Stochastik-Praktikum

Simulation stochastischer Prozesse

Peter Frentrup

Humboldt-Universität zu Berlin

27. November 2017

Übersicht

Vorbemerkungen

Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ist eine
indizierte Kollektion von Zufallsgrößen.

Genauer: $X : \Omega \times \mathcal{T} \to (\mathcal{X}, \mathcal{F})$,
$X(\omega, t) := X_t(\omega)$ messbar $\forall t \in \mathcal{T}$.

Sei $\mathcal{T}$ geoordnet (Zeit, z.B. $\mathcal{N}$, $[0, T]$).
Für fixiertes $\omega^* \in \Omega$ heißt $X(\omega^*, \cdot)$ ein Pfad des stochastischen Prozesses X.
Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$: wachsende Familie von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{X}$

$(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}, \mathbb{P})$ heißt filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

Random Walk

Definition

Es seien Z_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, i.i.d. Zufallsvariablen mit

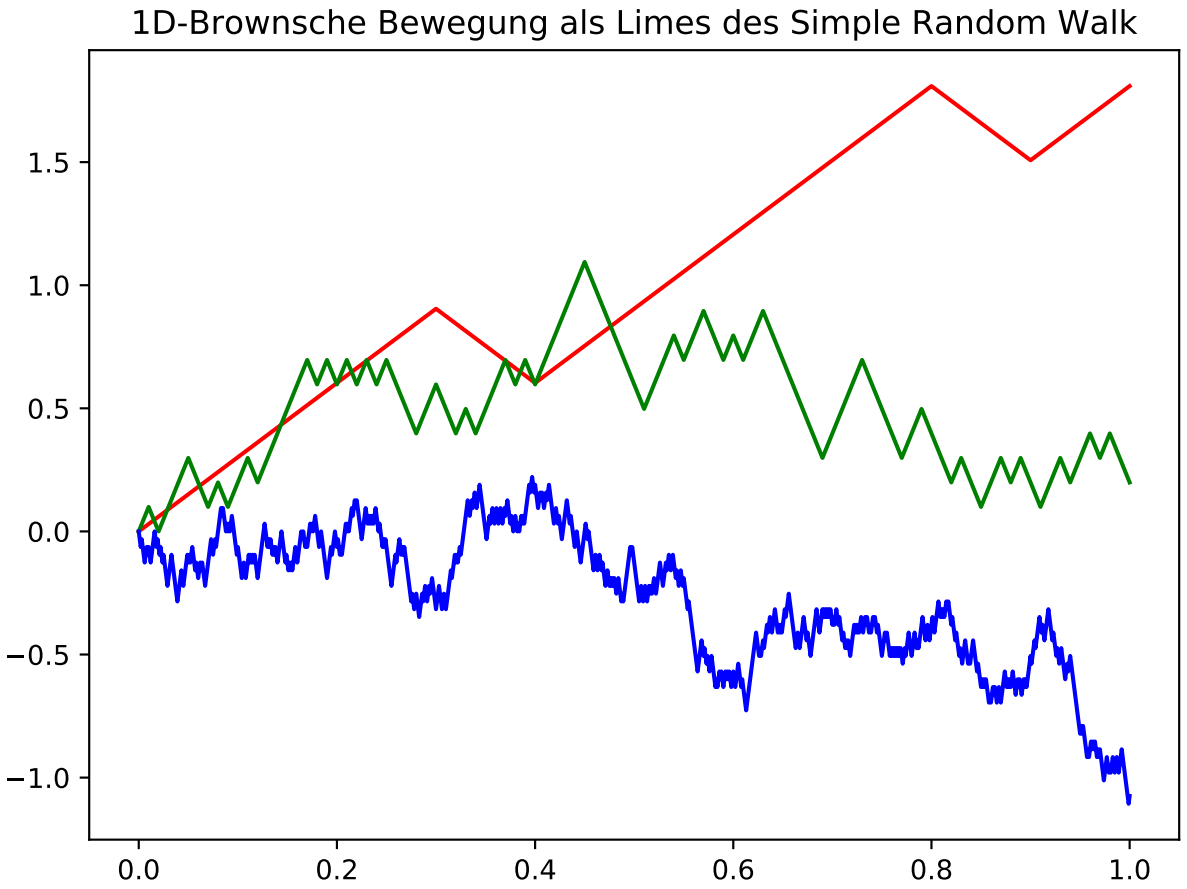
$$\mathbb{P}[Z_i = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[Z_i = -1].$$

Die Zufallsvariable $S_n := \sum_{i=1}^{n} Z_i$ beschreibt eine (eindimensionale) Irrfahrt (random walk) in $\mathbb{Z}$.
Für $p = 1/2$ ist dies die so genannte symmetrische Irrfahrt.

S_n nimmt Werte in $[-n, n]$ an. $\forall n$: $\mathbb{E}[S_n] = 0$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = n$.
Reskaliert konvergiert die Irrfahrt in Verteilung gegen die Brownsche Bewegung (ZGWS bzw. Donsker):

$$\frac{S_{\lfloor n\, t \rfloor}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} B_t \qquad \text{bzw. allgemeiner} \qquad \frac{S_{\lfloor n \cdot \rfloor}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} B.$$

Reskalierter symmetrischer Random Walk



Python: Random Walk

```
def simpleScaledRandomWalk(n, T):
    """
    Perform a random walk of `n` steps on [0, `T`] with spacial
    scaling factor `sqrt(T/n)`.
    """
    ts = np.linspace(0, T, n+1)
    coins = np.random.uniform(size=n+1)
    dxs = (2.0 * (coins > 0.5) - 1) * np.sqrt(float(T) / n)
    dxs[0] = 0.0
    xs = np.cumsum(dxs)
    return ts, xs

ts, xs = simpleScaledRandomWalk(10, 1)
plt.plot(ts, xs, 'r-')
```

Übersicht

Brownsche Bewegung

Definition

Sei $(\mathcal{F}_t)$ eine Filtration. Ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter stochastischer Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ heißt (Standard-)brownsche Bewegung (oder Wiener-Prozess) bzgl. $(\mathcal{F}_t)$, falls gilt:

(BB1) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.,

(BB2) Für alle $t \geq s$ ist $(B_t - B_s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$,

(BB3) Zuwächse $(B_t - B_s)$, $0 \leq s \leq t$, sind $\mathcal{N}(0, t-s)$-verteilt,

(BB4) $(B_t)_{t\geq 0}$ hat $\mathbb{P}$-f.s. stetige Pfade.

Oft ist z.B. $\mathcal{F}_t := \sigma(B_u : u \leq t)$.

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ *(Spiegelungsprinzip)*

(ii) *Für festes $s \geq 0$:* $B_t^2 := B_{s+t} - B_s\,, \quad t \geq 0$ *(Zeithomogenität)*

(iii) *Für festes $c > 0$:* $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t}, \quad t \geq 0$ *(Skalierung)*

(iv) *Für festes $T > 0$:* $B_t^4 := B_T - B_{T-t}, \quad 0 \leq t \leq T$ *(Zeitinversion)*

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ *(Inversion)*

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ *(Spiegelungsprinzip)*

(ii) *Für festes $s \geq 0$:* $B_t^2 := B_{s+t} - B_s\,, \quad t \geq 0$ *(Zeithomogenität)*

(iii) *Für festes $c > 0$:* $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t}, \quad t \geq 0$ *(Skalierung)*

(iv) *Für festes $T > 0$:* $B_t^4 := B_T - B_{T-t}, \quad 0 \leq t \leq T$ *(Zeitinversion)*

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ *(Inversion)*

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ *(Spiegelungsprinzip)*

(ii) *Für festes $s \geq 0$:* $B_t^2 := B_{s+t} - B_s\,, \quad t \geq 0$ *(Zeithomogenität)*

(iii) *Für festes $c > 0$:* $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t}, \quad t \geq 0$ *(Skalierung)*

(iv) *Für festes $T > 0$:* $B_t^4 := B_T - B_{T-t}, \quad 0 \leq t \leq T$ *(Zeitinversion)*

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ *(Inversion)*

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ *(Spiegelungsprinzip)*

(ii) *Für festes $s \geq 0$:* $B_t^2 := B_{s+t} - B_s\,, \quad t \geq 0$ *(Zeithomogenität)*

(iii) *Für festes $c > 0$:* $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t}, \quad t \geq 0$ *(Skalierung)*

(iv) *Für festes $T > 0$:* $B_t^4 := B_T - B_{T-t}, \quad 0 \leq t \leq T$ *(Zeitinversion)*

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ *(Inversion)*

Satz

Ist $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine brownsche Bewegung, so auch jeder der folgenden Prozesse:

(i) $B^1 := -B$ *(Spiegelungsprinzip)*

(ii) *Für festes $s \geq 0$:* $B_t^2 := B_{s+t} - B_s\,, \quad t \geq 0$ *(Zeithomogenität)*

(iii) *Für festes $c > 0$:* $B_t^3 := c^{-1} B_{c^2 t}, \quad t \geq 0$ *(Skalierung)*

(iv) *Für festes $T > 0$:* $B_t^4 := B_T - B_{T-t}, \quad 0 \leq t \leq T$ *(Zeitinversion)*

(v) $B_t^5 := \begin{cases} tB_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ *(Inversion)*

Markov-Eigenschaft und Simulation

Korollar

Aus den Eigenschaften der brownschen Bewegung und dem vorangehenden Satz folgt die Markov-Eigenschaft:

$$\tilde{B}_t := B_{t+s} - B_s\,, \quad t \geq 0$$

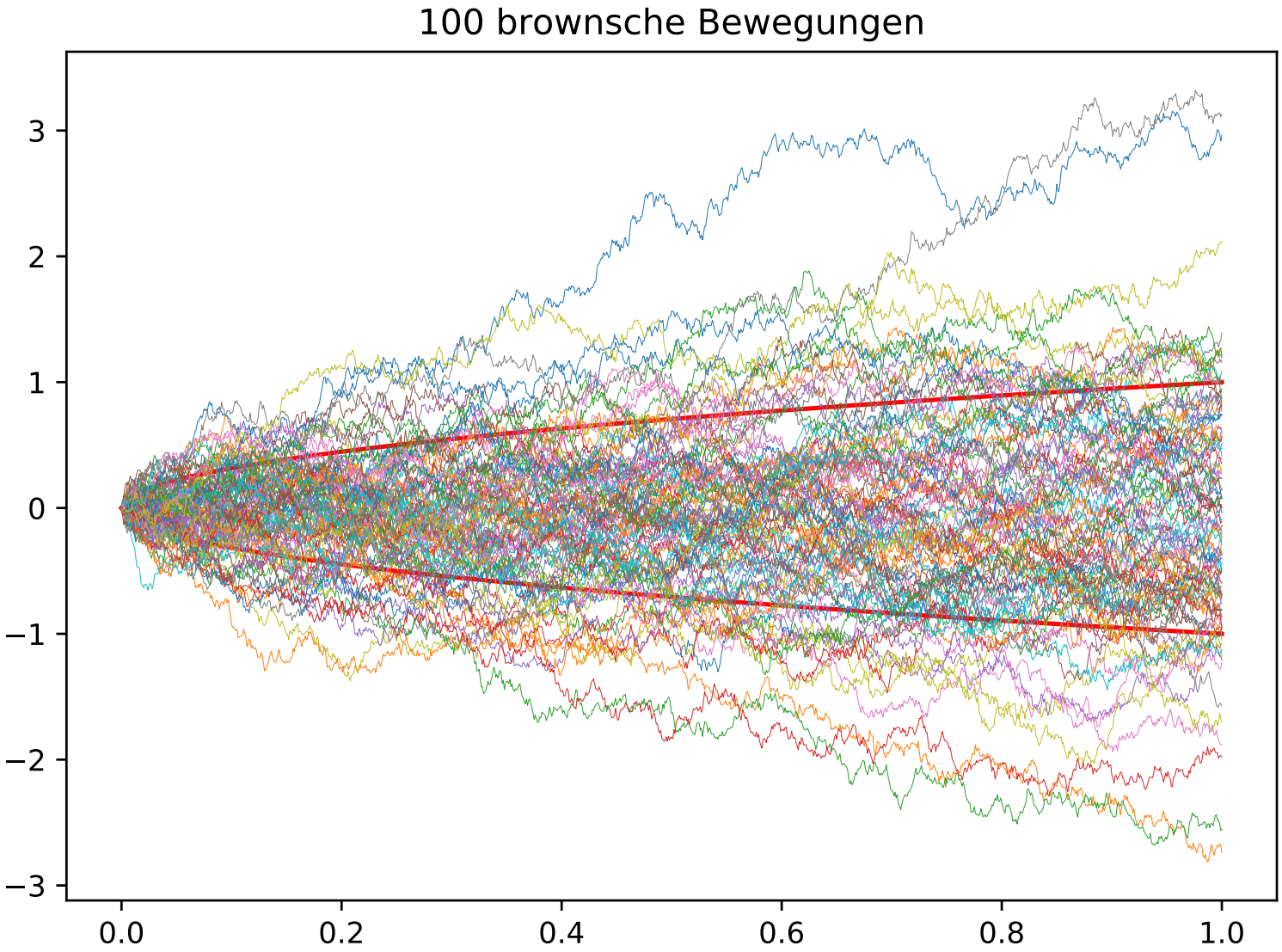
ist eine brownsche Bewegung und unabhängig von $\mathcal{F}_s$. Die bedingte (reguäre) Verteilung von B_{t+s} gegeben $\mathcal{F}_s$ ist also die Normalverteilung $\mathcal{N}(B_s, t)$ und hängt nur von B_s und t ab.

Exakte zeitdiskrete Simulation als gaußscher Random Walk!

Python: Brownsche Bewegung auf Zeitgitter

```
def standardBrownianMotion(n, T):
    """
    Simulate a 1D standard Brownian motion on [0, `T`] with `n`
    Brownian increments.
    """
    ts = np.linspace(0, T, n+1)
    dxs = np.random.normal(
            loc=0, scale=np.sqrt(float(T) / n), size=(n+1))
    dxs[0] = 0.0
    xs = np.cumsum(dxs)
    return ts, xs

ts = np.linspace(0, 1, 100)
xs = np.sqrt(ts)
plt.plot(ts, xs, 'r-', ts, -xs, 'r-')
for i in range(0, 100):
    ts, Bs = standardBrownianMotion(1000, 1)
    plt.plot(ts, Bs, linewidth=0.1)
```


100 brownsche Bewegungen
3
2
1
0
−1
−2
−3
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Weitere Eigenschaften der brownschen Bewegung

Satz

Es sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine brownsche Bewegung. Dann gilt:

1. *Die Pfade von B sind fast sicher nirgends differenzierbar.*
2. *Die Pfade von B sind auf jedem Intervall fast sicher von unbeschränkter Variation.*
3. *Das Wachstumsverhalten lässt sich durch das Gesetz vom iterierten Logarithmus beschreiben:*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log(\log(t))}} = 1 \quad \text{für} \quad \mathbb{P} - \text{fast alle } \omega \in \Omega.$$

4. *Eine brownsche Bewegung ist stetiger zentrierter Gauß-Prozess mit $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t \ \forall s, t \geq 0$ (g.d.w.).*

Fast-sichere-Konvergenz: Lévy-Konstruktion der B.B.

Konstruktion mit pfadweise f.s.-Konvergenz (statt Verteilungskonvergenz wie bei Donsker):
Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $D_n := \{k/2^n : k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n\}$ und $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.
$(Z_t)_{t \in D}$ seien unabh. standardnormalverteilte Zufallsvariablen.
Funktionenfolge $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_0(t) := tZ_1$ und

$$F_n(t) := \begin{cases} \frac{Z_t}{\sqrt{2^{n+1}}}, & t \in D_n \setminus D_{n-1}, \\ 0, & t \in D_{n-1}, \\ \text{linear interpoliert}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $B_t := \text{f.s.-}\lim_N \sum_0^N F_n(t)$ eine brownsche Bewegung auf $[0,1]$.

Fast-sichere-Konvergenz: Lévy-Konstruktion der B.B.

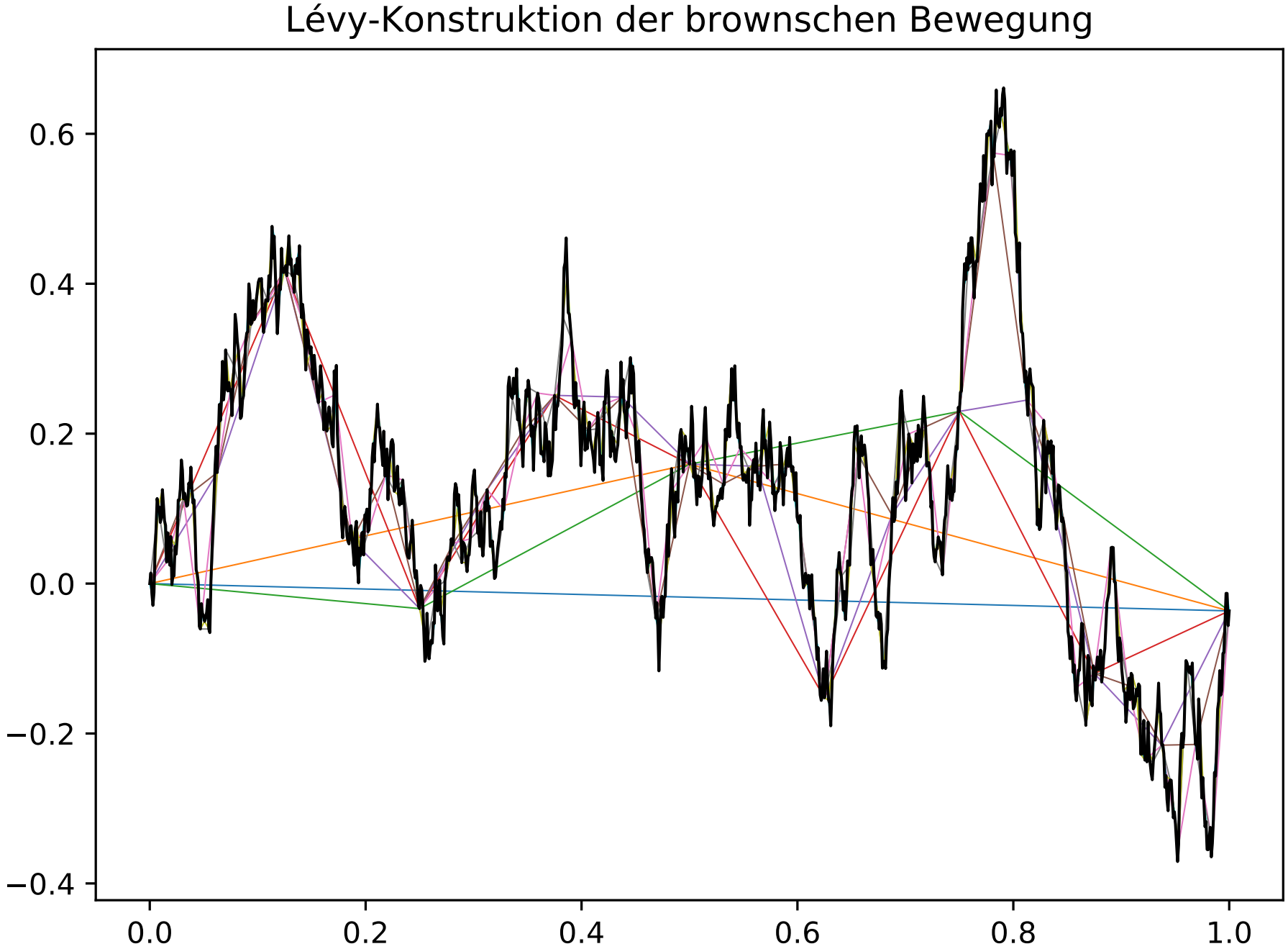
Dann ist $B_t := \text{f.s.-}\lim_N \sum_0^N F_n(t)$ eine brownsche Bewegung auf $[0,1]$.
Dabei ist $B_0 = 0$, $B_1 = Z_1$ und $B_t = \frac{B_t^- + B_t^+}{2} + \frac{Z_t}{\sqrt{2^{n+1}}}$, wobei B_t^+ den rechten und B_t^- den linken Nachbarpunkt nach einer Intervallhalbierung bezeichnen.
Konkret gilt z.B. für die ersten Schritte

$$B_{1/2} = \frac{B_0 + B_1}{2} + \frac{Z_{1/2}}{2},$$

$$B_{1/4} = \frac{B_0 + B_{1/2}}{2} + \frac{Z_{1/4}}{\sqrt{8}} \quad \text{und} \quad B_{3/4} = \frac{B_{1/2} + B_1}{2} + \frac{Z_{3/4}}{\sqrt{8}}$$

$$\dots$$

Der entstehende Prozess hat zu jeder Zeit t die Varianz t.


Lévy-Konstruktion der brownschen Bewegung
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

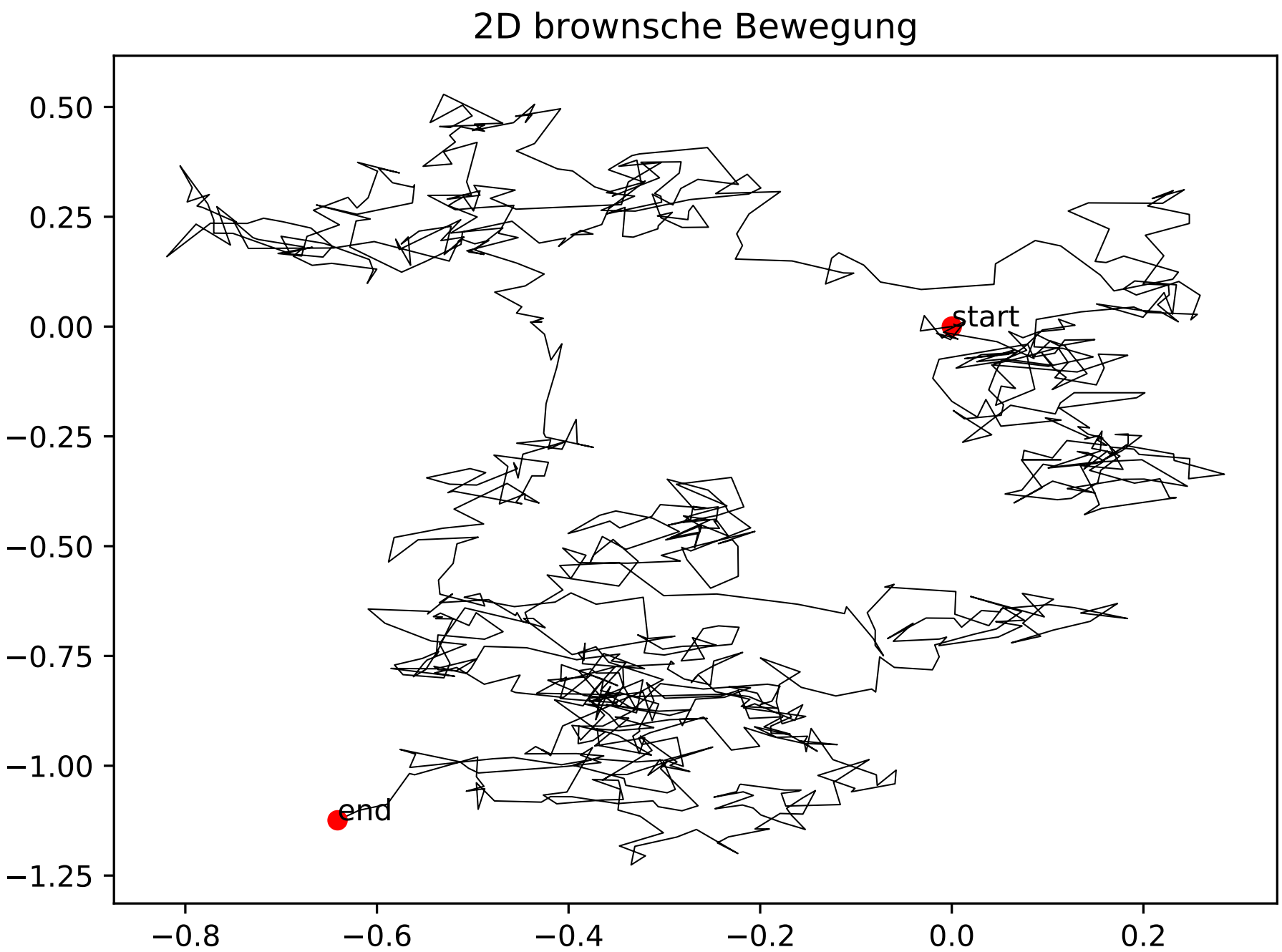
Zweidimensionale Brownschen Bewegung

Definition

Ein stochastischer Prozess $(\mathbf{B}_t)_{t\geq 0}$ mit Werten im $\mathbb{R}^d$ heißt d-dimensionale brownsche Bewegung, falls die Koordinaten $(B_i)_t$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, stochastisch unabhängige eindimensionale brownsche Bewegungen sind.

```
def standardBrowninanMotion2D(n, T):
    dBxy = np.random.normal(
            loc=0, scale=np.sqrt(float(T) / n), size=(n+1, 2))
    dBxy[0,:] = 0.0
    return dBxy.cumsum(axis=0)

Bxy = standardBrowninanMotion2D(1000, T=1.0)
plt.plot(Bxy[:,0], Bxy[:,1])
```


2D brownsche Bewegung
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.25
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2
start
end

Übersicht

Diffusionen

Unter einem Diffusionsprozess versteht man z.B. einen Prozess der Form

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t\,, \quad t \geq 0,$$

mit einer brownschen Bewegung B.
Ein X_t wie oben wird teils als „allgemeine Brownsche Bewegung“ mit Drift μ und Volatilität σ bezeichnet.
Allgemeiner erfüllt ein Diffusion eine stochastische DGL

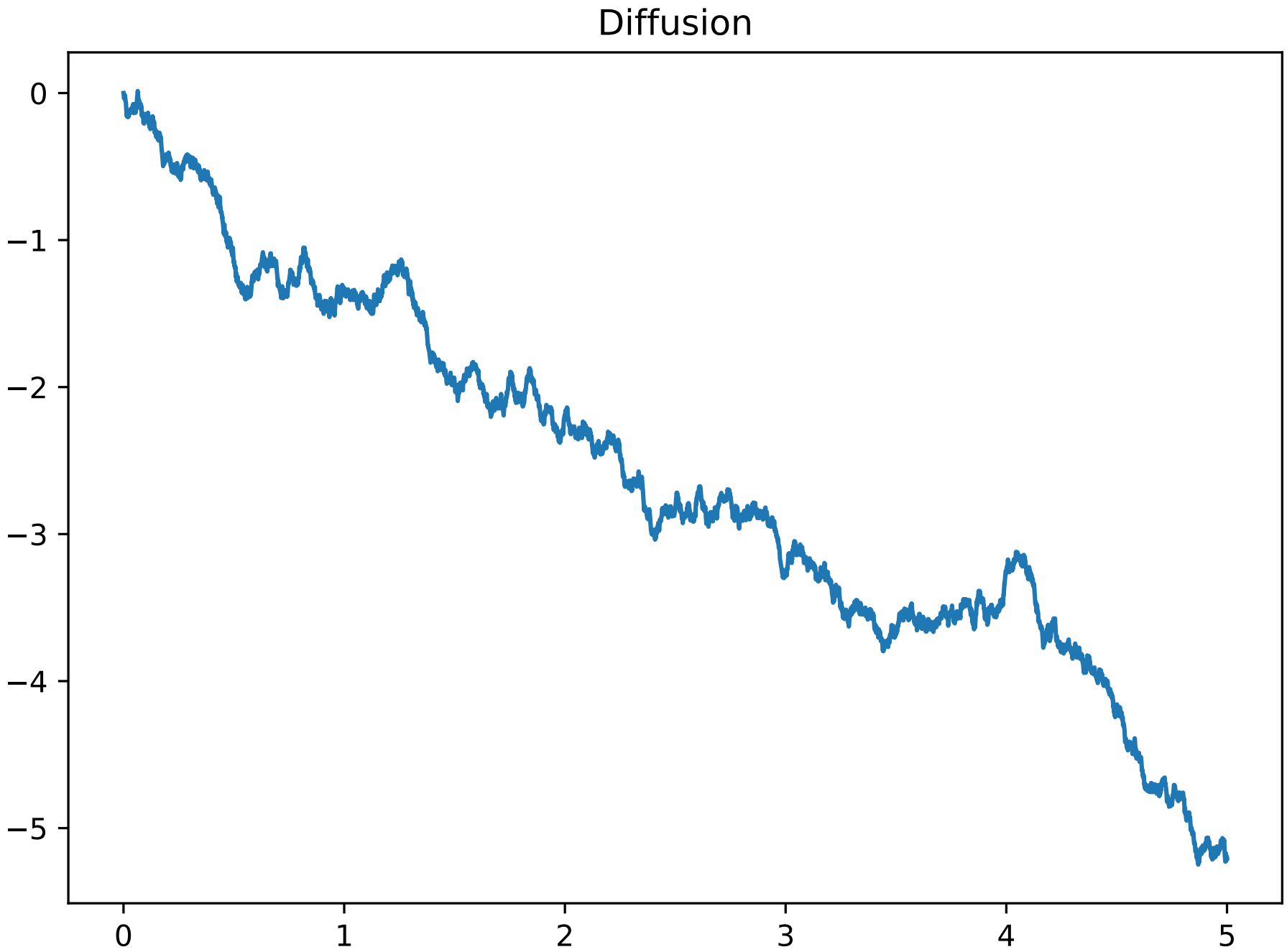
$$\mathrm{d}X_t = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t$$

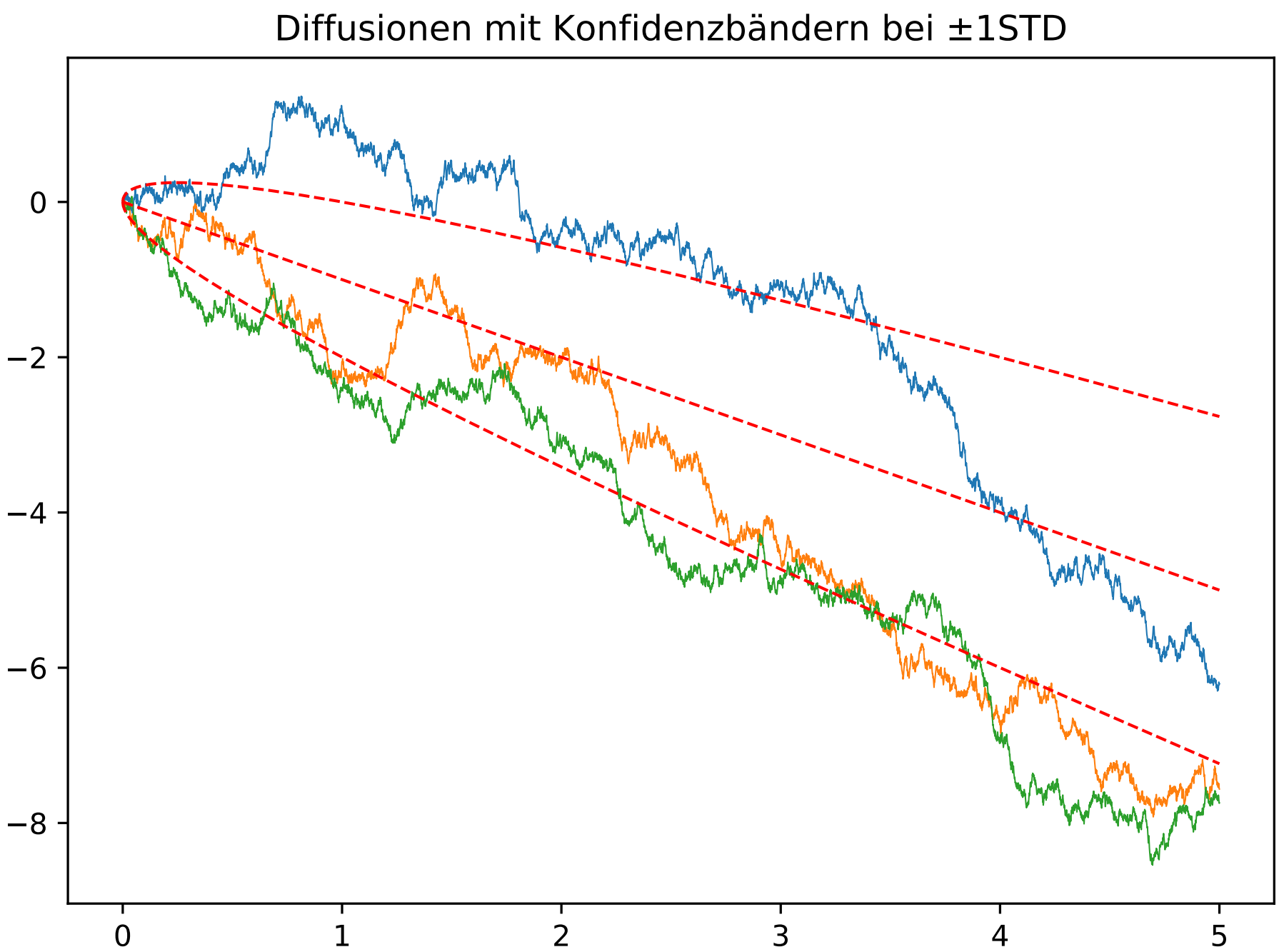
mit Koeffizienten μ, σ, die Funktionen von (t, X_t) sein dürfen (oben: Konstanten).

Python: Diffusion

```
def diffusion(x0, n, T, mu, sigma):
    """
    Simulate dX_t = mu dt + sigma dB_t on [0,T] with X_0 = x0,
    using n increments.
    Return (ts, Xs), time and space coordinates.
    """
    dt = T/n
    ts = np.linspace(0,T,n+1)
    dXs = mu * dt + sigma * np.random.normal(
                                loc=0, scale=np.sqrt(dt), size=n+1)
    dXs[0] = x0
    Xs = np.cumsum(dXs)
    return ts, Xs

ts, Xs = diffusion(0, 10000, 5, -1, 0.5)
plt.plot(ts, Xs)
```


Diffusion
0
−1
−2
−3
−4
−5
0
1
2
3
4
5


Diffusionen mit Konfidenzbändern bei ±1STD
0
−2
−4
−6
−8
0
1
2
3
4
5

SDGL Approximation: Das Eulerschema

Was eine Lösung (X_t) einer stochastischen DGL der Form

$$X_0 = x_0\,, \qquad \mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}B_t$$

genau ist, wird erst durch die VL Stochastische Analysis geklärt!

SDGL Approximation: Das Eulerschema

stochastischen DGL

$$X_0 = x_0\,, \qquad \mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}B_t$$

Das Eulerschema ist intuitiv plausibel als numerische SDGL-Approximation $\widetilde{X}_t$ entlang eines diskreten Zeitgitters $t_k = k/n$ mit $\Delta t := 1/n$ und $\Delta B_{t_k} := B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$:

$$\widetilde{X}_0 := x_0\,, \quad \widetilde{X}_{t_k} = \widetilde{X}_{t_{k-1}} + \mu(t, \widetilde{X}_{t_{k-1}})\,\Delta t + \sigma(t, \widetilde{X}_{t_{k-1}})\,\Delta B_{t_k}\,,$$

wobei die $\Delta B_{t_k} = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ als i.i.d. $\mathcal{N}(0, \Delta t)$-verteilte Zufallsvariablen simuliert werden.

Beispiel zum Eulerschema

Die Stochastische Analysis wird zeigen, dass die SDGL

$$X_0 = 1\,, \qquad \mathrm{d}X_t = X_t\, a\, \mathrm{d}B_t$$

mit $a \in \mathbb{R}$ als Lösung die geometrische brownsche Bewegung

$$X_t = exp(aB_t - a^2 t/2)$$

hat, das sogenannte „Stochastische Exponential von aB_t“.
Das Eulerschema liefert als zeitdiskrete Approximation hierfür

$$\widetilde{X}_0 = 1\,, \qquad \widetilde{X}_{t_k} := \widetilde{X}_{t_{k-1}} + \widetilde{X}_{t_{k-1}}\, a\, \Delta B_{t_k}$$