung)
Sei (B_t) eine brownsche Bewegung auf $t \in [0,1]$ mit Startwert $B_0 = 0$ und sei $\sigma > 0$. Dann heißt

$$S_t := \exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)$$

geometrische brownsche Bewegung auf $t \in [0,1]$. Man kann zeigen, dass (S_t) eine sogenannte stochastische Differentialgleichung der Form $dS_t = S_t \sigma dB_t$ mit Startwert $S_0 = 1$ löst.

a) Simulieren Sie in einem gemeinsamen Plot 10 Pfade der geometrischen brownschen Bewegung (S_t) auf $t \in [0,1]$ indem Sie $n = 1000$ unabhängige normalverteilte (Pseudo)-Zufallszahlen kumulativ aufsummieren, um die Werte von (B_t) entlang eines äquidistanten Zeitgitters $t_k = k/n$, $k = 0, \dots n$, zu erzeugen, und daraus diejenigen von S_t entsprechend der Definition zu berechen. Alternativ können Sie auch direkt (S_t) entlang des Zeitgitters durch kumulative Produktbildung simulieren. Was ist nummerisch günstiger?

b) Simulieren Sie nun, ohne sie zu plotten, 10000 solche Pfade und plotten Sie zu jedem Zeitpunkt t das Mittel der Werte jener Pfade zur Zeit t. Versuchen Sie, Ihre Beobachtung kurz zu interpretieren.

c) Erzeugen Sie nun *einmal eine* Stichprobe $Z_1, \dots Z_n$ von n unabhängigen standardnormalverteilten (Pseudo)-Zufallszahlen, mit denen Sie nun auf zwei Arten einen Pfad der geometrischen brownschen Bewegung erzeugen und einen gemeinsamen Plot von beiden Pfaden generieren. Den einen Pfad generieren Sie wie in a) mit Hilfe von kumulativer Summen- bzw Produktbildung unter Nutzung von $B_{t_k} - B_{t_{k-1}} = \sqrt{1/n} Z_k$. Den anderen Pfad (in einer anderen Farbe) generien Sie rekursiv entsprechend eines Euler-Schemas zur zeitdiskreten Approximation der stochastischen Differentialgleichung wie folgt:
Setzte $\widetilde{S}_0 := 1$ und für $k = 1, \dots n$:

$$\widetilde{S}_{t_k} := \widetilde{S}_{t_{k-1}} + \widetilde{S}_{t_{k-1}} \sigma \sqrt{1/n} Z_k \,.$$

d) Wiederholen Sie das Experiment von c) auf einem gröberen Zeitgitter mit $n = 30$ und interpretieren Sie Ihre Resultate.

Aufgabe 2 (Brown'sche Brücke)
Sei (B_t) eine brownsche Bewegung auf $t \in [0,T]$ mit Startwert $B_0 = 0$. Zu einem fest gewählten Zeitpunkt $T \geq 0$ und einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ heißt der Prozess

$$(\mathbb{B}_t)_{t\in[0,T]} \overset{d}{=} (B_t \mid B_T = c)_{t\in[0,T]}$$

brownsche Brücke
(Achtung: $\mathbb{P}[B_T = c] = 0$; gemeint ist die Verteilung $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{P}[B_t \in \cdot \mid B_T \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)]$).
Es gelten folgende Zusammenhänge (mit ggf. unterschiedlichen brownschen Bewegungen $\tilde{B}$, W):

$$\mathbb{B}_t = \tilde{B}_t - \frac{t}{T}(\tilde{B}_T - c) \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\mathbb{B}_t = \mathrm{d}W_t + \frac{\mathbb{B}_t - c}{t - T}\,\mathrm{d}t \,. \tag{2}$$

a) Angenommen, der Endwert $\mathbb{B}_T = c$ wäre nicht a priori deterministisch festgelegt, sondern wurde lediglich *beobachtet*. Zeigen sie mittels der Kovarianzfunktion $\mathrm{Cov}(B_s, B_t)$ der standard-brownschen Bewegung, dass

$$\mathbb{E}[\mathbb{B}_t] = \frac{ct}{T} \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(\mathbb{B}_s, \mathbb{B}_t) = s \wedge t - \frac{st}{T} \qquad \text{gilt.}$$

Hinweis: Nutzen Sie [RW06, Gleichungen (2.18), (2.19)].

b) Simulieren und plotten Sie 10 brownsche Brücken $\mathbb{B}_t$ auf $[0, 5]$ mit $\mathbb{B}_5 = c = 1$ mittels Gleichung (1).

c) Benutzen Sie die Lévy-Konstruktion einer brownschen Bewegung, um eine brownsche Brücke auf $[0, 5]$ mit Endwert $c = 1$ zu simulieren. Plotten Sie wieder das Ergebnis.

d) Simulieren Sie $\mathbb{B}$ als Gaußprozess über ihre Kovarianzfunktion.

Schreiben Sie dazu eine Funktion `sampleBrownianBridge(T, c, ts)`, die für einen Zeithorizont T, Endposition c und einen Vektor von Zeitpunkten `ts` $= (t_i)_{i=1,\dots,n}$ die Werte $\mathbb{B}_{t_i}$ liefert. Plotten Sie wieder das Ergebnis.

(Im Falle $T = 1$, $c = 0$ ist dies im Wesentlichen [RW06, Aufgabe 2.9.3]).

e) Versuchen Sie $\mathbb{B}$ mittels Euler-Schema für die stochastische Differentialgleichung (2) zu approximieren. Plotten Sie die so gewonnene Approximation ein einem gemeinsamen Graphen mit einer direkt mittels b), c) oder d) erzeugten.

Verwenden Sie dabei für die Euler-Approximation den selben Pfad von B, wie für die direkt erzeugte brownsche Brücke (also die selben Inkremente ΔB_t)!

Was fällt Ihnen auf? Erklären Sie.

f) Ein weiterer Ansatz neben der direkten Darstellung (1), der sich auch für andere Konstruktionen dieser Art verallgemeinern lässt, ist die brownsche Brücke mittels zweier Teilprozesse zu approximieren. Dazu simuliert man zwei brownsche Bewegungen B^1 und B^2, wobei B^1 im gewünschten Startpunkt der brownschen Brücke (hier 0) startet, und B^2 im gewünschten Endpunkt c. Letztere invertiert man in der Zeit zu $\overleftarrow{B}^2_t := B^2_{T-t}$. Man bestimmt nun den ersten Treffpunkt τ der von B^1 mit $\overleftarrow{B}^2$. Falls diese sich nicht treffen, generiert man nochmal neu. Nun setzt man

$$\tilde{\mathbb{B}}_t := \begin{cases} B^1_t\,, & t \in [0, \tau]\,, \\ \overleftarrow{B}^2_t\,, & t \in [\tau, T]\,. \end{cases}$$

(i) ~~Warum ist $\mathbb{B}$ dann eine brownsche Brücke? Begründen sie kurz.~~ (Der so konstruierte Prozess ist keine brownsche Brücke, sondern nur eine Approximation! Für Details siehe [BS14]).

(ii) Implementieren Sie dieses Verfahren und plotten Sie $\tilde{\mathbb{B}}_t$.

Literatur

[BS14] Bladt, Mogens und Michael Sørensen: *Simple simulation of diffusion bridges with application to likelihood inference for diffusions.* Bernoulli, 20(2):645–675, Mai 2014. `https://doi.org/10.3150/12-BEJ501`.

[RW06] Rasmussen, Carl Edward und Christopher K. I. Williams: *Gaussian processes for machine learning.* Adaptive Computation and Machine Learning. MIT Press, Cambridge, MA, 2006, ISBN 978-0-262-18253-9. Online verfügbar unter `http://www.gaussianprocess.org/gpml`.

Hinweise zur Abgabe:
Alle Dateien (PDF der Auswertung, Python-Code für jede einzelne Aufgabe) gepackt als Zip-Archiv mit dem Namen *UE3_Student1_Student2.zip* bis zum 19. 12. per E-Mail an *frentrup@math.hu-berlin.de* schicken.