Zusammenfassung

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen geordneten Körper, der bezüglich der Supremums und Infimumsbildung abgeschlossen ist. Daraus folgt, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist, d.h. jede Cauchyfolge von reellen Zahlen einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ besitzt.
- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind nicht vollständig, die komplexen Zahlen $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ sind nicht mehr vollständig geordnet.
- Die rationlen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, d.h. gleichmächtig zu ihrer Untermenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Die reellen Zahlen in jedem offenen Interval (a, b) mit $a < b$ sind bereits überabzählbar.
- Jede rationale Zahl hat eine endliche oder periodische Dezimal- und Binärdarstellung.
- Sowohl die rationalen $\mathbb{Q}$ wie die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$.

Konvergenz von Folgen, Satz C.47

- Eine Folge konvergiert genau dann wenn sie eine Cauchy Folge ist.
- Eine monoton wachsende Folge konvergiert wenn sie nach oben beschränkt ist, sonst heisst sie uneigentlich konvergent gegen ∞.
- Liegt eine Folge zwischen zwei konvergierenden Folgen mit demselben Grenzwert c so konvergiert sie auch gegen c.

Erweiterung

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge. Man nennt $\mathbb{R}$ deshalb *folgenkompakt*.

Konvergenz von Reihen

- Konvergenz der Reihe $\Leftrightarrow$ Partialsummen der Reihenglieder a_n konvergieren als Folge.
- Absolute Konvergenz $\Leftrightarrow$ Reihe der $|a_n|$ konvergiert *Leftrightarrow* jede beliebiege Umordnung konvergiert zu selbem Grenzwert.

- Majorantenkriterium
  Absolute Konvergenz folgt aus $|a_n| \leq c_n$ für konvergente Folge c_n.
- Quotientenkriterium
  Absolute Konvergenz folgt aus $\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq q$ für fast alle n und $q < 1$.
- Wurzelkriterium
  Absolute Konvergenz folgt aus $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq q$ für fast alle n und $q < 1$.
- Leibniz Kriterium
  Bedingte Konvergenz folgt aus $a_n a_{n-1} < 0$ und $|a_n|$ monotone Nullfolge.

Grenzwerte von Funktionen

- Grenzwert $c = \lim_{x \longrightarrow z} f(x)$ wenn sie durch die Setzung $f(x_0) = c$ dort stetig wird. (Sie muss ohnehin für alle x nahe z definiert sein).
- Monoton wachsende Funktionen $f(x)$ heben immer einen Grenzwert $c = \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x)$, der uneigentlich heisst wenn $c = +\infty$ ist.
- Besonders wichtig sind für $y = f(x)$ die Genzwerte der Differentialquotienten

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \stackrel{x \longrightarrow z}{\longrightarrow} f'(z) = \frac{dy}{dx}$$

welche bei Existenz die Ableitung von f an der Stelle z ergeben.

Kombination von Grenzwerten

- Haben zwei Folgen oder Funktionen an derselben Stelle die Grenzwerte a und b so haben die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten der Folgen bzw Funktionen die Grenzwerte $a + b$, $a - b$, $a * b$ und a/b. Die Grenzwertbildung ist also ein Ringhomomorphismus.
- Hierbei gelten für endliches $c > 0$ folgende 'uneigentliche' Regeln

$$\pm\infty + c = \pm\infty, \ \pm\infty * c = \pm\infty, \ c/\infty = 0, \text{ und } c/0 = \pm\infty$$

  Im letzten Falle muss die Konvergenz des Nenners monoton sein.
- Während die Ausdrücke $\infty - \infty$ und $0 * \infty$ unbestimmt bleiben können ∞/∞ und $0/0$ gegebenenfalls mit der Regel von de l'Hopital, d.h. durch eventuell wiederholtes simultanes Differenzieren von Zähler und Nenner ausgewertet werden.

Vererbung von Funktionseigenschaften

- Stetigkeit und (wiederholte) Differenzierbarkeit von Funktionen auf einem vorgebenene offenen Intervall (a, b) vererben sich auf deren Summen, Differenzen und Produkte und Quotienten, vorrausgesetzt die Nennerfunktion hat dort keine Nullstellen. Dasselbe gilt für bistimmte Riemann-Integrierbarkeit in geschlossenen Intervallen $[a, b]$. Alle diese Mengen bilden reelle Vektorräume unendlicher Dimension.
- Differrentiation und unbestimmte Intergration, bei der die obere Grenze variabel ist, sind bis auf eine additive konstante zueinander inverse Operatoren. Sie sind beide linear, d.h. Vektorraumhomomorphismen. Die Differentiation und Integration von Produkten erfolgt mit Hilfe der Produktregel bzw Partieller Integration.

Mittelwertsätze

- Stetige Funktion:
  Jeder Funktionswert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird an einer Stelle c zwischen a und b angenommen, so dass

$$(f(a) - f(c))(f(b) - f(c)) \leq 0 \quad \text{und} \quad (a - c)(b - c) \leq 0$$

- Differenzierbare Funktion(en):
  Die Funktionsdifferenz $f(b) - f(a)$ zwischen a und b ist gleich $b - a$ mal der Ableitung $f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in (a, b)$.
  Qoutient der Funktionsdifferenzen $f(b) - f(a)$ und $g(b) - g(a)$ ist gleich dem Quotient der Ableitungen $f'(c)$ und $g'(c)$ an einer Zischenstelle $c \in (a, b)$.
- Integrierbare Funktion:
  Das bestimmte Integral von f zwischen a und b ist gleich $b - a$ mal der Funktion $f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in (a, b)$.

Zusammengesetzte Funktionen

- Vorrausgesetzt $z = g(y)$ ist auf allen Werten $y = f(x)$ für $a \leq x \leq b$ definiert, so erhält man die Komposition

$$z = h(x) \equiv g(f(x)) = [g \circ f](x) \ \neq \ [f \circ g](x) \text{ !!!!}$$

- Sind g und f beide stetig oder beide sogar differenzierbar, so gilt dies auch für h. Im zweiten Falle ergibt sich die Ableitung nach der Kettenregel zu

$$h'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x) \quad .$$

- Ist g stetig und f Riemann-interierbar, so gilt letzteres auch für $h(x)$.
- Gibt es eine Funktion g, so dass $h(x) = [g \circ f](x) = x$ für alle $x \in [a, b]$, dann heisst $x = g(y)$ die Inverse-oder Umkehrfunktion von f. Sie existiert auf Intervallen $[a, b]$, in denen f streng monton ist, und hat im differenzierbaren Falle die Ableitung

$$g'(y) = \frac{dx}{dy} = 1 \Big/ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(x)}$$

,