Mehrfachintegrale

Motivation

Funktionene können von mehreren Variablen abhängen, wie zum Beispiel $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.
Lassen sich für solche Funktionen Begriffe wie das Integral sinnvoll definieren?
Wir beschränken uns hier auf Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit einem rechteckigen Definitionsbereich $D := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.
Unser Ziel ist die Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von f.

Definition C.182 (Zerlegung)

(a) $\mathcal{Z} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n), (y_0, y_1, \ldots, y_m)i\}$ heißt *Zerlegung* von $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, falls

$$a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b_1$$
$$a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b_2$$

(b) Man nennt $\eta(\mathcal{Z}) := \max_{i,j}\{|x_i - x_{i-1}|, |y_j - y_{j-1}|\}$ die *Feinheit* von $\mathcal{Z}$.

Definition C.183

Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung.

(a) Die Mengen $Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ heißen Teilquader der Zerlegung und $|Q_{ij}| := |x_i - x_{i+1}| \cdot |y_i - y_{i+1}|$ bezeichne den Flächeninhalt von von Q_{ij}.

(b) Summen der Form

$$U_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in Q_{ij}} f(x,y) \cdot |Q_{ij}|$$
$$O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i,j} \sup_{(x,y) \in Q_{ij}} f(x,y) \cdot |Q_{ij}|$$

heißen *Riemannsche Unter- bzw. Obersumme* von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$. Für beliebige Punkte $(\xi_{ij}, \mu_{ij}) \in Q_{ij}$ heißt

$$R_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \mu_{ij}) \cdot |Q_{ij}|$$

eine *Riemannsche Summe* von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$.

Bemerkung:

Aanlog zu den entsprechenden Aussagen für eindimensionale Riemannintegrale gilt:

1. $U_f(\mathcal{Z}) \leq R_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z})$.
2. Die Hinzunahme weiterer Zerlegungspunkte x_i oder y_j vergrößert Untersummen und verkleinert Obersummen.
3. Für beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ ist stets $U_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z}')$;

Definition C.184

Existieren die Grenzwerte

$$\int\int_{\underline{D}} f(x,y)\, dx\, dy := \sup_{\mathcal{Z}\, Zerlegung von D} \{U_f(\mathcal{Z})\}$$
$$\int\int_{D}^{-} f(x,y)\, dx\, dy := \inf_{\mathcal{Z}\, Zerlegung von D} \{O_f(\mathcal{Z})\}$$

so heißen sie *Riemannsches Unter- bzw. Oberintegral.*

Definition C.185

Eine Funktion $f(x,y)$ heißt *(Riemann)integrierbar* über D, falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen.

$$\int\int_D f(x,y)\, dx\, dy := \int\int_{\underline{D}} f(x,y)\, dx\, dy = \int\int_{D}^{-} f(x,y)\, dx\, dy$$

heißt dann das *(Riemann-)Integral* von $f(x,y)$ über D.

Satz C.186 (Eigenschaften des Mehrfachintegrals)

Seien f und g integrierbare Funktionen. Es gelten folgende Aussagen:

(a) **Linearität**

$$\int\int_D (\alpha f + \beta g)\, dx\, dy = \alpha \int\int_D f\, dx\, dy + \beta \int\int_D g\, dx\, dy.$$

Satz C.187 (Eigenschaften des Mehrfachintegrals (Forts.))

(b) **Monotonie** *Gilt $f(x,y) \leq g(x,y)$ für alle $(x,y) \in D$, so folgt*

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \int\int_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

(c) **Nichtnegativität** *Wenn $f(x,y) \geq 0$ für alle $(x,y) \in D$, dann gilt*

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0.$$

(d) **Zusammensetzung von Integrationsbereichen** *Sind D_1, D_2, D Rechtecke mit $D = D_1 \cup D_2$ und $|D_1 \cap D_2| = 0$, so ist $f(x,y)$ genau dann über D integrierbar, wenn $f(x,y)$ über D_1 und D_2 integrierbar ist. Es gilt dann:*

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int\int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Satz C.188 (Riemannsches Kriterium)

f ist genau dann über D integrierbar, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von D existiert, so dass:

$$O_f(\mathcal{Z}) - U_f(\mathcal{Z}) \leq \epsilon.$$

Satz C.189 (Satz von Fubini)

Sei $D := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Rechteck. Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ integrierbar ist und die Integrale

$$F(x) := \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \text{ und } G(y) := \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ sowie $y \in [a_2, b_2]$ existieren, so gilt:

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1} F(x)\,dx = \int_{a_2}^{b_2} G(y)\,dy$$

Bemerkung

Der Satz von Fubini ermöglicht die Berechnung von Doppelintegralen auf die Integration von Funktionen einer Variablen zurückzuführen.

Verallgemeinerung

Mit $g(x) \geq c$ eine stetige Funktion auf $[a,b]$ so gilt für das Gebiet

$$D = \{(x,y) : x \in [a,b], c \leq g(x)\}$$

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^{g(x)} f(x,y)\,dy$$

Bemerkung

Die vorangegangenen Betrachtungen lassen sich direkt auf Mehrfachintegrale in drei oder mehr Variablen verallgemeinern.