Rationale und irrationale Zahlen

Aus der Definition der rationalen Zahl als Quotient zweier ganzer Zahlen folgt unmittelbar der

Satz C.16
Zwischen zwei rationalen Zahlen a und $b > a$ liegen unendlich viele (voneinander verschiedene) rationale Zahlen.

Lemma C.17
Jede nicht leere Menge M natürlicher Zahlen enthält eine kleinste.

Satz C.18
Zwischen zwei reellen Zahlen a und $b > a$ liegen unendlich viele rationale Zahlen.

Irrationale Zahlen

Definition C.21
Eine reelle Zahl, die nicht rational ist, heißt irrational ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Lemma C.22
Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}$, so folgt

$$\begin{array}{lll} a+b,\ a-b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \textit{und} & \\ ab,\ a/b,\ b/a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, & \textit{falls} & b \neq 0 \end{array}$$

Satz C.23
Gibt es überhaupt eine irrationale Zahl, so liegen zwischen je zwei reellen Zahlen a und $b > a$ unendlich viele irrationale Zahlen.
(D.h. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist überall dicht)

Definition C.19
Hat eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ die Eigenschaft:

$$\forall a, b \in M\ (b > a) \quad \exists c \in M \ : \quad a < c < b$$

so sagt man, M sei *überall dicht*, oder die Zahlen von M *liegen überall dicht*.

Die vorigen Sätze C.16 und C.18 lassen sich also so formulieren:

Folgerung C.20
Die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind überall dicht.

Existenz von irrationalen Zahlen

Satz C.24
Es gibt keine rationale Lösung der Gleichung $x^2 = 2$.

Folgerung C.25
Es sei $g \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Ist g nicht k-te Potenz einer natürlichen Zahl, so hat die Gleichung $x^k = g$ keine rationale Lösung.

Mengenvergleiche

Definition C.26 (nach Cantor)

Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $A \to B$ gibt. Ferner sagt man, B *habe eine größere Mächtigkeit als* A, wenn zwar A zu einer Teilmenge von B gleichmächtig ist, B aber zu keiner Teilmenge von A.

Definition C.27

Eine Menge A heißt *abzählbar*, wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der natürlichen Zahlen.

Definition C.28

Die Anzahl der Elementen einer Menge M nennt man *Kardinalzahl* und schreibt dafür $|M|$. Als Symbol für die Kardinalzahl $|\mathbb{N}|$ wird $\aleph_0$ benutzt.

Lemma C.29

Die Menge $\mathbb{Z}$ *ist abzählbar* ($|Z| = \aleph_0$).

Satz C.30

$|Q| = \aleph_0$.

Folgerung C.31

Eine Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen abzählbar ist.

Satz C.32

Das Interval $[0, 1]$ *ist nicht abzählbar (überabzählbar).*

Folgerung C.33

Die Menge $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Folgerung C.34

Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ist nicht abzählbar.*