

## Taylorreihen

### Definition C.133

Ist  $f$  auf  $D$  beliebig oft differenzierbar, so läßt sich die *Taylorreihe*

$$T_f(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

von  $f$  bezüglich  $\xi$  hinschreiben.

### Bemerkung:

1. Die Taylorreihe muß weder konvergieren noch (im Fall der Konvergenz) die Summe  $f(x)$  haben.
2. Nach dem Satz über die Taylorsche Formel C.127 konvergiert  $T_f(x, \xi)$  genau dann gegen  $f(x)$ , wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, \xi) = 0$  ist.



### Beispiel C.134

1. Für  $f(x) = e^x$ ,  $\xi = 0$  ist  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ . Für beliebiges  $\xi$  gilt

$$e^x = e^\xi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} \quad (\text{Funktionalgleichung!})$$

2. Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und  $\xi = 0$ . Es ist  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n$  und

$$T_f^n(x, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) = 0 \text{ für alle } n, \text{ also}$$

$$R_{n+1}(x, 0) = f(x) \not\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, läßt sich aber nicht als eine Potenzreihe darstellen.



### Bemerkung:

1. Eine konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\xi)^k, \quad |x-\xi| < r$$

ist bereits die Taylorreihe von  $f$  bezüglich  $\xi$ .

2. Um eine Funktion als Reihe darzustellen, müssen nicht immer die Ableitungen berechnet werden; man kann auch bekannte Reihen umformen, um die Taylorreihe zu erhalten.



### Definition C.135

Eine Funktion  $f(x)$  heißt am Punkt  $\xi$  *reell analytisch* falls sie dort unendlich oft differenzierbar ist und ihre Taylorreihe  $T(x, \xi)$  für alle  $x$  aus einer Umgebung von  $\xi$  gegen  $f(x)$  konvergiert.

### Bemerkung:

1. Für jedes  $\xi$  bildet die Menge dieser Funktionen einen Ring, d.h. Summen, Differenzen und Produkte haben dieselbe Eigenschaft.
2. Die Verkettung (Verknüpfung) von zwei analytischen Funktionen ist wieder eine analytische Funktion.



## Fixpunkt-Iteration

### Motivation:

Iterationsverfahren sind Verfahren der schrittweisen Annäherung. Sie gehören zu den wichtigsten Methoden in der Numerik zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen, z.B. Bisektionsverfahren.

Verfahren zur iterativen Lösung einer nichtlinearen Gleichung  $f(x) = 0$  mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ , haben meistens die Form

$$x_{k+1} = \phi(x_k), k = 0, 1, 2, \dots \text{ (FPI).}$$

und heißen Fixpunkt-Iterationen mit Verfahrensfunktion  $\phi$ .



Die Bezeichnung Fixpunkt-Iteration ist wie folgt begründet:

Erzeugt die Iterationsvorschrift (FPI) eine konvergente Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und ist  $\phi$  stetig, so folgt:

$$x^* := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \phi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \phi(x^*).$$

Das Verfahren konvergiert also und der Grenzwert  $x^*$  hat die Eigenschaft  $x^* = \phi(x^*)$  und ist damit ein Fixpunkt der Verfahrensfunktion  $\phi$ .

Wie gewinnt man die Verfahrensfunktion  $\phi$ ?

Man formt die Gleichung  $f(x) = 0$  in eine äquivalente Gleichung der Form  $x = \phi(x)$  um. Dies kann auf vielfältige Art geschehen und hat großen Einfluss auf das Konvergenzverhalten der Fixpunkt-Iteration.



### Definition C.136

Eine Abbildung  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Lipschitz-stetig* auf  $D$ , falls es eine Konstante  $L > 0$  gibt, so dass:

$$\forall x, y \in D : |\phi(x) - \phi(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

$L$  heißt *Lipschitz-Konstante*.

Kann man  $L < 1$  wählen, so heißt die Abbildung  $\phi$  kontrahierend und  $L$  nennt man dann auch Kontraktionskonstante von  $\phi$ .

### Bemerkung:

1. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig auf  $D$ .
2. Man beachte, dass die Kontraktionseigenschaft nur durch eine Abschätzung  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq L \cdot |x - y|$  mit  $L < 1$  gesichert ist.



### Satz C.137

Falls eine Funktion  $\phi$  stetig differenzierbar auf  $[a, b]$  ist, so besitzt sie die Lipschitz-Konstante

$$L = \sup\{|\phi'(\xi)| : a \leq \xi \leq b\}.$$

### Beweis:

Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$|\phi(y) - \phi(x)| = |\phi'(\xi)(y - x)| = |\phi'(\xi)| |y - x| \leq L |y - x|$$

mit  $\xi \in (a, b)$ .

